THE UNIVERSITY
OF ILLINOIS
LIBRARY

506
SAI
Ser.6
v.2

AP. Quart. 62.

The person charging this material is responsible for its return to the library from which it was withdrawn on or before the **Latest Date** stamped below.

**Theft, mutilation, and underlining of books are reasons for disciplinary action and may result in dismissal from the University.**

UNIVERSITY OF ILLINOIS LIBRARY AT URBANA-CHAMPAIGN

DEC 23 1977

DEC 23 1977

L161—O-1096

Digitized by the Internet Archive
in 2018 with funding from
BHL-SIL-FEDLINK

https://archive.org/details/memoiresdelacade02impe

# MÉMOIRES

DE

# L'ACADÉMIE IMPÉRIALE DES SCIENCES

DE

## St.-PÉTERSBOURG.

SIXIÈME SÉRIE.

SCIENCES MATHÉMATIQUES, PHYSIQUES ET NATURELLES.

TOME II.

ST.-PÉTERSBOURG,

DE L'IMPRIMERIE DE L'ACADÉMIE IMPÉRIALE DES SCIENCES.

1833.

Se vend chez Graeff, libraire, Commissionnaire de l'Académie, place de l'Amirauté, maison Stcherbakoff N° 91 et à Leipzig chez Leop. Voss. Prix 18 R° pour la Russie; 24 R° pour l'étranger.

PUBLIÉ PAR ORDRE DE L'ACADÉMIE.

En Novembre 1833.

Le Secrétaire perpétuel P. H. Fuss.

506
SAI
Ser. 6
v. 2

# TABLE

DES

# ARTICLES CONTENUS DANS CE VOLUME.

Page

Untersuchungen über den innern Bau verschiedener in der See lebender Planarien, par M. *Mertens*. (Avec deux planches gravées et coloriées) 3

Solution d'un problème général sur le développement des fonctions, par M. *Collins* . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 19

Du retour des suites, par M. *Collins* . . . . . . . . . . . . . . . 31

Ueber die Veränderungen der Höhen, welche die Oberfläche des kaspischen Meeres bis zum April des Jahres 1830 erlitten hat, par M. *Lenz* . . 67

Ueber den Zahnbau der Steller'schen Seekuh (*Rytina Stelleri*), nebst Bemerkungen zur Charakteristik der in zwey Unterfamilien zu zerfällenden Familie der Pflanzenfressenden Cetaceen, par M. *Brandt*. (Avec une planche lithographiée) . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 103

Observations sur la végétation de l'île de Sitcha, par M. *Bongard*. (Avec six planches lithographiées) . . . . . . . . . . . . . . . . . . 119

Du mouvement dans la machine d'Atwood, en ayant égard à l'élasticité du fil, par M. *Bouniakowsky*. (Avec une planche gravée, dans le texte) . . 179

Foetus humani monstrosi, alio bene formato foetui adnati descriptio, par M. *Zagorsky*. (Avec deux planches lithographiées) . . . . . . . 187

Du développement d'une fonction donnée suivant les puissances d'autres fonctions données; 1ère partie, par M. *Collins* . . . . . . . . . . 195

*

652852

Page
Essai monographique sur les espèces d'Eriocaulon du Brésil, par M. *Bongard.* (Avec neuf planches lithographiées) . . . . . . . . . . . . . . 219
Andropogineorum genera speciesque complures definitionibus novis illustratae, par M. *Trinius* . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 239
Mémoire sur l'intégration des équations à différences partielles, relatives aux petites vibrations des corps élastiques, par M. *Ostrogradsky* . . . . 339
Объ остаточныхъ сравненіяхъ третьей степени, par M. *Bouniakovsky* 373
Sur l'existence d'un oxide cobaltoso-cobaltique, par M. *Hess* . . . . . 393
Vereinigung der beiden, in den Ostseeprovinzen und in Litthauen bearbeiteten Bogen der Russischen Breitengradmessung, par M. *Struve.* (Avec une carte gravée) . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 401
Ueber die Gesetze, nach welchen der Magnet auf eine Spirale einwirkt, wenn er ihr plätzlich genähert, oder von ihr entfernt wird, und über die vortheilhafteste Construction der Spiralen zu magneto-electrischem Behufe, par M. *Lenz* . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 427
De Solenodonte, novo mammalium insectivororum genere, par M. *Brandt.* (Avec deux planches, dont l'une coloriée) . . . . . . . . . . . 459
Beobachtungen und Untersuchungen über die Beroëartigen Akalephen, par M. *Mertens.* (Avec treize planches gravées) . . . . . . . . . . . . 479
Stellarum compositarum 37 insignium mensurae micrometricae per tubum magnum Fraunhoferianum in specula Dorpatensi institutae, par M. *Struve* 545
Mémoire sur l'intégration des fractions rationelles, par M. *Ostrogradsky* . . 569
Expériences de forte compression sur divers corps, par MM. *Parrot et Lenz* 595
Ueber die Leitungsfähigkeit der Metalle für die Electricität, bey verschiedenen Temperaturen, par M. *Lenz* . . . . . . . . . . . . . . . . . 631
Suite du mémoire sur l'intégration des fractions rationelles, par M. *Ostrogradsky* 657
L'Hydroboracite, nouvelle espèce minérale, par M. *Hess* . . . . . . 673

# TABLE DES MATIÈRES

DU

# BULLETIN SCIENTIFIQUE.


## N. I.

Résumé des observations météorologiques faites à St.-Pétersbourg en 1830, à l'observatoire de l'Académie des sciences, par MM. Wisnievsky et Tarkhanoff, et calculées par M. *Kupffer* I. — Note sur la température et la hauteur barométrique moyenne d'Iloulouk, dans l'île d'Ounalachka, par M. *Kupffer* V. — Note sur la température et la hauteur barométrique moyenne de Sitka, sur la côte nord-ouest de l'Amérique, par M. *Kupffer* VIII. — Bulletin des séances de l'Académie; Août et Septembre 1831 IX. — Annonces bibliographiques XIII.

## N. II.

Note sur la température moyenne d'Irkoutsk, par M. *Kupffer* I. — Note sur la température moyenne de Nicolaïeff et de Sévastopol, par M. *Kupffer* IV. — Ueber die Existenz von sechs Arten vorweltlicher Elephanten, die im Zahnbau dem asiatischen Elephanten ähneln, par M. *Brandt* X. — Bulletin des séances de l'Académie; Octobre, Novembre et Décembre 1831 XVI. — Annonces bibliographiques XXIII.

## N. III.

Sur la décomposition de l'hydrate de l'acide sulfurique par la chaleur, par M. *Hess* I. — L'Ouvarovite, nouveau minéral, par M. *Hess* II. — Rapport sur une lettre de M. George Fuss datée de Troitzko-Savsk, par M. *Kupffer* III. — Vorschlag zur Construction eines Thermometers, welcher sich die Curve seines täglichen Steigens und Fallens selbst aufzeichnet, par M. *Lenz* (avec une planche gravée) VIII. — Bulletin des séances de l'Académie; Janvier, Février 1832 XI. — Annonces bibliographiques XIV.


9

## N. IV.

Note sur l'équilibre d'un fil élastique, par M. *Ostrogradsky* I. — Ancien monument mongol II. — Observations astronomiques faites à l'observatoire de Vilna, par M. *Slavinsky* III. — Extrait des observations météorologiques faites en 1829 et 1830 à l'observatoire de Vilna, par M *Slavinsky* XIII. — Avis XIV.

## N. V.

Goebel's Experimentirtisch (avec une planche gravée) I. — Anleitung die Barometer vollkommen luft- und dampffrey zu erhalten, par M. *Marx* à Brunswik VI.

## N. VI.

Sur le traitement métallurgique de l'argent telluré de Kolyvan, par M. *Hess* I. — Calcul du passage de Mercure observé à St.-Pétersbourg, par M. *Tarkhanoff* IV. — Bericht an die Kais. Akademie der Wissenschaften über eine Abhandlung: *Versuch einer Anatomie und Physiologie des medizinischen Blutegels* (Sanguisuga medicinalis), par M. *Brandt* VI. — Note sur la relation que peuvent avoir entre elles les intégrales des fonctions algébriques, par M. *Ostrogradsky* VIII.

# MÉMOIRES

DE

# L'ACADÉMIE IMPÉRIALE DES SCIENCES

DE

ST.-PÉTERSBOURG.

VI^me SÉRIE.

SCIENCES MATHÉMATIQUES, PHYSIQUES ET NATURELLES.

TOME II.

# UNTERSUCHUNGEN

ÜBER

# DEN INNERN BAU VERSCHIEDENER IN DER SEE LEBENDER PLANARIEN;

VON

Dr. Mertens.

---

(Geles. den 27. Jan. 1830.)

Als der Seniavin Europa verliess waren die Naturforscher noch sehr im Dunkeln, über alles was die von Mueller aufgestellte Gattung *Planaria* betraf. Bei nur sehr unvollkommener Kenntniss des äusseren Aussehens der zu derselben gehörigen Thiere konnte man sich nicht verwundern, dass die Systematiker nichts weniger als einig waren, wo sie solche unterbringen sollten. Keiner wusste was mit ihnen anzufangen sey, sie wurden bald hier bald dorthin geworfen, und anstatt sich in der Natur selbst Raths zu erholen, zog man es vor, sich gegenseitig abzuschreiben und einander misszuverstehen, obgleich jeder Sumpf, jeder Graben Aufschluss über sie hätte geben können. Meine Untersuchungen über diese Thiere, während unsrer Reise, wären daher als vollkommen neu erschienen, hätten nicht Baer und Dugès sie fast gleichzeitig zum Gegenstande ihrer Prüfungen gemacht. Obgleich die Resultate meiner Bemühungen daher allen Reiz der Neuheit durch die Arbeiten dieser beiden Naturforscher verlieren, so darf ich doch auf der andern Seite nicht läugnen, dass durch das Licht, welches sie über die in Anfrage stehenden Thiere verbreitet haben, auch

mir vieles in der Deutung verschiedener Organe derselben heller geworden ist, und mit mehr Dreistigkeit kann ich jetzt an die Bekanntmachung von Beobachtungen gehen, deren Richtigkeit durch die Entdeckungen zweier so ausgezeichneter Gelehrten bestätigt werden, von denen ich zur Zeit meiner Untersuchung unmöglich Kenntniss besitzen konnte. Dieser letztere Umstand ist mir in der That sehr schmerzhaft geworden, da ich im entgegengesetzten Falle meinen Arbeiten unstreitig einen weit grösseren Grad von Vollkommenheit würde haben ertheilen können, als der ist, unter welchen ich jetzt dieselben Ihrer Beurtheilung vorzulegen, mir die Freiheit nehme.

Die erste Art (*Taf. I. Fig.* 1—3), die ich von dieser Gattung untersuchte und mit dem Namen *lichenoides* belegt habe, fand ich in Sitcha, wo sie einer Flechte gleich die Steine am Rande überzieht, die während der Fluth vom Seewasser bedeckt werden. Nur bei sehr genauer Beobachtung wird man die Ortsveränderung gewahr, und erst dann überzeugt man sich, dass man ein Thier vor sich hat. Alle äusserliche sichtbare Bewegung des Thieres Behufs einer Locomotion beschränken sich auf schwach wellenförmige Bewegungen der Ränder und Modificationen derselben. Wo man nämlich vor einem Augenblicke einen Lappen bemerkt hatte, sieht man jetzt eine Einbucht u. s. w. Die ganze Dicke des Thieres beträgt kaum eine halbe Linie, kaum bemerkt man eine Substanz-Zunahme in der Mitte, obgleich solche höchst wahrscheinlich statt findet. Eine Mittellinie (*F.* 1. *a*,*a*) verläuft, obschon schwach, durch die ganze Länge des Thieres; überdies bemerkt man in der Mitte ein bestimmt unscheinbares Oval (*Fig.* 1. *b*, *b*), welches den Umfang des Oesophagi andeutet, und zu beiden Seiten der Mittellinie swischen dem Ovale und dem vordern Ende einen dunkeln Fleck (*Fig.* 1. *c*,*c*), den die Schriftsteller in andern Planarien als *Auge* zu bezeichnen pflegen. Genauer betrachtet, zeigen sie sich aus einer Menge kleiner Punkte zusammengesetzt. — Die Farbe des Rückens des Thieres ist ein sehr gleichmässiges Braungelb mit dunkeln Streifen und Streifchen. Der Rand mit einigen Wellenlinien eingefasst, ist wie schon bemerkt wurde, verschiedenen Modificationen unterworfen und ändert beständig seine Gestalt. Dadurch erhält auch die Form des ganzen Thieres bald mehr das Ansehen eines Ovals, bald

mehr das eines gleichmässigen Kreises, bald ist das Individuum mehr oder weniger in die Breite gezogen. Die untere Fläche des Thieres ist fast weiss, oder vielmehr schmutziggelb. Man bemerkt zuvörderst auf derselben zwei Oeffnungen, die beide genau in die Mittellinie fallen, die obere (*Fig.* 2. *a*) fällt überdiess beinahe mit der Mitte des Thieres zusammen, indess etwas mehr gegen das hintere Ende hin, wenn man die Stelle, wo sich die oben bemerkten schwarzen Punkte, die Augen vorstellen sollen, als das Kopfende bezeichnend annimmt. — Gewiss ist es übrigens, dass sich das Thier immer nur mit diesem Theile des Körpers voran bewegt. Von dieser Oeffnung, die ich nicht einen Augenblick als den Mund entsprechend verkannt habe, laufen baumartige Verzweigungen (*Fig.* 2. *c*, *c*) nach dem kleinen Ovale hin, dessen schon bei der Rückenfläche des Thieres Erwähnung gethan wurde, und welches mir die Gränzen des Oesophagi zu beschreiben scheint. Dieser ist von einem ungemein grossen Umfange, so dass er bei weitem den des ganzen Thieres übertrifft. Nach Art mehrerer Anneliden und Echinodermen vermag das Thier seine Speiseröhre nach aussen umzustülpen, und in diesem Zustande dient sie ihrem Eigenthümer zugleich als Tentakel oder Tastorgan, als Werkzeug um sich Nahrung zu verschaffen und endlich als Fuss zur Ortsveränderung. Ueber die Richtigkeit dieser Behauptung hatte ich hinreichend Gelegenheit mich an verschiedenen Exemplaren, die ich während mehrerer Tage in einem durchsichtigen mit Salzwasser angefüllten Glase beobachtete, zu überzeugen. Die Thiere, die ich mit den Steinen, auf welchen ich sie fand, gleich in die benannten Gläser brachte, verliessen bald dieselben, und indem sie sich an die glatte Fläche des Glases anschmiegten, bewegten sie sich langsam vorwärts, wie meine dritte Abbildung dieses Thieres es angiebt. Die Speiseröhre quoll dabei reichlich aus der Mundöffnung hervor, und zwar nicht gleichförmig, wie dieses z. B. bei Actinien und Asterien der Fall ist, sondern in vielen Falten, die sich, eine unabhängig von der andern, zu entwickeln schienen; bald waren diese ausgebreitet, bald zusammengeklappt, immer aber konnte man sie mit einer Menge von Armen vergleichen, die nach allen Seiten ausgestreckt offenbar nach Nahrung suchten und zu diesem Behufe, und weil sie zugleich die Organe zur Orts-

veränderung waren, beständig ihr äusseres Ansehen veränderten. Traf einer von diesen Armen auf eine kleine Crustacée, auf eine Naide u.s.f., die ebenfalls an der Fläche des Glases fortkrochen, so klappte sich dieser Theil des Oesophagi zusammen, oder öffnete sich im entgegengesetzten Falle auf einen Augenblick und schlüpfte mit seiner Beute in die Mundöffnung zurück, ohne dass die übrigen Portionen desselben Organes an dieser Function Antheil zu nehmen schienen.

Die *Fig.* 3 der *Taf. I.* stellt gerade den Moment dar, wie eine Portion der Speiseröhre in die Mundhöhle zurückschlüpft. Eben so zog sich einer dieser fremdartigen Arme zurück, wenn ich ihn mit dem Finger, Pinselstock oder einer silbernen Sonde berührte, setzte ich diese Berührungen fort, so zog sich nach und nach der ganze Oesophagus zurück, und dann erschien das Thier, von unten gesehen, wie es meine zweite Abbildung darstellt, nur dass es in der Regel alsdann mehr zusammengezogen war. Ueber den weiteren Verlauf des Speisekanals blieb ich in dieser Art vollkommen im Dunkeln. Dass die hervorgetriebene Portion des Oesophagi sich aber wirklich in die oben erwähnten baumartigen Verzweigungen logiere, schloss ich aus dem Umstande, dass dieser Theil fast ganz meinen Augen entzogen wurde, wenn sein Inhalt sich ausserhalb des Körpers des Thieres befand.

Diesen Behälter der Speiseröhre sehen wir zu beiden Seiten fast eingefasst durch einen weiten mehr oder weniger gewundenen Kanal von scheinbar drüsigter Structur (*Fig.* 2. *d*,*d*). Sein äusserer Rand ist, die Windungen abgerechnet, ganz, sein innerer dagegen sendet eine Menge kleiner Verzweigungen ab, die sich gegen die des Behälters der Speiseröhre begeben. Ueber die Bedeutung dieses Organes konnte ich mir damals keine klare Idee verschaffen, das Thier war zu wenig durchsichtig, und die Einspritzungen gefärbter Flüssigkeiten die ich durch die Mundöffnung unternahm gelangen nicht, sondern verwandelten dasselbe bald in eine Masse, die es zu ferneren Untersuchungen ganz untauglich machte. Eben so fruchtlos waren meine Bemühungen mit dem anatomischen Messer etwas auszurichten, nicht nur dass die Plattheit des Thieres die Prüfung desselben erschwert hätte, sondern auch seine schleimige, fast gallertartige Substanz, erlaubte weder dem Messer noch der Nadel

mir Aufklärungen zu geben. Erst nach Verlauf von fast zwei Jahren erkannte ich in einer viel kleineren aber vollkommenen durchsichtigen Art, dass ich hier höchst wahrscheinlich die Eierstöcke vor mir gehabt hatte.

Die andere Oeffnung, welche die untere Fläche meines Thieres darbot (*F.* 2. *b*) hielt ich damals für die After- und zugleich für die Geschlechtsöffnung; gegen dieselbe liefen von beiden Seiten und von unten eine Reihe von Kanälen (*Fig.* 2. *e*, *e*, *e*), über deren Bedeutung ich mir aber leider ebenfalls keine bestimmte Rechenschaft ablegen konnte. Auch diese Kanäle waren jederseits eingefasst von einem andern, grösseren, mehr gewundenem Gefässe (*Fig.* 2. *f*, *f*), das mir oft eine Fortsetzung desjenigen zu seyn schien, welches sich in einer Linie mit ihm befand und zu den Seiten des Oesophagi gelegen war. Bei näherer und öffterer Untersuchung, indess sah ich, dass es sich jederseits plötzlich von aussen und oben nach innen und unten begab, wo ich beide nahe bei der Oeffnung *b* aus dem Gesichte verlor. Ob übrigens diese beiden Seitengefässe mit den andern Kanälen, die sie einschlossen, Verbindungen eingiengen, konnte ich nie mit Gewissheit entscheiden. Manchmal schien es mir so, und in andern Fällen dagegen, glaubte ich bestimmt vom Gegentheile überzeugt seyn zu müssen. Dass übrigens diese beiden Arten von Kanäle in bestimmter Beziehung mit dem Generationssystem stehen müssten, schien mir gewiss, nur konnte ich zu keiner Klarheit über ihre physiologische Bedeutung gelangen.

Ausser dem schon Erwähnten bot mir die Unterfläche des Körpers dieser Art nichts weiter dar, bis auf eine kleine verdünnte Stelle in der Substanz desselben (*Fig.* 2. *g*), die sich in einigen Exemplaren, ebenfalls in der Mittellinie, aber nahe dem vordern Ende zeigte, und die man bei nicht genauer Untersuchung für eine Oeffnung hätte halten können, von deren Nichtanwesenheit ich indess glaube mich bestimmt erklären zu können. Mit diesen wenigen Beobachtungen musste ich mich bei dieser grossen Art begnügen. Mein Muth, meine Bemühungen, mir jetzt schon bestimmtere Aufschlüsse über die Organisation, dieser damals noch fast ganz vernachlässigten Thiere zu verschaffen, scheiterten an der Schwierigkeit mit der ihre anatomische Untersuchung verknüpft war, wozu der Umstand kam, dass ich mich bei

unserem sehr beschränkten Aufenthalte in dem so interressanten Sitcha zu unfähig zu arbeiten im Zimmer fühlte.

Am 17. Mai 1829 unter dem 7° 48′ N. Br. und 23°—56° westl. L. v. Greenw. Bei einer Temperatur der See von 19,6, zeigte sich mir zum ersten Male wieder eine *Planaria* (*Pl. pellucida nob.*), und zwar im hohen Meere in einer Entfernung von nahe an 500 Seemeilen von jedem Lande, an einer Stelle, wo sich keine Spur von Seegras, oder sonst einem Artikel zeigte, an welchem dieses Thier hätte leben können. Sie war an diesem Tage nichts weniger als selten, und ich traf sie gemeinschaftlich mit der kleinen *Porpita* dem *Glaucus hexapterygius* und einigen Physalien an. Ich verschaffte mir eine ziemliche Menge von Exemplaren. Sämmtliche Thiere waren durchsichtig von weissgelblicher Farbe mit verschiedenartig gefärbten baumartigen Verzweigungen, je nachdem sie verschiedenartige Nahrung zu sich genommen hatten, da die nähere Untersuchung mir zeigte, dass diese die Anhänge des Magens waren.

Die Bewegungen des Thieres sind geschlängelt wie die der häutigen *Doris*-Arten und verschiedener Anneliden. Das Thier ist durchaus platt von den Flächen zusammengedrückt, und ungemein dünn. Auf seinem Rücken sieht man die Kopfgegend oder das vordere Ende durch zwei kleine Tentakel angedeutet (*Taf. II. F.* 2. *c,c*), die durchaus in die Substanz des Thieres hereingezogen werden können, ihre Basis, wie ihre Spitze sieht man durch einige Pünktchen bezeichnet, die als Augen von verschiedenen Schriftstellern aufgeführt sind. Die vollkommene Durchsichtigkeit des Thieres erlaubte mir über den innern Bau desselben verschiedene interessante Beobachtungen anzustellen.

Auf der Unterfläche des Thieres sieht man zunächst sehr deutlich zwei Oeffnungen von denen die eine grössere (*Fig.* 3. *a*), meist längliche, fast genau in der Mitte zu suchen ist, die andere kleinere (*F.* 3. *b*). in derselben Linie mit dieser in der Nähe der hinteren Extremität. Die erstere dieser beiden Oeffnungen erkannte ich gleich, wie bei der *Pl. lichenoides*, als die Mundöffnung. Ohngeachtet ihrer Grösse ist es doch oft schwer den eigentlichen Mund zu finden, indem, wie bei der *Pl. lichenoides*, die die Mundhöhle oder Speiseröhre bildende Haut nach aussen umgestülpt wer-

den kann. Ich sah indess in dieser *Planaria* diesen Process nie so weit treiben wie in jener. Die Mundhöhle ist sehr geräumig und läuft jederseits in 6—8 seitliche Säcke aus, die als die Speiseröhre entsprechend angesehen werden müssen (*F.* 3. *c*, *c*); sie sind in der That das Erste was einem bei der Untersuchung auffällt, und leicht könnte man sie für den Magen halten. Unmittelbar über diesem Grunde verlängert sich die Höhle nach vorne und hinten, und bildet einen länglichen Magen der genau in der Mittellinie liegt, und bei sehr ausgestrecktem Zustande des Thieres fast nur einem Gefässe gleicht (*Fig.* 2. *h*). Aus diesem gehen nach allen Seiten Anhänge, die eine offenbare Analogie mit den blinden Säcken der Aphroditen tragen, ich zählte jederseits 5—6 und 1 oder 2, vorn und hinten. In einer geringen Entfernung von dem Magen verzweigen sie sich baumartig, und schwellen blätterartig zu kleinen Höhlen an. Die verschiedene Nahrung, die das Thier zu sich nimmt, bestimmt die Farbe dieser Magenanhänge, die sich äusserlich als Gefässnetz zeigen, und leicht als solches verkannt werden könnten. Ihr Ansehen verändert sich sehr, je nachdem sie mit Speise angefüllt sind, oder sich in einem entleerten Zustande zeigen. Oft sieht man einige Aeste voll mit *Chymus*, während andere ganz zusammengezogen und leer sind. In keinem der von mir untersuchten Exemplare, konnte ich von dem Magen einen Kanal finden der diesen Theil in Verbindung mit der oben angeführten hinteren Oeffnung gesetzt hätte, die sich fast beständig öffnete und schloss, und manchmal einige Massen auswarf die ich anfangs für Koth hielt, in denen ich aber später Eier entdeckte. Da Baer und Dugès ebenfalls vergebens nach einer zweiten Oeffnung des Darmkanals gesucht haben, so glaube ich keinen Anstand nehmen zu dürfen der Ansicht Dugès's beizutreten, dass diesen Thieren dieselbe durchaus fehlt, und dass in dieser Hinsicht die Planarien sich den Actinien und andern tiefer stehenden Thieren nähern, die für den Mund und After nur eine gemeinschaftliche Oeffnung haben. Baer sah, dass wenn die Kanäle, die von dem Magen ausgehen, sehr voll sind, etwas durch die Saugeröhre ausgespieen wird. Dugès beschreibt umständlich den Verdauungsprocess, und beobachtete bestimmt, dass der unverdauete Theil der Speisen durch dieselbe Oeffnung ausgeworfen wurde, wodurch diese in

den Körper aufgenommen waren, und auch ich beobachtete mehrere Male Entleerungen durch den Mund, über deren Natur ich mich indess damals noch nicht zu äussern wagte. Der Eierstock (*Fig.* 3. *d*, *d*) liegt beiderseits als ein faltenreicher, etwas gewundener Kanal zu jeder Seite des Speiseröhren-Behälters, und fällt hier auf den ersten Blick ins Auge, weiter nach unten indess verliert man ihn fast aus dem Gesichte, und ich würde über seinen weitern Verlauf mich nicht aussprechen können, wenn ich nicht Eier zu verschiedenen Malen hätte aus der untern Oeffnung treten sehen, wenn ich den obern deutlichen Theil des *Ovarii* mit einem Nadelknopfe drückte. Die Eier (*F.* 6), die auf diese Weise an das Licht traten, hatten schon durchaus das Ansehen des vollkommenen Thieres; man bemerkte deutlich die ramificirten Anhänge des Magens, und auf der untern Seite die Mundöffnung. Die Eier, die ich aus dem *Ovario* selbst untersuchte, boten mir keine andern Erscheinungen dar. Lebensäusserungen habe ich indess nicht in ihnen bemerkt. Für den Hoden (*F.* 3. *e*, *e*) hielt ich ein Organ, welches von unten gesehen, mit seinem Centro einen Theil des Thieres gleich oberhalb der weiblichen Geschlechtsöffnung undurchsichtig macht. Von diesem Centro aus erstreckt sich dieses Organ nach vorne, hinten und zu beiden Seiten in ausserordentlich feine Fäden, deren Menge nicht zu zählen ist, vorzüglich nach vorne kann man sie weit in das Gewebe des Thieres verfolgen. Sie sind mit einer weissen Milch angefüllt, die sich im Centro des Thieres, durch eine kleine Oeffnung (*F.* 3. *i*) einen Weg nach aussen zu bahnen scheint. Ich sah durch dieselbe einen bedeutenden Tropfen aus dem damit angeschwollenem Organe hervortreten, wie ich durch Zufall den Ausführungsgang des ebenfalls sehr angeschwollenen Eierstockes verletzt hatte, und die Eier mit Gewalt aus demselben hervorquollen. Bedeckt von einem durchsichtigen Sacke (*Fig.* 3. *k*, *k*), der sich zwischen den beiden Hauptöffnungen auf der Unterfläche des Thieres in dessen Substanz zeigt, und der mit den weiblichen Geschlechtstheilen in Verbindung steht, bemerkt man einen andern birnförmigen opaken Körper (*F.* 3. *l*), der unstreitig dem Theile entspricht, den DUGÈS in der *Planaria tremelloides Müller*, die ebenfals Meer bewohnend ist, mit der Ruthe vergleicht. In die Basis dieses Körpers sieht man zwei Kanäle

sich münden, die aus einem drüsigten, länglichen Organe (*F.* 3. *f, f*) entspringen, das zu beiden Seiten des Hodens parallel mit den Rändern des Thieres verläuft, und welches offenbar dasselbe Organ ist, was ich in der ***Pl.*** *lichenoides* in der *Fig.* 2. mit litt. *f* bezeichnet habe, und dessen Bedeutung mir damals noch ganz dunkel war. Es leidet keinen Zweifel, dass Dugès diesen nämlichen Theil als Hoden anführt, indem er das Organ was ich als Hoden in der ***Pl.*** *tremelloides* erkannte, nicht bemerkte. Baer und Dugès beobachteten indess beide den Akt der Copulation, und letzterer hält bestimmt die kleine Oeffnung, der ich so eben Erwähnung gethan habe, für den Theil durch welchen die Ruthe nach aussen tritt. Baer dagegen scheint in ***Pl.*** *torva* beide von mir gesehene Organe beobachtet zu haben, wenigstens lässt seine Zeichnung solches vermuthen. Was er aber im Texte Keimbehälter nennt, ist wahrscheinlich das, was Dugès als Hode in der ***Pl.*** *tremelloides* beschreibt; während aus der kurzen Beschreibung die Baer giebt, es fast keinen Zweifel hat, dass das, was er für den Samenleiter hält, mit dem Organ zusammenfällt, welches ich in meiner lebenden ***Pl.*** *pellucida* für den Hoden hielt. Auch gestehe ich frei, dass ich noch jetzt nicht von dieser Idee zurück gekommen bin. Offenbar sind hier zwei Absonderungs-Organe die den männlichen Geschlechts-Apparat ausmachen, und es kommt nur darauf an diesen beiden Theilen die ihnen zukommenden Functionen anzuweisen. Entweder ist das Organ, was ich für den Hoden hielt, wirklich dieser Theil, und alsdann wären die beiden drüsigten Kanäle, die sich in die Basis der Ruthe münden, als *vasa deferentia* anzusehen, oder diese letzteren sind, wie Dugès es glaubt, die Hoden, und in diesem letzteren Falle müsste man das andere Organ, als der *prostata* entsprechend, betrachten. Zu dieser Ansicht möchte ich mich indess schon aus dem Grunde kaum neigen, da eine eigentliche Vorsteherdrüse sich nur bei den am höchsten entwickelten Thieren darthun lässt. Die Untersuchung dieser Art liess mich freilich über den Ursprung des als Samenleiter angenommenen Organs im Dunkeln, indess die ***Pl.*** *sargassicola*, die wir gleich näher betrachten werden, zeigt deutlich dass er aus dem Vereinigungspuncte aller der Fäden kommt, die die Masse des Hodens bilden. Schade, dass ich jene Art zu einer Periode untersuchen musste,

in welchem die Geschlechts-Functionen nicht in Thätigkeit zu seyn schienen, welcher Umstand Ursache wurde, dass ich daselbst dasselbe Gefäss nicht bis zu seiner Mündung verfolgen konnte.

Von den Organen, deren Wahrnehmen uns die untere Seite der *Planaria pellucida* erlaubt, bleibt nur noch das Gefässsystem als zu erwähnen übrig. Den Centraltheil (*F.* 3. *m*) desselben sahe ich genau in der Mittellinie des Thieres etwas, unterhalb der Stelle, wo man auf der Rückenfläche die Tentakeln bemerkt. Er besteht aus einem verhältnissmässig grossen fast runden, plattgedrückten Bläschen, aus welchem sich nach unten zwei grosse Stämme begeben, die fast unmittelbar nach ihrem Ursprunge in zwei Aeste auslaufen, deren Richtung dem Längendurchmesser des Thieres entspricht, die ich indess nie weiter als etwas über die Mitte des Thieres hinaus verfolgen konnte; sie verlaufen zu beiden Seiten des Eierstocks, so dass sie denselben jederseits einschliessen. Beide Aeste senden eine grosse Menge von kleinen Zweigen nach beiden Seiten, unter einem fast rechten Winkel ab, die sich wieder vielfältig verzweigt, auf der ganzen Fläche des Thieres verbreiten. Nie indess fand ich dieses Gefässnetz in einem so hohen Grade ausgebildet wie DUGÈS dasselbe darstellt; ebenso entgieng meiner Beobachtung das Zusammentreten der Haupt-Gefässe beider Seiten unterhalb der untern oder weiblichen Geschlechtsöffnung. Ausser diesen beiden Hauptstämmen sehen wir jederseits aus dem Centraltheile des Gefässsystems noch 4 andere kleinere Gefässe treten, die nach oben und seitwärts verlaufen. Nur in sehr bedeutenden Zwischenräumen von der Dauer von fast einer Minute bemerkte ich eine schwache Contraction und darauf folgende Dilatation in dem Herzen, nie aber dass sich dieselbe auf die Gefässe erstreckt hätte. Zwei verschiedene Gefässsysteme habe ich nicht gesehen, und weiss daher nicht, ob solche hier existiren. Besondere Organe indess für die Decarbonisation des Blutes, also Branchien, fehlen bestimmt, und in der That kann das Thier bei seiner grossen Plattheit derselben vollkommen entbehren, indem alle Theile desselben in beständigen Contact mit dem es umgebenden, oxygenreichen Elemente sind. Die Rückenfläche des Thieres wird überdiess noch vermehrt durch eine grosse Menge,

sehr kleiner, blasenförmiger Erhabenheiten. Dugès sieht dieselben für Eier an, die in der Substanz des Thieres zwischen den Magenanhängen (wie z. B. bei Aphrodite etc.) frei liegen. Indess haben sie mit solchen ganz gewiss nichts zu schaffen.

Es gelang mir nicht, trotz aller Untersuchung irgend etwas, was einem Nervensysteme ähnlich gewesen wäre, zu beobachten.

Die 3. *Planaria* (*T. I. fig.* 4—6), die ich zu untersuchen Gelegenheit hatte, traf ich fast täglich vom 27. Mai bis 11. Juni 1829 im atlantischen Oceane an, zwischen den 21° bis 35° N. Br. und den 36 bis 38° W. Länge von Greenwich, bei der Temperatur des Meeres von 18—16° R., während dieser Zeit nämlich segelten wir fast beständig zwischen einer grossen Menge von *Sargassum* (*Fucus natans*, *bacciferus polyphyllus etc.*), welches uns zunächst mit mehreren Crustaceen und Fischen, einige interessante Mollusken und andre niedre Thiere lieferte, unter welchen sich auch sehr häufig diese *Planaria* zeigte, die ich deshalb mit dem Namen *sargassicola* belegt habe. Sie misst nie mehr als etwa 6 Linien in der Länge, und gegen 4 in der Breite, ihre Farbe ist ein leichtes okergelb mit einer weissen Einfassung und vielen kleinen dunkler gefärbten Puncten. Im Allgemeinen ist dieses die Farbe des *Sargasses*, und noch deutlicher tritt dieselbe hervor in der Zeichnung der sehr feinen, und ungemein zahlreichen Magenanhänge, deren ich nicht selten an 12 jederseits zählte. Die Kopfgegend wird ebenfalls durch zwei Körperchen (*F.* 5. *c*,*c*) bezeichnet, die mir ebenfalls Tentakelartige Verlängerungen zu seyn schienen, und auf deren Spitze sich ebenfals ein schwarzes Aeugelchen zeigte. Die Mundöffnung (*F.* 6. *a*) befindet sich hier gerade in der Mitte des Körpers, die aber keinesweges mit der des Behälters für die Speiseröhre zusammenfält, indem solche mit ihrem, bei weitem grösseren Theile in der vordern Hälfte des Thieres zu suchen ist. Der Umfang dieses Behälters (*F.* 6. *c*,*c*) ist grösser als der in der *Pl. pellucida*, muss aber dennoch sehr an Umfang dem der der *Pl. lichenoides* weichen. Der Magen (*F.* 5. *h*) hat dieselbe Form wie der an der *pellucida*, seine Anhänge aber sind, wie schon bemerkt wurde, bei weitem zahlreicher, dieser aber auch allgemein weit dünner, obschon die Verzweigungen derselben ebenfalls sehr zahlreich sind. Auch

hier fand ich keinen fernern Theil desselben, der etwa dem Dünndarm oder gar dem *recto* zu vergleichen gewesen wäre. Die Ovarien (*F.* 6. *d*,*d*) liegen, merkwürdig genug, nicht längs des Behälters des *Oesophagi.* Man findet sie vielmehr in der hinteren Hälfte des Thieres. Sie steigen hier als ein ebenfalls ziemlich weiter, drüsigter Kanal aufwärts, und in die Breite der Mundöffnung gelangt, schlägt sich ihr Ausführungsgang nach innen und unten um. Es war mir indess nicht möglich denselben bis zu der hintern Oeffnung zu verfolgen, er schien vielmehr plötzlich aus der Mitte des Magens dahin aufzuhören, und obgleich ich mehrere Exemplare in dieser Hinsicht untersuchte, so konnte ich doch zu keinem glücklicheren Resultate gelangen. Ist diese besondere Bildung vielleicht nur temporär, und steht sie mit der Entwickelung der Eier in Verbindung? Die Ovarien enthielten keine Eier, ich fand nichts in ihnen als eine weisse wässerigte Flüssigkeit, die unter dem Microskope betrachtet, kleine Kügelchen enthielt, die mit denen des Blutes die grösste Aehnlichkeit hatten. Der Hode (*F.* 6. *e*, *e*) liegt hier auch weiter nach hinten, als in der vorigen Art, auch ihn fand ich weniger entwickelt als in der *Pl. pellucida*, indess bemerkte ich bei ihm deutlich den Ursprung der samenleitenden Gefässe aus der Vereinigungsstelle aller Kanälchen des Testikels; die Insertion derselben in die Ruthe (*F.* 6 *l*) suchte ich indess hier vergebens; ein Umstand den ich ebenfalls der zeitigen Unvollkommenheit dieser Organe zuzuschreiben geneigt bin.

Das Gefässsystem dagegen lief in dieser Art mehr nach vorn, das Herz (*F.* 6. *m*) findet man fast an dem äussersten vordersten Ende der Stämme, die aus demselben entsprungen sind, hier indess bei weitem weniger; ich bemerkte jederseits nur ein grosses Gefäss verlaufen.

Nachdem ich so meine Untersuchungen über drei Arten der Gattung *Planaria*, die in der See zu Hause sind, mitgetheilt habe, so will ich jetzt in gedrängter Kürze die allgemeinen Resultate aufführen.

Die in der See wohnenden Planarien sind, so viel man jetzt weiss, sämmtlich ausserordentlich an den Flächen zusammengedrückt (*depressae*); ihr Kopfende wird auf der Rückenfläche durch augenartige Organe bezeichnet, deren Anzahl in den

verschiedenen Arten nicht dieselbe ist, und von denen manchmal einige auf tentakelartigen Fortsätzen stehen, die in die Substanz des Thieres verborgen werden können. Die Oeffnung die sich mehr oder weniger in der Mitte auf der Unterfläche des Thieres zeigt, ist zugleich Mund-und Afteröffnung, der *Oesophagus* liegt in einer geräumigen, oft viele Buchten habenden Höhle und kann ganz nach aussen umgestülpt werden, der Magen bildet einen mehr oder weniger langen Kanal, aus dem eine Menge verzweigter Blinddärme treten. Das Gefässsystem ist stets einfach und besteht aus einem grossen Herzen und verschiedenen Gefässen, vielleicht nur einer Ordnung. Sämmtliche Planarien sind Zwitter. Die weiblichen Geschlechtswerkzeuge bestehen aus zwei bedeutenden Ovarien, die sich in eine Höhle münden, wo die Brut vielleicht bis zur vollkommenen Entwickelung verweilt, worauf sie durch die hintere Oeffnung entleert werden. Die männlichen Geschlechtstheile bestehen aus einem Hoden, der aus einer Menge von Gefässen zusammengesetzt ist, die sich unmittelbar neben der weiblichen Geschlechtsöffnung vereinigen und dort in zwei *vasa deferentia* übergehen, die sich in die Basis der Ruthe endigen. Die Ruthe selbst kann durch eine besondere Oeffnung nach aussen treten, die sich unmittelbar vor der weiblichen Geschlechtsöffnung findet.

Man muss die Planarien durchaus unter die Anneliden aufstellen, wo sie indess ohne Zweifel auf einer der niedrigsten Stufen stehen. Dass sie nicht geringelt sind kann kein Gegeneinwurf seyn, indem schon ihre platte Gestalt dieses nicht erlaubt, und wir schon in der *Hirudo complanata* in dieser Hinsicht eine sehr bedeutende Annäherung wahrnehmen. Auch in *Thalassema* sind die Ringe sehr unvollkommen und treten nur gegen das hintere Ende deutlicher hervor. Aber sehen wir auch nicht hier in den Magenanhängen, und den fast unter einen rechten Winkel, von den grossen Aesten des Gefässsystems abgehenden Zweigen, eine Andeutung wenigstens von Ringen? Den Mangel des rothen Blutes habe ich mit Bestimmtheit, in einer *Nereis* beobachtet, die mir mit *N. alba* die grösste Verwandtschaft zu haben scheint, und vielleicht auch noch in einer Aphrodite. Der Mangel der Branchien wird erklärt, so bald man nur die Frage beantwortet, was die Functionen

derselben seyen? Wo sehen wir überhaupt irgend eine Familie, in der man nicht verschiedene Grade der Ausbildung in den einzelnen Organen wahrnehme? und sind auf dieser Bedingung nicht allein die Gesetze aller natürlichen Verwandtschaft gegründet? —

---

## *Erklärung der Abbildungen.*

*Tab. I. Fig.* 1—3. *Planaria lichenoides n.*

*F.* 1. Das Thier von oben gesehen.

*a, a.* Die Mittellinie.

*b.* Die auf dem Rücken des Thieres sichtbare Begränzung des Speiseröhren-Behälters.

*c.* Die Augen.

*F.* 2. Das Thier von unten gesehen.

*F.* 3. Ebenfalls von unten gesehen; bei sehr stark nach aussen umgestülpter Speiseröhre.

*F.* 4—6. *Planaria sargassicola n.*

*F.* 4. Das Thier in natürlicher Grösse.

*F.* 5. Dasselbe vergrössert von der Rückenfläche betrachtet.

*F.* 6. Dasselbe vergrössert von unten gesehen.

*Tab. II. Planaria pellucida n.*

*F.* 1. Das Thier in natürlicher Grösse von oben.

*F.* 2. Dasselbe vergrössert von oben gesehen.

*F.* 3. Dasselbe vergrössert von unten gesehen.

*F.* 4. Eine ideale Zeichnung von der Seite, um die Lage des Magens und der Speiseröhre anzuzeigen.

*F.* 5. Die Speiseröhre aus ihrem Behälter nach aussen umgestülpt.

*F.* 6. Eier.

In allen Zeichnungen auf diesen beiden Tafeln bedeuten die nämlichen Buchstaben immer dieselben Organe, nämlich:

*a.* Ist die Mund- und Afteröffnung.

*b.* Die weibliche Geschlechtsöffnung.

*c.* Der Behälter für die Speiseröhre.

*d.* Der Eierstock.

*e.* Der Hode.

*f.* Das *vas deferens.*

*g.* Eine unscheinbar durchsichtigere Stelle in der *Pl. lichenoides.*

*h.* Der Magen.

*i.* Die männliche Geschlechtsöffnung.

*k.* Der Eierbehälter.

*l.* Die Ruthe.

*m.* Das Herz.

# SOLUTION

## D'UN

# PROBLÈME GÉNÉRAL SUR LE DÉVELOPPEMENT DES FONCTIONS;

PAR

M. COLLINS.

---

(Lu le 13 Février 1828.)

1) Les théorèmes de TAYLOR et de MACLAURIN renferment les préceptes généraux pour le développement des fonctions en séries suivant les puissances, à exposans entiers et positifs, des variables. Mais ces séries, ainsi que les fractions continues, ne forment qu'un genre particulier d'expressions, finies ou infinies, construites d'après une loi donnée. Les séries vulgaires, c'est-à-dire, celles qui sont contenues dans la forme:

$$y = \alpha + \beta x + \gamma x^2 + \delta x^3 + \cdots\cdots$$

peuvent être envisagées comme le résultat de la substitution successive de ces expressions:

$$y = \alpha + qx$$
$$q = \beta + rx$$
$$r = \gamma + sx$$
$$s = \delta + tx$$
etc.

les unes dans les autres, en éliminant d'abord $q$, puis $r$, puis $s$, $t$, $\cdots\cdots$ etc. On formera de la même manière la fraction continue:

$$y = \alpha + \cfrac{x}{\beta + \cfrac{x}{\gamma + \cfrac{x}{\delta + \text{etc.}}}}$$

en prenant:

$$y = \alpha + \frac{x}{q}$$
$$q = \beta + \frac{x}{r}$$
$$r = \gamma + \frac{x}{s}$$
$$s = \delta + \frac{x}{t}$$
etc.

et en effectuant les mêmes substitutions que ci-dessus. Il est donc très-naturel d'étendre les recherches sur le développement des fonctions jusqu'aux expressions qui résultent, par une voie analogue aux deux précédentes, de cette suite d'équations:

$$y = \alpha + xfq$$
$$q = \beta + xfr$$
$$r = \gamma + xfs$$
$$s = \delta + xft$$
etc.

où le signe $f$ indique une fonction quelconque donnée des quantités $q$, $r$, $s$, $t$, etc. Nous nous sommes donc proposés de tracer dans ce qui suit une méthode générale pour le développement de toute fonction donnée, $\varphi x$, à une variable indépendante, en une série de cette forme:

$$\alpha + xf(\beta + xf(\gamma + xf(\delta + \cdots))).$$

2) Pour pouvoir mieux distinguer, par leur ordre et leur place, les constantes indéterminées $\alpha, \beta, \gamma, \delta, \cdots\cdots$, dont la détermination est précisément l'objet de notre problème, remplaçons-les par les signes: $a$, $\overset{1}{a}$, $\overset{2}{a}$, $\overset{3}{a}$, $\cdots$, de sorte que nous ayons:

$$\varphi x = a + xf(\overset{1}{a} + xf(\overset{2}{a} + xf(\overset{3}{a} + \cdots\cdots))).$$

Faisons ensuite:

$$\begin{aligned}\varphi x = y\,(=\overset{0}{y}) &= a + xf\overset{1}{y}\\ \overset{1}{y} &= \overset{1}{a} + xf\overset{2}{y}\\ \overset{2}{y} &= \overset{2}{a} + xf\overset{3}{y}\\ &\cdot\quad\cdot\\ &\cdot\quad\cdot\\ &\cdot\quad\cdot\end{aligned}$$

et généralement:

$$\overset{n}{y} = \overset{n}{a} + xf\overset{n+1}{y}.$$

équations, dans lesquelles tant les $y, \overset{1}{y}, \overset{2}{y}, \overset{3}{y}, \cdots\cdots$ que les $f\overset{1}{y}, f\overset{2}{y}, f\overset{3}{y}, \cdots\cdots$ devront être envisagées comme autant de fonctions de la variable indépendante $x$.

Cela posé, il est évident, qu'en désignant par $\overset{n}{y}_0$ et $f\overset{n}{y}_0$ les valeurs particulières que prennent les fonctions $\overset{n}{y}$ et $f\overset{n}{y}$ pour $x = o$, on aura:

$$\begin{aligned}a &= y_0 = \varphi\ \text{(c'est-à-dire: } \varphi o)\\ \overset{1}{a} &= \overset{1}{y}_0 = \mathfrak{f}\left(\frac{y-a}{x}\right)_0\\ \overset{2}{a} &= \overset{2}{y}_0 = \mathfrak{f}\left(\frac{\overset{1}{y}-\overset{1}{a}}{x}\right)_0\\ \overset{3}{a} &= \overset{3}{y}_0 = \mathfrak{f}\left(\frac{\overset{2}{y}-\overset{2}{a}}{x}\right)_0.\\ &\cdot\quad\cdot\quad\cdot\\ &\cdot\quad\cdot\quad\cdot\\ &\cdot\quad\cdot\quad\cdot\\ \overset{n}{a} &= \overset{n}{y}_0 = \mathfrak{f}\left(\frac{\overset{n-1}{y}-\overset{n-1}{a}}{x}\right)_0\end{aligned}$$

où la caractéristique $\mathfrak{f}$ doit marquer *l'opération inverse*, ou opposée à celle, par laquelle se forme la fonction donnée $f$, de sorte que, si $y = fx$, on ait $x = \mathfrak{f}y$, ou bien $f(\mathfrak{f}x) = x$.

3) Observons d'abord que, puisque les expressions $\frac{y-a}{x}$, $\frac{\overset{1}{y}-\overset{1}{a}}{x}$, $\frac{\overset{2}{y}-\overset{2}{a}}{x}$, etc. prennent, pour le cas $x=o$, la valeur indéterminée $\frac{0}{0}$ (à cause de $\overset{n}{y}_0=\overset{n}{a}$), il faudra leur substituer les quotiens des différentielles de leurs numérateurs et de leurs dénominateurs et puis y faire $x=o$, ce qui fournit:

$$\overset{1}{a}=\mathrm{f}\,y'_0$$
$$\overset{2}{a}=\mathrm{f}\,\overset{1}{y}{}'_0$$
$$\overset{3}{a}=\mathrm{f}\,\overset{2}{y}{}'_0$$
$$\cdot\quad\cdot$$
$$\cdot\quad\cdot$$
$$\cdot\quad\cdot$$
$$\overset{n}{a}=\mathrm{f}\,\overset{n-1}{y}{}'_0.$$

Maintenant, puisque généralement $\overset{n}{y}=\mathrm{f}\,\frac{\overset{n-1}{y}-\overset{n-1}{a}}{x}$, faisons-y, pour abréger, $\frac{\overset{n-1}{y}-\overset{n-1}{a}}{x}=Fx$, et le théorème établi dans nos *Recherches sur la transformation des fonctions* (T. I. p. 181 et 583) nous conduira immédiatement à cette relation:

$$\frac{\overset{n}{y}{}^{\mu}}{n!}=S\left[\frac{(\overset{1}{\alpha}+\overset{2}{\alpha}+\cdots+\overset{m}{\alpha})!}{\overset{1}{\alpha}!\;\overset{2}{\alpha}!\cdots\overset{m}{\alpha}!}\;\frac{\mathrm{f}^{\overset{1}{\alpha}+\overset{2}{\alpha}+\cdots+\overset{m}{\alpha}}(Fx)}{(\overset{1}{\alpha}+\overset{2}{\alpha}+\cdots+\overset{m}{\alpha})!}\left(\frac{F'x}{1!}\right)^{\overset{1}{\alpha}}\left(\frac{F''x}{2!}\right)^{\overset{2}{\alpha}}\cdots\cdots\left(\frac{F^{\mu}x}{m!}\right)^{\overset{m}{\alpha}}\right].$$

$$\overset{1}{\alpha}+2\overset{2}{\alpha}+\cdots\cdots+m\overset{m}{\alpha}=m$$

Mais comme:

$$F'x=\frac{x\cdot\overset{n-1}{y}{}'-\overset{n-1}{y}+\overset{n-1}{a}}{x^2}$$

$$\frac{F''x}{2!}=\frac{x^2\cdot\frac{\overset{n-1}{y}{}''}{2!}-x\cdot\frac{\overset{n-1}{y}}{1!}+\overset{n-1}{y}-\overset{n-1}{a}}{x^3}$$

$$\frac{F'''x}{3!}=\frac{x^3\cdot\frac{\overset{n-1}{y}{}'''}{3!}-x^2\cdot\frac{\overset{n-1}{y}{}''}{2!}+x\cdot\frac{\overset{n-1}{y}{}'}{1!}-\overset{n-1}{y}+\overset{n-1}{a}}{x^4}$$

et généralement:

$$\frac{F^{\mu}x}{m!} = \frac{\underset{\mathfrak{a}+\mathfrak{b}=m}{S}\left[(-1)^{m+\mathfrak{a}}x^{\mathfrak{a}}\cdot\frac{\overset{n-1}{y}{}^{\mathfrak{a}}}{\mathfrak{a}!}\right] - (-1)^{m}\,\overset{n-1}{a}}{x^{m+1}}$$

et, qu'en formant le quotient des différentielles du dividende et du diviseur de cette dernière expression, on en tire:

$$\frac{\underset{\mathfrak{a}+\mathfrak{b}=m}{S}\left[(-1)^{m+\mathfrak{a}}\left(\mathfrak{a}x^{\mathfrak{a}-1}\frac{\overset{n-1}{y}{}^{\mathfrak{a}}}{\mathfrak{a}!} + x^{\mathfrak{a}}\cdot\frac{\overset{n-1}{y}{}^{\mathfrak{a}+1}}{\mathfrak{a}!}\right)\right]}{(m+1)\,x^{m}} =$$

$$\frac{\underset{\mathfrak{a}+\mathfrak{b}=m-1}{S}\left[(-1)^{m+\mathfrak{a}+1}(\mathfrak{a}+1)\,x^{\mathfrak{a}}\cdot\frac{\overset{n-1}{y}{}^{\mathfrak{a}+1}}{(\mathfrak{a}+1)!} + (-1)^{m+\mathfrak{a}}\,x^{\mathfrak{a}}\cdot\frac{\overset{n-1}{y}{}^{\mathfrak{a}+1}}{\mathfrak{a}!}\right] + x^{m}\cdot\frac{\overset{n-1}{y}{}^{\mu+1}}{m!}}{(m+1)\,x^{m}} =$$

$$\frac{\underset{\mathfrak{a}+\mathfrak{b}=m-1}{S}\left[-(-1)^{m+\mathfrak{a}}\,x^{\mathfrak{a}}\cdot\frac{\overset{n-1}{y}{}^{\mathfrak{a}+1}}{\mathfrak{a}!} + (-1)^{m+\mathfrak{a}}\,x^{\mathfrak{a}}\cdot\frac{\overset{n-1}{y}{}^{\mathfrak{a}+1}}{\mathfrak{a}!}\right] + x^{m}\cdot\frac{\overset{n-1}{y}{}^{\mu+1}}{m!}}{(m+1)\,x^{m}} = \frac{x^{m}\cdot\frac{\overset{n-1}{y}{}^{\mu+1}}{m!}}{(m+1)\,x^{m}}$$

$= \dfrac{\overset{n-1}{y}{}^{\mu+1}}{(m+1)!}$, et partant $\dfrac{F^{\mu}{}_{0}}{m!} = \dfrac{\overset{n-1}{y}{}_{0}^{\mu+1}}{(m+1)!}$, nous aurons pour $x = o$:

$$(A)\quad \frac{\overset{n}{y}{}^{\mu}}{m!} = S\left[\frac{(\overset{1}{\mathfrak{a}}+\cdots+\overset{m}{\mathfrak{a}})!}{\overset{1}{\mathfrak{a}}!\cdots\cdots\overset{m}{\mathfrak{a}}!}\;\frac{\mathfrak{f}^{\overset{1}{\mathfrak{a}}+\cdots+\overset{m}{\mathfrak{a}}}(\overset{n-1}{y'}_{0})}{(\overset{1}{\mathfrak{a}}+\cdots\cdots+\overset{m}{\mathfrak{a}})!}\left(\frac{\overset{n-1}{y'}_{0}}{2!}\right)^{\overset{1}{\mathfrak{a}}}\left(\frac{\overset{n-1}{y''}_{0}}{3!}\right)^{\overset{2}{\mathfrak{a}}}\cdots\left(\frac{\overset{n-1}{y}{}_{0}^{\mu+1}}{(m+1)!}\right)^{\overset{m}{\mathfrak{a}}}\right]$$

$$\overset{1}{\mathfrak{a}}+2\overset{2}{\mathfrak{a}}+3\overset{3}{\mathfrak{a}}+\cdots+m\overset{m}{\mathfrak{a}}=m.$$

4) Puisque $\dfrac{\overset{0}{y}{}^{\mu}}{m!} = \dfrac{\varphi^{\mu}}{m!}$ (No. 2), l'équation (*A*) nous fournit d'abord les valeurs suivantes:

$$\frac{\overset{1}{y'}_{0}}{1!} = \mathfrak{f}'\varphi'\cdot\frac{\varphi''}{2!}$$

$$\frac{\overset{2}{y''}_{0}}{2!} = \frac{\mathfrak{f}''\varphi'}{2!}\left(\frac{\varphi''}{2!}\right)^{2} + \mathfrak{f}'\varphi'\cdot\frac{\varphi'''}{3!}$$

$$\frac{\overset{1}{y}{}'''_{0}}{3!} = \frac{f'''\varphi'}{3!}\left(\frac{\varphi''}{2!}\right)^{3} + 2\,\frac{f''\varphi'}{2!}\cdot\frac{\varphi''}{2!}\,\frac{\varphi'''}{3!} + f'\varphi'\cdot\frac{\varphi^{IV}}{4!}$$

$$\frac{\overset{1}{y}{}^{IV}_{0}}{4!} = \frac{f^{IV}\varphi'}{4!}\left(\frac{\varphi''}{2!}\right)^{4} + 3\,\frac{f'''\varphi'}{3!}\left(\frac{\varphi''}{2!}\right)^{2}\frac{\varphi'''}{3!} + \frac{f''\varphi'}{2!}\left[\left(\frac{\varphi'''}{3!}\right)^{2} + 2\,\frac{\varphi''}{2!}\,\frac{\varphi^{IV}}{4!}\right] + f'\varphi'\cdot\frac{\varphi^{V}}{5!}$$

$$\frac{\overset{1}{y}{}^{V}_{0}}{5!} = \frac{f^{V}\varphi'}{5!}\left(\frac{\varphi''}{2!}\right)^{5} + 4\,\frac{f^{IV}\varphi'}{4!}\left(\frac{\varphi''}{2!}\right)^{3}\frac{\varphi'''}{3!} + \frac{f'''\varphi'}{3!}\left[3\,\frac{\varphi''}{2!}\left(\frac{\varphi'''}{3!}\right)^{2} + 3\left(\frac{\varphi''}{2!}\right)^{2}\frac{\varphi^{IV}}{4!}\right]$$
$$+ \frac{f''\varphi'}{2!}\left[2\,\frac{\varphi'''}{3!}\,\frac{\varphi^{IV}}{4!} + 2\,\frac{\varphi''}{2!}\,\frac{\varphi^{V}}{5!}\right] + f'\varphi'\cdot\frac{\varphi^{IV}}{6!}$$

$$\frac{\overset{1}{y}{}^{VI}_{0}}{6!} = \frac{f^{IV}\varphi'}{6!}\left(\frac{\varphi''}{2!}\right)^{6} + 5\,\frac{f^{V}\varphi'}{5!}\left(\frac{\varphi''}{2!}\right)^{4}\frac{\varphi'''}{3!} + \frac{f^{IV}\varphi'}{4!}\left[6\left(\frac{\varphi''}{2!}\right)^{2}\left(\frac{\varphi'''}{3!}\right)^{2} + 4\left(\frac{\varphi''}{2!}\right)^{3}\frac{\varphi^{IV}}{4!}\right]$$
$$+ \frac{f'''\varphi'}{3!}\left[\left(\frac{\varphi'''}{3!}\right)^{3} + 6\,\frac{\varphi''}{2!}\,\frac{\varphi'''}{3!}\,\frac{\varphi^{IV}}{4!} + 3\left(\frac{\varphi''}{2!}\right)^{2}\frac{\varphi^{V}}{5!}\right] + \frac{f''\varphi'}{2!}\left[\left(\frac{\varphi^{IV}}{4!}\right)^{2} + 2\,\frac{\varphi'''}{3!}\,\frac{\varphi^{V}}{5!}\right.$$
$$\left.+ 2\,\frac{\varphi''}{2!}\,\frac{\varphi^{IV}}{6!}\right] + f'\varphi'\cdot\frac{\varphi^{VII}}{7!}$$

$$\frac{\overset{1}{y}{}^{VII}_{0}}{7!} = \frac{f^{VII}\varphi'}{7!}\left(\frac{\varphi''}{2!}\right)^{7} + 6\,\frac{f^{VI}\varphi'}{6!}\left(\frac{\varphi''}{2!}\right)^{6}\frac{\varphi'''}{3!} + \frac{f^{V}\varphi'}{5!}\left[10\left(\frac{\varphi''}{2!}\right)^{3}\left(\frac{\varphi'''}{3!}\right)^{2} + 5\left(\frac{\varphi''}{2!}\right)^{4}\frac{\varphi^{IV}}{4!}\right]$$
$$+ \frac{f^{IV}\varphi'}{4!}\left[4\,\frac{\varphi''}{2!}\left(\frac{\varphi'''}{3!}\right)^{3} + 12\left(\frac{\varphi''}{2!}\right)^{2}\frac{\varphi'''}{3!}\,\frac{\varphi^{IV}}{4!} + 4\left(\frac{\varphi''}{2!}\right)^{3}\frac{\varphi^{V}}{5!}\right] + \frac{f'''\varphi'}{3!}\left[3\left(\frac{\varphi'''}{3!}\right)^{2}\frac{\varphi^{IV}}{4!}\right.$$
$$+ 3\,\frac{\varphi''}{2!}\left(\frac{\varphi^{IV}}{4!}\right)^{2} + 6\,\frac{\varphi''}{2!}\,\frac{\varphi'''}{3!}\,\frac{\varphi^{V}}{5!} + \left.3\left(\frac{\varphi''}{2!}\right)^{2}\frac{\varphi^{VI}}{6!}\right] + \frac{f''\varphi'}{2!}\left[2\,\frac{\varphi^{IV}}{4!}\,\frac{\varphi^{V}}{5!} + 2\,\frac{\varphi'''}{3!}\,\frac{\varphi^{VI}}{6!}\right.$$
$$\left.+ 2\,\frac{\varphi''}{2!}\,\frac{\varphi^{VII}}{7!}\right] + f'\varphi'\cdot\frac{\varphi^{VIII}}{8!}$$

$$\frac{\overset{1}{y}{}^{VIII}_{0}}{8!} = \frac{f^{VIII}\varphi'}{8!}\left(\frac{\varphi''}{2!}\right)^{8} + 7\,\frac{f^{VII}\varphi'}{7!}\left(\frac{\varphi''}{2!}\right)^{6}\frac{\varphi'''}{3!} + \frac{f^{VI}\varphi'}{6!}\left[6\left(\frac{\varphi''}{2!}\right)^{5}\frac{\varphi^{IV}}{4!} + 15\left(\frac{\varphi''}{2!}\right)^{4}\left(\frac{\varphi'''}{3!}\right)^{2}\right]$$
$$+ \frac{f^{V}\varphi'}{5!}\left[5\left(\frac{\varphi''}{2!}\right)^{4}\frac{\varphi^{V}}{5!} + 20\left(\frac{\varphi''}{2!}\right)^{3}\frac{\varphi'''}{3!}\,\frac{\varphi^{IV}}{4!} + 10\left(\frac{\varphi''}{2!}\right)^{2}\left(\frac{\varphi'''}{3!}\right)^{3}\right] + \frac{f^{IV}\varphi'}{4!}\left[4\left(\frac{\varphi''}{2!}\right)^{3}\frac{\varphi^{VI}}{6!}\right.$$
$$\left.+ 12\left(\frac{\varphi''}{2!}\right)^{2}\frac{\varphi'''}{3!}\,\frac{\varphi^{V}}{5!} + 6\left(\frac{\varphi''}{2!}\right)^{2}\left(\frac{\varphi^{IV}}{4!}\right)^{2} + 12\,\frac{\varphi''}{2!}\left(\frac{\varphi'''}{3!}\right)^{2}\frac{\varphi^{IV}}{4!} + \left(\frac{\varphi'''}{3!}\right)^{4}\right]$$
$$+ \frac{f'''\varphi'}{3!}\left[3\left(\frac{\varphi''}{2!}\right)^{2}\frac{\varphi^{VII}}{7!} + 6\,\frac{\varphi''}{2!}\,\frac{\varphi'''}{3!}\,\frac{\varphi^{IV}}{6!} + 6\,\frac{\varphi''}{2!}\,\frac{\varphi^{IV}}{4!}\,\frac{\varphi^{V}}{5!} + 3\left(\frac{\varphi'''}{3!}\right)^{2}\frac{\varphi^{V}}{5!}\right.$$
$$\left.+ 3\,\frac{\varphi'''}{3!}\left(\frac{\varphi^{IV}}{4!}\right)^{2}\right] + \frac{f''\varphi'}{2!}\left[2\,\frac{\varphi''}{2!}\,\frac{\varphi^{VIII}}{8!} + 2\,\frac{\varphi'''}{3!}\,\frac{\varphi^{VII}}{7!} + 2\,\frac{\varphi^{IV}}{4!}\,\frac{\varphi^{VI}}{6!} + \left(\frac{\varphi^{V}}{5!}\right)^{2}\right]$$
$$+ f'\varphi'\cdot\frac{\varphi^{IX}}{9!}$$

etc. etc. etc.

Or, comme $\overset{1}{a} = \mathfrak{f}\varphi'$ et $\overset{2}{a} = \mathfrak{f}\overset{1}{y}'_0 = \mathfrak{f}\left(\mathfrak{f}'\varphi' \cdot \frac{\varphi''}{2!}\right)$, et qu'en vertu de la formule $(A)$

$$\frac{\overset{2}{y}{}^{\mu}_0}{m!} = S\left[\frac{(\overset{1}{\mathfrak{a}} + \cdots + \overset{m}{\mathfrak{a}})!}{\overset{1}{\mathfrak{a}}! \cdot \cdot \cdot \overset{m}{\mathfrak{a}}!} \frac{\mathfrak{f}^{\overset{1}{\mathfrak{a}} + \overset{2}{\mathfrak{a}} + \cdots + \overset{m}{\mathfrak{a}}}(\overset{1}{y}'_0)}{(\overset{1}{\mathfrak{a}} + \cdots\cdots + \overset{m}{\mathfrak{a}})!} \left(\frac{\overset{1}{y}''_0}{2!}\right)^{\overset{1}{\mathfrak{a}}} \left(\frac{\overset{1}{y}'''_0}{3!}\right)^{\overset{2}{\mathfrak{a}}} \cdots \left(\frac{\overset{1}{y}{}_0^{\mu+1}}{(m+1)!}\right)^{\overset{m+1}{\mathfrak{a}}}\right]$$

$$\overset{1}{\mathfrak{a}} + 2\overset{2}{\mathfrak{a}} + \cdots + m\overset{m}{\mathfrak{a}} = m$$

$$\frac{\overset{3}{y}{}^{\mu}}{m!} = S\left[\frac{(\overset{1}{\mathfrak{a}} + \cdots + \overset{m}{\mathfrak{a}})!}{\overset{1}{\mathfrak{a}}! \cdots\cdots \overset{m}{\mathfrak{a}}!} \frac{\mathfrak{f}^{\overset{1}{\mathfrak{a}} + \cdots + \overset{m}{\mathfrak{a}}}(\overset{2}{y}'_0)}{(\overset{1}{\mathfrak{a}} + \cdots + \overset{m}{\mathfrak{a}})!} \left(\frac{\overset{2}{y}''_0}{2!}\right)^{\overset{1}{\mathfrak{a}}} \left(\frac{\overset{2}{y}'''_0}{3!}\right)^{\overset{2}{\mathfrak{a}}} \cdots\cdot \left(\frac{\overset{2}{y}{}_0^{\mu+1}}{(m+1)!}\right)^{\overset{m+1}{\mathfrak{a}}}\right]$$

$$\overset{1}{\mathfrak{a}} + 2\overset{2}{\mathfrak{a}} + \cdots + m\overset{m}{\mathfrak{a}} = m$$

et ainsi de suite, on n'a, pour trouver successivement $\overset{3}{a}$, $\overset{4}{a}$, $\overset{5}{a}$, etc., qu'à substituer dans l'équation $\overset{2}{a} = \mathfrak{f}\left(\mathfrak{f}'\varphi' \cdot \frac{\varphi''}{2!}\right)$, $\mathfrak{f}'\varphi' \cdot \frac{\varphi''}{2!}$ à $\varphi'$ et $\frac{\mathfrak{f}''\varphi'}{2!}\left(\frac{\varphi''}{2!}\right)^2 + \mathfrak{f}'\varphi' \cdot \frac{\varphi'''}{3!}$ à $\frac{\varphi''}{2!}$, et puis dans l'expression trouvée de cette manière pour $\overset{3}{a}$, encore $\mathfrak{f}'\varphi' \cdot \frac{\varphi''}{2!}$ à $\varphi'$, $\frac{\mathfrak{f}''\varphi'}{2!}\left(\frac{\varphi''}{2!}\right)^2 + \mathfrak{f}'\varphi' \cdot \frac{\varphi'''}{3!}$ à $\frac{\varphi''}{2!}$ et $\frac{\mathfrak{f}'''\varphi'}{3!}\left(\frac{\varphi''}{2!}\right)^3 + 2\,\frac{\mathfrak{f}''\varphi'}{2!} \cdot \frac{\varphi''}{2!}\frac{\varphi'''}{3!} + \mathfrak{f}'\varphi' \cdot \frac{\varphi^{IV}}{4!}$ à $\frac{\varphi'''}{3!}$, etc. etc. — C'est ainsi que dans chaque cas particulier on parviendra à déterminer les constantes $a$, $\overset{1}{a}$, $\overset{2}{a}$, etc. et à effectuer par-là le développement exigé de la fonction $\varphi x$.

5) Si $fx = x$, on aura $\mathfrak{f}x = x$, $\mathfrak{f}'x = 1$, $\frac{\mathfrak{f}''x}{2!} = \frac{\mathfrak{f}'''x}{3!} = \frac{\mathfrak{f}^{IV}x}{4!}$ etc. $= 0$, et par conséquent:

$$a = \varphi$$
$$\overset{1}{a} = \varphi'$$
$$\overset{2}{a} = \frac{\varphi''}{2!}$$
$$\overset{3}{a} = \frac{\varphi'''}{3!}$$
etc.

c'est-à-dire: $\varphi x = \varphi + \varphi' \cdot x + \frac{\varphi''}{2!} \cdot x^2 + \frac{\varphi'''}{3!} \cdot x^3 + \cdots\cdot$, ce qui n'est autre chose que le développement de MACLAURIN.

6) Soit, en second lieu, $fx = \frac{1}{x}$, on trouvera:

$$\mathfrak{f}x = \frac{1}{x},\ \mathfrak{f}'x = -\frac{1}{x^2},\ \frac{\mathfrak{f}''x}{2!} = \frac{1}{x^3},\ \frac{\mathfrak{f}'''x}{3!} = -\frac{1}{x^4},\ \frac{\mathfrak{f}^{IV}x}{4!} = \frac{1}{x^5},\ \text{etc.}$$

ce qui fournira:

$$a = \varphi$$

$$\overset{1}{a} = \frac{1}{\varphi'}$$

$$\overset{2}{a} = -\varphi'^2 : \frac{\varphi''}{2!}$$

$$\overset{3}{a} = -\left(\frac{\varphi''}{2!}\right)^2 : \varphi'\left[\left(\frac{\varphi''}{2!}\right)^2 - \varphi'\cdot\frac{\varphi'''}{3}\right]$$

$$\overset{4}{a} = \left[\left(\frac{\varphi''}{2!}\right)^2 - \varphi'\cdot\frac{\varphi'''}{3!}\right]^2 : \frac{\varphi''}{2!}\left[\left(\frac{\varphi'''}{3!}\right)^2 - \frac{\varphi''}{2!}\cdot\frac{\varphi^{IV}}{4!}\right]$$

$$\overset{5}{a} = -\left[\left(\frac{\varphi'''}{3!}\right)^2 - \frac{\varphi''}{2!}\frac{\varphi^{IV}}{4!}\right]^2 : \left[\left(\frac{\varphi'}{2!}\right)^2 - \varphi'\frac{\varphi'''}{3!}\right]\left[-\left(\frac{\varphi'''}{3!}\right)^3 + 2\frac{\varphi''}{2!}\frac{\varphi'''}{3!}\frac{\varphi^{IV}}{4!} - \left(\frac{\varphi''}{2!}\right)^2\frac{\varphi^{V}}{5!}\right.$$
$$\left. - \varphi'\left[\left(\frac{\varphi^{IV}}{4!}\right)^2 - \frac{\varphi'''}{3!}\frac{\varphi^{V}}{5!}\right]\right]$$

$$\overset{6}{a} = \left[-\left(\frac{\varphi'''}{3!}\right)^3 + 2\frac{\varphi''}{2!}\frac{\varphi'''}{3!}\frac{\varphi^{IV}}{4!} - \left(\frac{\varphi'}{2!}\right)^2\frac{\varphi^{V}}{5!} - \varphi'\left[\left(\frac{\varphi^{IV}}{4!}\right)^2 - \frac{\varphi'''}{3!}\frac{\varphi^{V}}{5!}\right]\right]^2 : \left[\left(\frac{\varphi''}{3!}\right)^2 - \frac{\varphi''}{2!}\frac{\varphi^{IV}}{4!}\right]$$
$$\times\left[-\left(\frac{\varphi^{IV}}{4!}\right)^3 + 2\frac{\varphi'''}{3!}\frac{\varphi^{IV}}{4!}\frac{\varphi^{V}}{5!} - \left(\frac{\varphi'''}{3!}\right)^2\frac{\varphi^{VI}}{6!} - \frac{\varphi''}{2!}\left[\left(\frac{\varphi^{V}}{5!}\right)^2 - \frac{\varphi^{IV}}{4!}\frac{\varphi^{VI}}{6!}\right]\right]$$

$$\overset{7}{a} = \left[-\left(\frac{\varphi^{IV}}{4!}\right)^3 + 2\frac{\varphi'''}{3!}\frac{\varphi^{IV}}{4!}\frac{\varphi^{V}}{5!} - \left(\frac{\varphi'''}{3!}\right)^2\frac{\varphi^{VI}}{6!} - \frac{\varphi''}{2!}\left[\left(\frac{\varphi^{V}}{5!}\right)^2 - \frac{\varphi^{IV}}{4!}\frac{\varphi^{VI}}{6!}\right]\right]^2 :$$
$$\left[-\left(\frac{\varphi'''}{3!}\right)^3 + 2\frac{\varphi''}{2!}\frac{\varphi'''}{3!}\frac{\varphi^{IV}}{4!} - \left(\frac{\varphi''}{2!}\right)^2\frac{\varphi^{V}}{5!} - \varphi'\left[\left(\frac{\varphi^{IV}}{4!}\right)^2 - \frac{\varphi'''}{3!}\frac{\varphi^{V}}{5!}\right]\right]$$
$$\times\left[-\left(\frac{\varphi^{IV}}{4!}\right)^4 + \left[3\frac{\varphi'''}{3!}\frac{\varphi^{V}}{5!} + 2\frac{\varphi''}{2!}\frac{\varphi^{VI}}{6!}\right]\left(\frac{\varphi^{IV}}{4!}\right)^2 - \left[2\left(\frac{\varphi'''}{3!}\right)^2\frac{\varphi^{VI}}{6!} + 2\frac{\varphi''}{2!}\left(\frac{\varphi^{V}}{5!}\right)^2\right.\right.$$
$$\left. + 2\frac{\varphi''}{2!}\frac{\varphi'''}{3!}\frac{\varphi^{VII}}{7!}\right]\frac{\varphi^{IV}}{4!} + \left(\frac{\varphi'''}{3!}\right)^3\frac{\varphi^{VII}}{7!} + 2\frac{\varphi''}{2!}\frac{\varphi'''}{3!}\frac{\varphi^{V}}{5!}\frac{\varphi^{VI}}{6!} - \left(\frac{\varphi'''}{3!}\right)^2\left(\frac{\varphi^{V}}{5!}\right)^2 - \varphi'\left[-\left(\frac{\varphi^{V}}{5!}\right)^3\right.$$
$$\left.\left. + 2\frac{\varphi^{IV}}{4!}\frac{\varphi^{V}}{5!}\frac{\varphi^{VI}}{6!} - \left(\frac{\varphi^{IV}}{4!}\right)^2\frac{\varphi^{VII}}{7!}\right] - \left[\left(\frac{\varphi''}{2!}\right)^2 - \varphi'\frac{\varphi'''}{3!}\right]\left[\left(\frac{\varphi^{VI}}{6!}\right)^2 - \frac{\varphi^{V}}{5!}\frac{\varphi^{VII}}{7!}\right]\right]$$

etc. etc. etc.

Telles seront les valeurs des constantes $a$, $\overset{1}{a}$, $\overset{2}{a}$, etc. dans le développement d'une fonction $\varphi x$ en fraction continue, ou dans l'équation:

$$\varphi x = a + \cfrac{x}{\overset{1}{a} + \cfrac{x}{\overset{2}{a} + \cfrac{x}{\overset{3}{a} + \text{etc.}}}}$$

Si, par exemple, $\varphi x = \sqrt{\left(1 + \frac{x}{n}\right)}$, on trouvera: $a = 1$, $\overset{1}{a} = 2n$, $\overset{2}{a} = 2$, $\overset{3}{a} = 2n$, $\overset{4}{a} = 2$, $\overset{5}{a} = 2n$, $\overset{6}{a} = 2$, $\overset{7}{a} = 2n$, etc. et partant:

$$\sqrt{\left(1 + \frac{x}{n}\right)} = 1 + \cfrac{x}{2n + \cfrac{x}{2 + \cfrac{x}{2n + \cfrac{x}{2 + \cfrac{x}{2n + \text{etc.}}}}}}$$

7) Soit, en troisième lieu, $fx = \sqrt{x}$, ce qui donne: $\mathfrak{f}x = x^2$, $\mathfrak{f}'x = 2x$, $\frac{\mathfrak{f}''x}{2!} = 1$, $\frac{\mathfrak{f}'''x}{3!} = \frac{\mathfrak{f}^{IV}x}{4!}$ etc. $= o$. On aura par les formules du N°. 4:

$$a = \varphi$$

$$\overset{1}{a} = \varphi'^2$$

$$\overset{2}{a} = 4\overset{1}{a}\left(\frac{\varphi''}{2!}\right)^2$$

$$\overset{3}{a} = 4\overset{2}{a}\left[\left(\frac{\varphi''}{2!}\right)^2 + 2\varphi'\frac{\varphi'''}{3!}\right]^2$$

$$\overset{4}{a} = 4\overset{3}{a}\left[\left(\frac{\varphi''}{2!}\right)^4 + 12\varphi'\left(\frac{\varphi''}{2!}\right)^2\frac{\varphi'''}{3!} + 8\varphi'^2\frac{\varphi''}{2!}\frac{\varphi^{IV}}{4!} + 4\varphi'^2\left(\frac{\varphi'''}{3!}\right)^2\right]^2$$

$$\overset{5}{a} = 4\overset{4}{a}\left[\left(\frac{\varphi''}{2!}\right)^8 + 56\varphi'\left(\frac{\varphi''}{2!}\right)^6\frac{\varphi'''}{3!} + 112\varphi'^2\left(\frac{\varphi''}{2!}\right)^5\frac{\varphi^{IV}}{4!} + 312\varphi'^2\left(\frac{\varphi''}{2!}\right)^4\left(\frac{\varphi'''}{3!}\right)^2\right.$$
$$\left. + 64\varphi'^3\left(\frac{\varphi''}{2!}\right)^4\frac{\varphi^{V}}{5!} + 448\varphi'^3\left(\frac{\varphi''}{2!}\right)^3\frac{\varphi'''}{3!}\frac{\varphi^{IV}}{4!} + 288\varphi'^3\left(\frac{\varphi''}{2!}\right)^2\left(\frac{\varphi'''}{3!}\right)^3\right.$$

*

$$+128\,\varphi'^4\left(\frac{\varphi''}{2!}\right)^2\frac{\varphi'''}{3!}\frac{\varphi^{V}}{5!}+64\,\varphi'^4\left(\frac{\varphi''}{2!}\right)^2\left(\frac{\varphi^{IV}}{4!}\right)^2+192\,\varphi'^4\,\varphi''\,\varphi'''^2\,\varphi^{IV}$$

$$+16\,\varphi'^4\left(\frac{\varphi'''}{3!}\right)^4\Big]^2$$

etc. etc. etc.

et $\varphi x = a + x\,\sqrt{(\overset{1}{a} + x\,\sqrt{(\overset{2}{a} + x\,\sqrt{(\overset{3}{a} + \text{etc.}))})}}$

Ainsi, par exemple, en supposant $\varphi x = b + \frac{1}{2}x^2 + x\sqrt{(b + \frac{1}{4}x^2)}$, on obtiendra $a = \overset{1}{a} = \overset{2}{a} = \overset{3}{a} = \overset{4}{a}$ etc. $= b$, et par conséquent:

$$b + \tfrac{1}{2}x^2 + x\sqrt{(b+\tfrac{1}{4}x^2)} = b + x\sqrt{(b + x\sqrt{(b + x\sqrt{(b + \text{etc.}))})}}$$

8) On a, en vertu du N°. 2:

$$\overset{n}{y} = \overset{n}{a} + xf\overset{n+1}{y}$$

d'où l'on tire:

$$\overset{n}{y}' = f\overset{n+1}{y} + x\,\frac{d\,(f\overset{n+1}{y})}{dx} = f'\overset{n+1}{y} + x\,f'\overset{n+1}{y}\cdot\overset{n+1}{y}'$$

$$\overset{n}{y}'' = 2\,\frac{d\,(f\overset{n+1}{y})}{dx} + x\,\frac{d^2\,(f\overset{n+1}{y})}{dx^2}$$

$$\overset{n}{y}''' = 3\,\frac{d^2\,(f\overset{n+1}{y})}{dx^2} + x\,\frac{d^3\,(f\overset{n+1}{y})}{dx^3}$$

et généralement:

$$\overset{n}{y}^{\mu} = m\,\frac{d^{m-1}\,(f\overset{n+1}{y})}{dx^{m-1}} + x\,\frac{d^m\,(f\overset{n+1}{y})}{dx^m}$$

donc, pour $x = o$:

$$\overset{n}{y}_0{}^{\mu} = m\,\frac{d^{m-1}\,(f\overset{n+1}{y})}{dx^{m-1}}$$

ou bien:

$$\frac{\overset{n}{y}_0{}^{\mu}}{m!} = \frac{d^{m-1}\,(f\overset{n+1}{y})}{(m-1)!\,dx^{m-1}}$$

ce qui donne par le théorème sus-mentionné:

$$(B)\ \frac{\overset{n}{y}_0{}^{\mu}}{m!} = S\left[\frac{(\overset{1}{a}+\overset{2}{a}+\dots+\overset{m-1}{a})!}{\overset{1}{a}!\,\overset{2}{a}!\,\dots\dots\overset{m-1}{a}!}\;\frac{f^{\overset{1}{a}+\dots+\overset{m-1}{a}}\,\overset{n+1}{y}_0}{(\overset{1}{a}+\dots+\overset{m-1}{a})!}\,(\overset{n+1}{y}'_0)^{\overset{1}{a}}\left(\frac{\overset{n+1}{y}''_0}{2!}\right)^{\overset{2}{a}}\left(\frac{\overset{n+1}{y}'''_0}{3!}\right)^{\overset{3}{a}}\cdot\cdot\left(\frac{\overset{n+1}{y}_0{}^{\mu-1}}{(m-1)!}\right)^{\overset{m-1}{a}}\right]$$

$$\overset{1}{a} + 2\overset{2}{a} + 3\overset{3}{a} + \dots\dots + (m-1)\overset{m-1}{a} = m - 1$$

Cette équation, étant particularisée pour les sept premiers cas, nous fournit les valeurs suivantes:

$$\overset{n}{y}'_0 = f\overset{n+1}{y}_0$$

$$\frac{\overset{n}{y}''_0}{2!} = f'\overset{n+1}{y}_0 \cdot \overset{n+1}{y}'_0$$

$$\frac{\overset{n}{y}'''_0}{3!} = \frac{f''\overset{n+1}{y}_0}{2!} \cdot (\overset{n+1}{y}'_0)^2 + f'\overset{n+1}{y}_0 \cdot \frac{\overset{n+1}{y}''_0}{2!}$$

$$\frac{\overset{n}{y}^{IV}_0}{4!} = \frac{f'''\overset{n+1}{y}_0}{3!} (\overset{n+1}{y}'_0)^3 + 2\frac{f''\overset{n+1}{y}_0}{2!} \overset{n+1}{y}'_0 \cdot \frac{\overset{n+1}{y}''_0}{2!} + f'\overset{n+1}{y}_0 \cdot \frac{\overset{n+1}{y}'''_0}{3!}$$

$$\frac{\overset{n}{y}^{V}_0}{5!} = \frac{f^{IV}\overset{n+1}{y}_0}{4!} (\overset{n+1}{y}'_0)^4 + 3\frac{f'''\overset{n+1}{y}_0}{3!} (\overset{n+1}{y}'_0)^2 \frac{\overset{n+1}{y}''_0}{2!} + \frac{f''\overset{n+1}{y}_0}{2!} \left[\left(\frac{\overset{n+1}{y}''_0}{2!}\right)^2 + 2\overset{n+1}{y}'_0 \cdot \frac{\overset{n+1}{y}'''_0}{3!}\right]$$

$$+ f'\overset{n+1}{y}_0 \cdot \frac{\overset{n+1}{y}^{IV}_0}{4!}$$

$$\frac{\overset{n}{y}^{VI}_0}{6!} = \frac{f^{V}\overset{n+1}{y}_0}{5!} (\overset{n+1}{y}'_0)^5 + 4\frac{f^{IV}\overset{n+1}{y}_0}{4!} (\overset{n+1}{y}'_0)^3 \frac{\overset{n+1}{y}''_0}{2!} + \frac{f'''\overset{n+1}{y}_0}{3!} \left[3\overset{n+1}{y}'_0 \left(\frac{\overset{n+1}{y}''_0}{2!}\right)^2 + 3(\overset{n+1}{y}'_0)^2 \frac{\overset{n+1}{y}'''_0}{3!}\right]$$

$$+ \frac{f''\overset{n+1}{y}_0}{2!} \left[2\frac{\overset{n+1}{y}''_0}{2!} \frac{\overset{n+1}{y}'''_0}{3!} + 2\overset{n+1}{y}'_0 \frac{\overset{n+1}{y}^{IV}_0}{4!}\right] + f'\overset{n+1}{y}_0 \frac{\overset{n+1}{y}^{V}_0}{5!}$$

$$\frac{\overset{n}{y}^{VII}_0}{7!} = \frac{f^{VI}\overset{n+1}{y}_0}{6!} (\overset{n+1}{y}'_0)^6 + 5\frac{f^{V}\overset{n+1}{y}_0}{5!} (\overset{n+1}{y}'_0)^4 + \frac{f^{IV}\overset{n+1}{y}_0}{4!} \left[6(\overset{n+1}{y}'_0)^2 \left(\frac{\overset{n+1}{y}'_0}{2!}\right)^2 + 4(\overset{n+1}{y}'_0)^3 \frac{\overset{n+1}{y}'''_0}{3!}\right]$$

$$+ \frac{f'''\overset{n+1}{y}_0}{3!} \left[\left(\frac{\overset{n+1}{y}''_0}{3!}\right)^3 + 6\overset{n+1}{y}'_0 \frac{\overset{n+1}{y}''_0}{2!} \frac{\overset{n+1}{y}'''_0}{3!} + 3(\overset{n+1}{y}'_0)^2 \frac{\overset{n+1}{y}^{IV}_0}{4!}\right]$$

$$+ \frac{f''\overset{n+1}{y}_0}{2!} \left[2\frac{\overset{n+1}{y}''_0}{2!} \frac{\overset{n+1}{y}^{IV}_0}{4!} + \left(\frac{\overset{n+1}{y}'''_0}{3!}\right)^2 + 2\overset{n+1}{y}'_0 \frac{\overset{n+1}{y}^{V}_0}{5!}\right] + f'\overset{n+1}{y}_0 \cdot \frac{\overset{n+1}{y}^{VI}_0}{6!}.$$

Mais, puisque $\overset{n}{y}_0 = \overset{n}{a}$, on a, après les substitutions convenables:

$$\overset{n}{y}' = f\overset{n+1}{a}$$

$$\frac{\overset{n}{y}''_0}{2!} = f'\overset{n+1}{a} \cdot f\overset{n+2}{a}$$

$$\frac{\overset{n}{y}'''_0}{3!} = \frac{f''\overset{n+1}{a}}{2!} (f\overset{n+2}{a})^2 + f'\overset{n+1}{a}\; f'\overset{n+2}{a}\; f\overset{n+3}{a}$$

$$\frac{\overset{n}{y}{}^{IV}_0}{4!} = \frac{f'''\overset{n+1}{a}}{3!}(f\overset{n+2}{a})^3 + 2\,\frac{f''\overset{n+1}{a}}{2!}\, f\overset{n+2}{a}\, f'\overset{n+2}{a}\, f\overset{n+3}{a} + f'\overset{n+1}{a}\left[\frac{f''\overset{n+2}{a}}{2!}(f\overset{n+3}{a})^2 + f'\overset{n+2}{a}\, f'\overset{n+3}{a}\, f\overset{n+4}{a}\right]$$

$$\frac{\overset{n}{y}{}^{V}_0}{5!} = \frac{f^{IV}\overset{n+1}{a}}{4!}(f\overset{n+2}{a})^4 + 3\,\frac{f'''\overset{n+1}{a}}{3!}(f\overset{n+2}{a})^2\, f'\overset{n+2}{a}\, f\overset{n+3}{a} + \frac{f''\overset{n+1}{a}}{2!}\left[(f'\overset{n+2}{a}\, f\overset{n+3}{a})^2 + f\overset{n+2}{a}\left[\frac{f''\overset{n+2}{a}}{2!}(f\overset{n+3}{a})^2 + f'\overset{n+2}{a}\, f'\overset{n+3}{a}\, f\overset{n+4}{a}\right]\right] + f'\overset{n+1}{a}\left[\frac{f'''\overset{n+2}{a}}{3!}(f\overset{n+3}{a})^3 + 2\,\frac{f''\overset{n+2}{a}}{2!}\, f\overset{n+3}{a}\, f'\overset{n+3}{a}\, f\overset{n+4}{a} + f'\overset{n+2}{a}\left[\frac{f''\overset{n+3}{a}}{2!}(f\overset{n+4}{a})^2 + f'\overset{n+3}{a}\, f'\overset{n+4}{a}\, f\overset{n+5}{a}\right]\right]$$

etc. etc.

donc, pour $n = o$:

$$\varphi = a$$

$$\varphi' = f\overset{1}{a}$$

$$\frac{\varphi''}{2!} = f'\overset{1}{a}\cdot f\overset{2}{a}$$

$$\frac{\varphi'''}{3!} = \frac{f''\overset{1}{a}}{2!}(f\overset{2}{a})^2 + f'\overset{1}{a}\, f'\overset{2}{a}\, f\overset{3}{a}$$

$$\frac{\varphi^{IV}}{4!} = \frac{f'''\overset{1}{a}}{3!}(f\overset{2}{a})^3 + 2\,\frac{f''\overset{1}{a}}{2!}\, f\overset{2}{a}\, f'\overset{2}{a}\, f\overset{3}{a} + f'\overset{1}{a}\left[\frac{f''\overset{2}{a}}{2!}(f\overset{3}{a})^2 + f'\overset{2}{a}\, f'\overset{3}{a}\, f\overset{4}{a}\right]$$

$$\frac{\varphi^{V}}{5!} = \frac{f^{IV}\overset{1}{a}}{4!}(f\overset{2}{a})^4 + 3\,\frac{f'''\overset{1}{a}}{3!}(f\overset{2}{a})^2\, f'\overset{2}{a}\, f\overset{3}{a} + \frac{f''\overset{1}{a}}{2!}\left[(f'\overset{2}{a}\, f\overset{3}{a})^2 + 2\, f\overset{2}{a}\left[\frac{f''\overset{2}{a}}{2!}(f\overset{3}{a})^2 + f'\overset{2}{a}\, f'\overset{3}{a}\, f\overset{4}{a}\right]\right] + f'\overset{1}{a}\left[\frac{f'''\overset{2}{a}}{3!}(f\overset{3}{a})^3 + 2\,\frac{f''\overset{2}{a}}{2!}\, f\overset{3}{a}\, f'\overset{3}{a}\, f\overset{4}{a} + f'\overset{2}{a}\left[\frac{f''\overset{3}{a}}{2!}(f\overset{4}{a})^2 + f'\overset{3}{a}\, f'\overset{4}{a}\, f\overset{5}{a}\right]\right]$$

etc. etc.

Formules qui renferment la solution du *problème inverse* de trouver la fonction $\varphi$ au moyen des constantes données: $a$, $\overset{1}{a}$, $\overset{2}{a}$, $\overset{3}{a}$, etc.

# DU RETOUR DES SUITES,

PAR

M. COLLINS.

(Lu le 17 Août 1831.)

Le problème du retour des suites ou de la résolution des équations par séries, est sans contredit l'un des plus intéressans et des plus importans de l'analyse. Les méthodes proposées à ce sujet par LAGRANGE, PFAFF, ROTHE et plusieurs autres mathématiciens, ont été suffisamment développées et appliquées tant dans leurs écrits qui s'y rapportent, que dans les ouvrages destinés à l'étude de la science du calcul en général. On en trouve un exposé raisonné et très-complet dans les *Disquisitions analytiques* de J. F. PFAFF *). Cependant la méthode, dont le développement est l'objet du présent mémoire, étant dans ses principes mêmes tout-à-fait différente de toutes celles proposées jusqu'ici, et réunissant avec l'avantage de présenter la solution complète du problème sous la forme d'une seule expression générale et fort commode, celui de mettre en évidence la haute utilité du *Calcul des aggrégats combinatoires*, inventé par H. A. ROTHE: j'ose me flatter que les analystes suivront non sans quelque intérêt la chaîne des conclusions qui conduisent au résultat promis.

Je commencerai par l'exposition de quelques théorèmes analytiques dont nous aurons besoin dans la suite et parmi lesquels on remarquera quelques uns qui, à moins que je ne sache, n'ont point encore été proposés par personne.

*) Disquisitiones analyticae maxime ad calculum integralem et doctrinam serierum pertinentes. Vol. I. Helmstadii 1797. — V. encore: Mathem. Wörterbuch von Klügel, Mollweide und Grunert. Fünfter Theil. Leipzig 1831. Seite 386.

## Propositions préliminaires.

$$\text{I.}\quad \psi(\varphi x) = S\left[\frac{(\overset{1}{\mathfrak{a}}+\overset{2}{\mathfrak{a}}+\cdots+\overset{\mathfrak{b}}{\mathfrak{a}})!}{\overset{1}{\mathfrak{a}}!\ \overset{2}{\mathfrak{a}}!\cdots\overset{\mathfrak{b}}{\mathfrak{a}}!}\left(\frac{\varphi' o}{1!}\right)^{\overset{1}{\mathfrak{a}}}\left(\frac{\varphi'' o}{2!}\right)^{\overset{2}{\mathfrak{a}}}\cdots\left(\frac{\varphi^{\mathfrak{b}} o}{\mathfrak{b}!}\right)^{\overset{\mathfrak{b}}{\mathfrak{a}}}\frac{\psi^{\overset{1}{\mathfrak{a}}+\cdots+\overset{\mathfrak{b}}{\mathfrak{a}}}(\varphi o)}{(\overset{1}{\mathfrak{a}}+\cdots+\overset{\mathfrak{b}}{\mathfrak{a}})!}\,x^{\mathfrak{b}}\right]$$

$$\overset{1}{\mathfrak{a}}+2\overset{2}{\mathfrak{a}}+\cdots+\mathfrak{b}\overset{\mathfrak{b}}{\mathfrak{a}}=\mathfrak{b}\ {}^{*})$$

formule qui sert à développer en série suivant les puissances de la variable $x$ le résultat qu'on obtient en prenant la fonction $\psi$ d'une autre fonction $\varphi x$, c'est-à-dire, en substituant la fonction $\varphi x$ à la variable $y$ d'une autre fonction $\psi y$. On en trouve une démonstration succincte et rigoureuse dans le I. Vol. de la *VI. série des Mémoires de l'Acad. de Pétersbourg*, p. 583.

$$\text{II.}\quad \frac{d^m[\psi(\varphi x)]}{m!\,dx^m} = S\left[\frac{(\overset{1}{\mathfrak{a}}+\cdots+\overset{m}{\mathfrak{a}})!}{\overset{1}{\mathfrak{a}}!\cdots\overset{m}{\mathfrak{a}}!}\left(\frac{\varphi' x}{1!}\right)^{\overset{1}{\mathfrak{a}}}\cdots\left(\frac{\varphi^{m} x}{m!}\right)^{\overset{m}{\mathfrak{a}}}\frac{\psi^{\overset{1}{\mathfrak{a}}+\cdots+\overset{m}{\mathfrak{a}}}(\varphi x)}{\overset{1}{\mathfrak{a}}!\cdots\overset{m}{\mathfrak{a}}!}\right]$$

$$\overset{1}{\mathfrak{a}}+2\overset{2}{\mathfrak{a}}+\cdots+m\overset{m}{\mathfrak{a}}=m$$

conséquence tirée de la propos. I, moyennant le théorème de Maclaurin.

$$\text{III.}\quad m!\,n! = \frac{(m+n)!}{(m+n)_m}\quad\text{et}\quad \frac{x_{m+n}}{x_n} = \frac{(x-n)_m}{(m+n)_m},$$

propriétés des coëfficiens du binôme. V. Martin Ohm: *System der Mathematik*, Vol. II, pp. 21 et 23, 2e. édit. 1829.

$$\text{IV.}\quad (\overset{1}{a}+\overset{2}{a}+\overset{3}{a}+\cdots+\overset{n}{a})_p = S\left[\overset{1}{a}_{\mathfrak{a}_1}\ \overset{2}{a}_{\mathfrak{a}_2}\ \overset{3}{a}_{\mathfrak{a}_3}\cdots\overset{n}{a}_{\mathfrak{a}_n}\right]$$

$$\overset{1}{\mathfrak{a}}+\overset{2}{\mathfrak{a}}+\cdots+\overset{n}{\mathfrak{a}}=p$$

conséquence du binôme de Kramp. V. Ohm, p. 91.

$$\text{V.}\quad S\left[\mathfrak{b}\cdot\overset{1}{a}_{\mathfrak{a}_1}\ \overset{1}{a}_{\mathfrak{a}_2}\ \overset{3}{a}_{\mathfrak{a}_3}\cdots\overset{n}{a}_{\mathfrak{a}_n}\right] = (\overset{1}{a}+2\overset{2}{a}+\cdots n\overset{n}{a})\times(\overset{1}{a}+\overset{2}{a}+\cdots+\overset{n}{a}-1)_{p-1}$$

$$\overset{1}{\mathfrak{a}}+2\overset{2}{\mathfrak{a}}+\cdots+n\overset{n}{\mathfrak{a}}=\mathfrak{b}$$

$$\overset{1}{\mathfrak{a}}+\overset{2}{\mathfrak{a}}+\cdots+\overset{n}{\mathfrak{a}}=p$$

---

*) Je désignerai, dans les aggrégats combinatoires, constamment par des lettres grecques des *accents*

*Démonstration.* $\underset{\substack{\overset{1}{\mathfrak{a}}+2\overset{2}{\mathfrak{a}}+\cdot+n\overset{n}{\mathfrak{a}}=\mathfrak{b}\\ \overset{1}{\mathfrak{a}}+\overset{2}{\mathfrak{a}}+\cdot+\overset{n}{\mathfrak{a}}=p}}{S}\left[\mathfrak{b}\cdot\underset{\mathfrak{a}}{\overset{1}{a_1}}\,\underset{\mathfrak{a}}{\overset{2}{a_2}}\cdots\underset{\mathfrak{a}}{\overset{n}{a_n}}\right]=\underset{\overset{1}{\mathfrak{a}}+\overset{2}{\mathfrak{a}}+\cdots+\overset{n}{\mathfrak{a}}=p}{S}\left[(\overset{1}{\mathfrak{a}}+2\overset{2}{\mathfrak{a}}+\cdots+n\overset{n}{\mathfrak{a}})\times\left(\underset{\mathfrak{a}}{\overset{1}{a_1}}\,\underset{\mathfrak{a}}{\overset{2}{a_2}}\cdots\underset{\mathfrak{a}}{\overset{n}{a_n}}\right)\right]$

$$=S\left[\overset{1}{\mathfrak{a}}\cdot\underset{\mathfrak{a}}{\overset{1}{a_1}}\,\underset{\mathfrak{a}}{\overset{2}{a_2}}\cdots\underset{\mathfrak{a}}{\overset{n}{a_n}}\right]+2\,S\left[\overset{2}{\mathfrak{a}}\cdot\underset{\mathfrak{a}}{\overset{1}{a_1}}\,\underset{\mathfrak{a}}{\overset{2}{a_2}}\cdots\underset{\mathfrak{a}}{\overset{n}{a_n}}\right]+3\,S\left[\overset{3}{\mathfrak{a}}\cdot\underset{\mathfrak{a}}{\overset{1}{a_1}}\,\underset{\mathfrak{a}}{\overset{2}{a_2}}\cdots\underset{\mathfrak{a}}{\overset{n}{a_n}}\right]+\cdots$$

$$+n\,S\left[\overset{n}{\mathfrak{a}}\cdot\underset{\mathfrak{a}}{\overset{1}{a_1}}\,\underset{\mathfrak{a}}{\overset{2}{a_2}}\cdots\underset{\mathfrak{a}}{\overset{n}{a_n}}\right]=$$

(vu que le terme général de la première de ces sommes disparaît pour $\overset{1}{\mathfrak{a}}=o$, celui de la seconde pour $\overset{2}{\mathfrak{a}}=o$, et ainsi de suite) $\underset{(\overset{1}{\mathfrak{a}}+1)+\overset{2}{\mathfrak{a}}+\cdots+\overset{n}{\mathfrak{a}}=p}{S}\left[(\overset{1}{\mathfrak{a}}+1)\,\underset{\mathfrak{a}+1}{\overset{1}{a_1}}\,\underset{\mathfrak{a}}{\overset{2}{a_2}}\cdots\cdots\underset{\mathfrak{a}}{\overset{n}{a_n}}\right]$

$$+2\underset{\overset{1}{\mathfrak{a}}+(\overset{2}{\mathfrak{a}}+1)+\overset{3}{\mathfrak{a}}+\cdot\cdot+\overset{n}{\mathfrak{a}}=p}{S}\left[(\overset{2}{\mathfrak{a}}+1)\,\underset{\mathfrak{a}}{\overset{1}{a_1}}\,\underset{\mathfrak{a}+1}{\overset{2}{a_2}}\cdots\underset{\mathfrak{a}}{\overset{n}{a_n}}\right]+3\underset{\overset{1}{\mathfrak{a}}+\overset{2}{\mathfrak{a}}+(\overset{3}{\mathfrak{a}}+1)+\cdot+\overset{n}{\mathfrak{a}}=p}{S}\left[(\overset{3}{\mathfrak{a}}+1)\,\underset{\mathfrak{a}}{\overset{1}{a_1}}\,\underset{\mathfrak{a}}{\overset{2}{a_2}}\,\underset{\mathfrak{a}+1}{\overset{3}{a_3}}\cdots\underset{\mathfrak{a}}{\overset{n}{a_n}}\right]+\cdots$$

$$+n\underset{\overset{1}{\mathfrak{a}}+\overset{2}{\mathfrak{a}}+\cdot\cdot+(\overset{n}{\mathfrak{a}}+1)=p}{S}\left[(\overset{n}{\mathfrak{a}}+1)\,\underset{\mathfrak{a}}{\overset{1}{a_1}}\,\underset{\mathfrak{a}}{\overset{2}{a_2}}\cdots\underset{\mathfrak{a}+1}{\overset{n}{a_n}}\right]=\left(\text{à cause de }(\overset{k}{\mathfrak{a}}+1)\underset{\mathfrak{a}+1}{\overset{k}{a_k}}=\overset{k}{a}\,\underset{\mathfrak{a}}{\overset{k}{(a-1)_k}}\right)$$

$$\underset{\overset{1}{\mathfrak{a}}+\overset{2}{\mathfrak{a}}+\cdot\cdot+\overset{n}{\mathfrak{a}}=p-1}{S}\left[\overset{1}{a}\,\underset{\mathfrak{a}}{\overset{1}{(a-1)_1}}\,\underset{\mathfrak{a}}{\overset{2}{a_2}}\cdot\cdot\underset{\mathfrak{a}}{\overset{n}{a_n}}\right]+2\underset{\overset{1}{\mathfrak{a}}+\overset{2}{\mathfrak{a}}+\cdot\cdot+\overset{n}{\mathfrak{a}}=p-1}{S}\left[\overset{2}{a}\cdot\underset{\mathfrak{a}}{\overset{1}{a_1}}\,\underset{\mathfrak{a}}{\overset{2}{(a-1)_2}}\,\underset{\mathfrak{a}}{\overset{3}{a_3}}\cdot\cdot\underset{\mathfrak{a}}{\overset{n}{a_n}}\right]+3\underset{\overset{1}{\mathfrak{a}}+\overset{2}{\mathfrak{a}}+\cdot\cdot+\overset{n}{\mathfrak{a}}=p-1}{S}\left[\overset{3}{a}\cdot\underset{\mathfrak{a}}{\overset{1}{a_1}}\,\underset{\mathfrak{a}}{\overset{2}{a_2}}\,\underset{\mathfrak{a}}{\overset{3}{(a-1)_3}}\cdot\cdot\underset{\mathfrak{a}}{\overset{n}{a_n}}\right]+$$

$$\cdot\cdot+n\underset{\overset{1}{\mathfrak{a}}+\overset{2}{\mathfrak{a}}+\cdot\cdot+\overset{n}{\mathfrak{a}}=p-1}{S}\left[\overset{n}{a}\cdot\underset{\mathfrak{a}}{\overset{1}{a_1}}\,\underset{\mathfrak{a}}{\overset{2}{a_2}}\cdots\underset{\mathfrak{a}}{\overset{n-1}{a_{n-1}}}\,\underset{\mathfrak{a}}{\overset{n}{(a-1)_n}}\right]=\text{(par la propos. IV) }\overset{1}{a}\,(\overset{1}{a}-1+\overset{2}{a}+$$

répétés autant de fois que l'unité est contenue dans les *nombres* désignés par les lettres allemandes correspondantes aux grecques.

$$\cdots+\overset{n}{a})_{p-1}+2\overset{2}{a}\,(\overset{1}{a}+\overset{2}{a}-1+\overset{3}{a}+\cdots+\overset{n}{a})_{p-1}+3\overset{3}{a}\,(\overset{1}{a}+\overset{2}{a}+\overset{3}{a}-1+$$
$$\cdots+\overset{n}{a})_{p-1}+\cdots+n\overset{n}{a}\,(\overset{1}{a}+\overset{2}{a}+\cdots+\overset{n-1}{a}+\overset{n}{a}-1)_{p-1}=(\overset{1}{a}+2\overset{2}{a}+3\overset{3}{a}+$$
$$\cdots+n\overset{n}{a})\,(\overset{1}{a}+\overset{2}{a}+\cdots+\overset{n}{a}-1)_{p-1}.$$

Nous joignons à cette démonstration les remarques et corollaires suivans:

1°. La variable $\mathfrak{b}$ ne peut être $< p$, ni $> np$; elle ne peut donc avoir que les $(n-1)\,p+1$ valeurs: $p, p+1, \cdots np$.

2°. Le nombre entier et positif, désigné par $n$, peut être quelconque.

3°. Les caractéristiques $\overset{1}{a}, \overset{2}{a}\cdots\overset{n}{a}$ peuvent elles-mêmes représenter des variables, limitées par de certaines conditions, si l'on veut. Mais dans ce cas le second membre de l'équation (V.) devra être multiplié par *le nombre des systèmes de valeurs correspondantes* dont ces nouvelles variables seront susceptibles. C'est ainsi qu'on obtient, par exemple:

$$S\left[\mathfrak{b}\cdot\underset{\mathfrak{a}}{\overset{1}{\mathfrak{c}}_1}\;\underset{\mathfrak{a}}{\overset{2}{\mathfrak{c}}_2}\cdots\cdots\underset{\mathfrak{a}}{\overset{n}{\mathfrak{c}}_n}\right]=(q+m)\times(q-1)_{p-1}\times N\,(q,m,n)$$

$$\overset{1}{\mathfrak{c}}+2\overset{2}{\mathfrak{c}}+\cdots+n\overset{n}{\mathfrak{c}}=q+m$$
$$\overset{1}{\mathfrak{c}}+\overset{2}{\mathfrak{c}}+\cdots+\overset{n}{\mathfrak{c}}=q$$
$$\overset{1}{\mathfrak{a}}+2\overset{2}{\mathfrak{a}}+\cdots+n\overset{n}{\mathfrak{a}}=\mathfrak{b}$$
$$\overset{1}{\mathfrak{a}}+\overset{2}{\mathfrak{a}}+\cdots+\overset{n}{\mathfrak{a}}=p$$

où $N(q,m,n)$ indique le nombre des solutions des deux premières équations de condition.

4°. Dans ce dernier cas il serait superflu de pousser $\mathfrak{b}$ jusqu'à $np$, si $(n-1)p>m$. Car, une expression telle que $\underset{\mathfrak{a}}{\overset{k}{\mathfrak{c}}_k}$ disparaissant toujours si $\overset{k}{\mathfrak{c}}<\overset{k}{\mathfrak{a}}$, il faut nécessairement qu'on ait: $\overset{2}{\mathfrak{c}}+2\overset{3}{\mathfrak{c}}+\cdots+(n-1)\overset{n}{\mathfrak{c}}\geqq\overset{2}{\mathfrak{a}}+2\overset{3}{\mathfrak{a}}+\cdots+(n-1)\overset{n}{\mathfrak{a}}$, donc aussi: $m\geqq\mathfrak{b}-p$, c'est-à-dire, que $\mathfrak{b}$ n'excède point $m+p$. Cette règle nous dis-

pensera de la peine de former des termes, dont nous pourrons savoir d'avance qu'ils sont égaux à $o$.

5°. Si, dans le cas précité, $n > m+1$, il ne faudra continuer les premiers membres des 4 équations de condition que jusque, respectivement, aux termes $(m+1)\overset{m+1}{c}$, $\overset{m+1}{c}$, $(m+1)\overset{m+1}{a}$ et $\overset{m+1}{a}$; tous les autres c et $a$ devant nécessairement disparaître. Il faut même, dans ce cas, ne continuer le produit sous le signe $S$ que jusqu'au facteur $\overset{m+1}{c}_{\underset{a}{m+1}}$, vu que les facteurs ultérieurs, à cause de $o_0 = 1$, n'y peuvent rien changer.

6°. $$S\left[(k-\mathfrak{b})\,\overset{1}{c}_{\underset{a}{1}}\,\overset{2}{c}_{\underset{a}{2}}\cdots\overset{n}{c}_{\underset{a}{n}}\right] = [kq_p-(q+m)\,(q-1)_{p-1}]\,N(q,m,n) = [(k-p)q_p - m\,(q-1)_{p-1}]\,N(q,m,n).$$

$$\overset{1}{c}+2\overset{2}{c}+\cdots+n\overset{n}{c}=q+m$$
$$\overset{1}{c}+\overset{2}{c}+\cdots+\overset{n}{c}=q$$
$$\overset{1}{a}+2\overset{2}{a}+\cdots+n\overset{n}{a}=\mathfrak{b}$$
$$\overset{1}{a}+\overset{2}{a}+\cdots+\overset{n}{a}=p$$

ce qui est facile à vérifier à l'aide de la prop. IV, et doit avoir lieu pour une valeur quelconque de la lettre $k$.

7°. $$S\left[(k-\mathfrak{b})\,\overset{1}{c}_{\underset{a}{1}}\,\overset{2}{c}_{\underset{a}{2}}\cdots\overset{n}{c}_{\underset{a}{n}}\right] = (q+m)\,(q-1)_{p-1}\times N(q,m,n).$$

$$\overset{1}{c}+2\overset{2}{c}+\cdots+n\overset{n}{c}=q+m$$
$$\overset{1}{c}+\overset{2}{c}+\cdots+\overset{n}{c}=q$$
$$\overset{1}{a}+2\overset{2}{a}+\cdots+n\overset{n}{a}=k-\mathfrak{b}$$
$$\overset{1}{a}+\overset{2}{a}+\cdots+\overset{n}{a}=p$$

équation tirée immédiatement du corollaire 3°, mais qui (v. 4°) ne peut avoir lieu que lorsque $k \geqq m+p$.

*

*Exemple:* Soit à trouver la valeur de l'aggrégat combinatoire:

$$S\left[(q-b)\,\underset{a}{\overset{1}{c}_{1}}\,\underset{a}{\overset{2}{c}_{2}}\,\underset{a}{\overset{3}{c}_{3}}\right]$$

$$\overset{1}{c}+2\overset{2}{c}+3\overset{3}{c}=q+2$$
$$\overset{1}{c}+\overset{2}{c}+\overset{3}{c}=q$$
$$\overset{1}{a}+2\overset{2}{a}+3\overset{3}{a}=9-b$$
$$\overset{1}{a}+\overset{2}{a}+\overset{3}{a}=5$$

Les deux premières équations fournissant:

$$\overset{2}{c}+2\overset{3}{c}=2$$

on n'aura que ces deux solutions ou systèmes de valeurs correspondantes:

| $\overset{1}{c}$ | $\overset{2}{c}$ | $\overset{3}{c}$ |
|---|---|---|
| $q-2$ | 2 | 0 |
| $q-1$ | 0 | 1 |

et puisque $9-b$ ne peut être $<5$ ni $>7$, ou bien, que $b$ ne peut avoir que les 3 valeurs 2, 3 et 4, on n'a qu'à résoudre ces trois couples d'équations:

$$\overset{1}{a}+2\overset{2}{a}+3\overset{3}{a}=5 \qquad \overset{1}{a}+2\overset{2}{a}+3\overset{3}{a}=6 \qquad \overset{1}{a}+2\overset{2}{a}+3\overset{3}{a}=7$$
$$\overset{1}{a}+\overset{2}{a}+\overset{3}{a}=5 \qquad \overset{1}{a}+\overset{2}{a}+\overset{3}{a}=5 \qquad \overset{1}{a}+\overset{2}{a}+\overset{3}{a}=5$$

ce qui fait obtenir:

| | $\overset{1}{a}$ | $\overset{2}{a}$ | $\overset{3}{a}$ |
|---|---|---|---|
| pour $b=4$: | $\overset{1}{a}=5$ | $\overset{2}{a}=0$ | $\overset{3}{a}=0$ |
| „ „ 3: | „ 4 | „ 1 | „ 0 |
| „ „ 2: | „ 3 | „ 2 | „ 0 |
| | „ 4 | „ 0 | „ 1 |

de sorte que:

$$S\left[(q-b)\,\underset{a}{\overset{1}{c}_{1}}\,\underset{a}{\overset{2}{c}_{2}}\,\underset{a}{\overset{3}{c}_{3}}\right]=5\left((q-2)_5\,2_0\,0_0+(q-1)_5\,0_0\,1_0\right)+6\left((q-2)_4\,2_1\,0_0+\right.$$
$$\left.(q-1)_4\,0_1\,1_0\right)+7\left((q-2)_3\,2_2\,0_0+(q-1)_3\,0_2\,1_0+(q-2)_4\,2_0\,0_1+\right.$$
$$\left.(q-1)_4\,0_0\,1_1\right)=5(q-2)_5+5(q-1)_5+12(q-2)_4+7(q-2)_3+$$

$7(q-1)_4 = (q-2)_4(q-6) + (q-1)_4(q-5) + 12(q-2)_4 + 7(q-2)_3 + 7(q-1)_4 = (q+6)(q-2)_4 + (q+2)(q-1)_4 + 7(q-2)_3 = \frac{(q+6)(q-5)}{q-1}(q-1)_4 + (q+2)(q-1)_4 + \frac{7\cdot 4}{q-1}(q-1)_4 = \frac{q^2+q-2}{q-1}(q-1)_4 + (q+2)(q-1)_4 = 2(q+2)(q-1)_4$, résultat absolument conforme à celui de notre proposition, parce qu'ici $N(q, m, n) = 2$.

VI.
$$S\left[(-1)^{\mathfrak{b}}(k-\mathfrak{b})\frac{(k-q-1)_{\mathfrak{b}}}{(k+q+m-2)_{\mathfrak{b}}}\overset{1}{\mathfrak{c}}_{\underset{\mathfrak{a}}{1}}\overset{2}{\mathfrak{c}}_{\underset{\mathfrak{a}}{2}}\cdots\overset{n}{\mathfrak{c}}_{\underset{\mathfrak{a}}{n}}\right] =$$
$$\overset{1}{\mathfrak{c}} + 2\overset{2}{\mathfrak{c}} + \cdots + n\overset{n}{\mathfrak{c}} = q+m$$
$$\overset{1}{\mathfrak{c}} + \overset{2}{\mathfrak{c}} + \cdots + \overset{n}{\mathfrak{c}} = q$$
$$\overset{1}{\mathfrak{a}} + 2\overset{2}{\mathfrak{a}} + \cdots + n\overset{n}{\mathfrak{a}} = \mathfrak{b}$$
$$\overset{1}{\mathfrak{a}} + \overset{2}{\mathfrak{a}} + \cdots + \overset{n}{\mathfrak{a}} = q+m-1-\mathfrak{b}$$
$$(-1)^{m+u-1}\frac{(k-q-1)_{m+u-1}}{(k+q+m-2)_{m+u-1}}(k+q-u)(q-1)_{u-1}N(q, m, n)$$

les limites de la variable $\mathfrak{b}$ étant $u+m-1$ et $q+m-1$, où $u$ désigne ou $0$ ou un nombre entier et positif inférieur à $q$.

*Démonstration.* L'aggrégat proposé se réduit d'abord par la propos. V, coroll. 6 à celui-ci:

$$S\left[(-1)^{\mathfrak{b}}\frac{(k-q-1)_{\mathfrak{b}}}{(k+q+m-2)_{\mathfrak{b}}}\left(kq_{q+m-1-\mathfrak{b}} - (q+m)(q-1)_{q+m-2-\mathfrak{b}}\right)N(q, m, n)\right].$$

Pour en trouver la valeur $V$ entre les limites prescrites de la variable $\mathfrak{b}$, détachons-en les deux premiers termes, ce qui s'opère en faisant successivement $\mathfrak{b} = q+m-1$, $\mathfrak{b} = q+m-2$ et puis remplaçant, dans l'aggrégat même, $\mathfrak{b}$ par $q+m-3-\mathfrak{b}$. Cela donne:

$$\frac{V}{N(q, m, n)} = (-1)^{q+m-1}\frac{(k-q-1)_{q+m-1}}{(k+q+m-2)_{q+m-1}}k + (-1)^{q+m-2}\frac{(k-q-1)_{q+m-2}}{(k+q+m-2)_{q+m-2}}$$
$$\times\,(kq-(q+m)) + S\left[(-1)^{q+m-3-\mathfrak{b}}\frac{(k-q-1)_{q+m-3-\mathfrak{b}}}{(k+q+m-2)_{q+m-3-\mathfrak{b}}}\times\right.$$
$$\left.\left(kq_{\mathfrak{b}+2} - (q+m)(q-1)_{\mathfrak{b}+1}\right)\right] = (-1)^{q+m-1}\frac{(k-q-1)_{q+m-2}}{(k+q+m-2)_{q+m-2}}\times$$

$$\left(\frac{k-2q-m+1}{k}\,k-kq+(q+m)\right)+\text{sq.}=(-1)^{q+m-2}\,\frac{(k-q-1)_{q+m-2}}{(k+q+m-2)_{q+m-2}}$$
$$\times\,(k+1)\,(q-1)+S\left[(-1)^{q+m-3-\mathfrak{d}}\,\frac{(k-q-1)_{q+m-3-\mathfrak{d}}}{(k+q+m-2)_{q+m-3-\mathfrak{d}}}\,(kq_{\mathfrak{d}+2}-\right.$$
$$\left.(q+m)\times(q-1)_{\mathfrak{d}+1})\right].$$

Maintenant si, pour détacher le troisième terme, on prend d'abord $\mathfrak{d}=o$ et que puis on remplace $\mathfrak{d}$ par $\mathfrak{d}+1$, on obtient:

$$\frac{V}{N(q,m,n)}=(-1)^{q+m-2}\,\frac{(k-q-1)_{q+m-2}}{(k+q+m-2)_{q+m-2}}\,(k+1)(q-1)+(-1)^{q+m-3}\,\frac{(k-q-1)_{q+m-3}}{(k+q+m-2)_{q+m-3}}$$
$$\times\,(kq_2-(q+m)\,(q-1))+\text{sq.}=(-1)^{q+m-2}\,\frac{(k-q-1)_{q+m-3}}{(k+q+m-2)_{q+m-3}}$$
$$\times\left(\frac{k-2q-m+2}{k+1}\,(k+1)\,(q-1)-kq_2+(q+m)\,(q-1)\right)+\text{sq.}$$
$$=(-1)^{q+m-3}\,\frac{(k-q-1)_{q+m-3}}{(k+q+m-2)_{q+m-3}}\,(k+2)\,(q-1)_2$$
$$+S\left[(-1)^{q+m-4-\mathfrak{d}}\,\frac{(k-q-1)_{q+m-4-\mathfrak{d}}}{(k+q+m-2)_{q+m-4-\mathfrak{d}}}\times(kq_{\mathfrak{d}+3}-(q+m)(q-1)_{\mathfrak{d}+2})\right]$$

Supposant, pour un moment, qu'à un certain terme on soit, en continuant toujours de la même manière, parvenu à ce résultat:

$$\frac{V}{N(q,m,n)}=(-1)^{q+m-t}\,\frac{(k-q-1)_{q+m-t}}{(k+q+m-2)_{q+m-t}}\,(k+t-1)\,(q-1)_{t-1}$$
$$+S\left[(-1)^{q+m-t-1-\mathfrak{d}}\,\frac{(k-q-1)_{q+m-t-1-\mathfrak{d}}}{(k+q+m-2)_{q+m-t-1-\mathfrak{d}}}\,(kq_{\mathfrak{d}+t}-(q+m)\,(q-1)_{\mathfrak{d}+t-1})\right]$$

on détachera de ce dernier aggrégat encore un terme en faisant $\mathfrak{d}=0$ et remplaçant dans ce qui reste $\mathfrak{d}$ par $\mathfrak{d}+1$, et l'on aura:

$$\frac{V}{N(q,m,n)}=(-1)^{q+m-t}\,\frac{(k-q-1)_{q+m-t}}{(k+q+m-2)_{q+m-t}}\,(k+t-1)_{t-1}(q-1)_{t-1}+(-1)^{q+m-t-1}$$
$$\times\,\frac{(k-q-1)_{q+m-t-1}}{(k+q+m-2)_{q+m-t-1}}\,(kq_t-(q+m)\,(q-1)_{t-1})+\text{sq.}=(-1)^{q+m-t}$$
$$\times\,\frac{(k-q-1)_{k+m-t-1}}{(k+q+m-2)_{k+m-t-1}}\left(\frac{k-2q-m-t}{k+t-1}\,(k+t-1)(q-1)_{t-1}-kq_t+(q+m)(q-1)_{t-1}\right)+\text{sq.}$$
$$=(-1)^{q+m-t}\,\frac{(k-q-1)_{q+m-t-1}}{(k+q+m-2)_{q+m-t-1}}\,(k\,((q-1)_{t-1}-q_t)-(q+t)\,(q-1)_{t-1})+\text{sq.}$$

$$= (-1)^{q+m-t-1} \frac{(k-q-1)_{q+m-t-1}}{(k+q+m-2)_{q+m-t-1}} \times (k(q-1)_t + (q-1)_t t) + \text{sq.}$$

$$= (-1)^{q+m-(t+1)} \frac{(k-q-1)_{q+m-(t+1)}}{(k+q+m-2)_{q+m-(t+1)}} (k+t) \times (q-1)_t + \text{sq.}$$

On voit par-là que ce qui a été supposé vrai pour un certain nombre $t$ l'est encore pour le nombre suivant $t+1$, donc généralement. Il s'ensuit qu'en remplaçant $q+m-t$ par la limite inférieure de $\mathfrak{d} = u+m-1$, ou bien, $t$ par $q-u+1$, on obtiendra:

$$\frac{V}{N(q,m,n)} = (-1)^{u+m-1} \frac{(k-q-1)_{u+m-1}}{(k+q+m-2)_{u+m-1}} (k+q-u)\,(q-1)_{q-u}$$

ce qui donne finalement:

$$V = (-1)^{u+m-1} \frac{(k-q-1)_{u+m-1}}{(k+q+m-2)_{u+m-1}} (k+q-u)\,(q-1)_{u-1} \times N(q,m,n).$$

*Corollaire.* La lettre $u$ ne peut pas avoir de valeur négative, parceque cela rendrait $\overset{1}{\mathfrak{a}} + \overset{2}{\mathfrak{a}} + \cdots + \overset{n}{\mathfrak{a}} > \overset{1}{\mathfrak{c}} + \overset{2}{\mathfrak{c}} + \cdots + \overset{n}{\mathfrak{c}}$, et que chaque $\mathfrak{c}$ doit être $\overline{\overline{>}}$ que l' $\mathfrak{a}$ correspondant (V. 4°.) En supposant $u = o$, on trouve:

$$V = (-1)^{m-1} \frac{(k-q-1)_{m-1}}{(k+q+m-2)_{m-1}} (k+q)\,(q-1)_q\, N(q,m,n) = o,$$ et les limites de $\mathfrak{d}$ sont alors: $m-1$ et $q+m-1$.

Mais si $u=1$, c'est-à-dire, lorsque $\mathfrak{d}$ a pour limites: $m$ et $q+m-1$, on obtient:

$$V = (-1)^m \frac{(k-q-1)_m}{(k+q+m-2)_m} (k+q-1) \cdot N(q,m,n).$$

*Exemple.* Soit $q=4$ et $m=2$, on aura:

$$\overset{1}{\mathfrak{c}} + 2\overset{2}{\mathfrak{c}} + 3\overset{3}{\mathfrak{c}} = 6$$

$$\overset{1}{\mathfrak{c}} + \overset{2}{\mathfrak{c}} + \overset{3}{\mathfrak{c}} = 4$$

donc: $\overset{2}{\mathfrak{c}} + 2\overset{3}{\mathfrak{c}} = 2$

ce qui donne:

| $\overset{1}{\mathfrak{c}}$ | $\overset{2}{\mathfrak{c}}$ | $\overset{3}{\mathfrak{c}}$ |
|---|---|---|
| 2 | 2 | 0 |
| 3 | 0 | 1 |

et puisqu'il faut que $\overset{1}{\mathfrak{a}} < 4$, $\overset{2}{\mathfrak{a}} < 3$, $\overset{3}{\mathfrak{a}} < 2$ et $\mathfrak{d} < 2$, on formera le tableau suivant de valeurs correspondantes :

| $\mathfrak{d}$ | $\mathfrak{b}$ | $\overset{1}{\mathfrak{a}}$ | $\overset{2}{\mathfrak{a}}$ | $\overset{3}{\mathfrak{a}}$ |
|---|---|---|---|---|
| 5 | 0 | 0 | 0 | 0 |
| 4 | 1 | 1 | 0 | 0 |
| | 2 | 0 | 1 | 0 |
| | 3 | 0 | 0 | 1 |
| 3 | 2 | 2 | 0 | 0 |
| | 3 | 1 | 1 | 0 |
| | 4 | 1 | 0 | 1 |
| | | 0 | 2 | 0 |
| | 5 | 0 | 1 | 1 |
| 2 | 3 | 3 | 0 | 0 |
| | 4 | 2 | 1 | 0 |
| | 5 | 2 | 0 | 1 |
| | | 1 | 2 | 0 |
| | 6 | 1 | 1 | 1 |
| | 7 | 0 | 2 | 1 |
| 1 | 5 | 3 | 1 | 0 |
| | 6 | 3 | 0 | 1 |
| | | 2 | 2 | 0 |
| | 7 | 2 | 1 | 1 |
| | 8 | 1 | 2 | 1 |

d'où l'on tire :

$$-\frac{(k-5)_5}{(k+4)_5}\times 2k+\frac{(k-5)_4}{(k+4)_4}(8k-12)-\frac{(k-5)_3}{(k+4)_3}(12k-36)+\frac{(k-5)_2}{(k+4)_2}(8k-36)$$
$$-\frac{(k-5)_1}{(k+4)_1}(2k-12)=o$$

$$-\frac{(k-5)_5}{(k+4)_5}\times 2k+\frac{(k-5)_4}{(k+4)_4}(8k-12)-\frac{(k-5)_3}{(k+4)_3}(12k-36)+\frac{(k-5)_2}{(k+4)_2}(8k-36)$$
$$=2\,\frac{k-5}{k+4}(k-6)$$

etc. etc.

résultats qui, vu que $N(4,2,3)=2$, s'accordent parfaitement avec nos formules.

Le *principe*, sur lequel nous allons asseoir le développement de notre formule générale pour le *retour des suites*, est le suivant:

En désignant par la caractéristique $\hat{f}$ la *fonction inverse* d'une fonction quelconque $fx$, de sorte que, si $y = fx$, $x$ soit $= \hat{f}y$, ou bien, qu'on ait $\hat{f}(fx) = x$; et par $r$ la valeur, ou, s'il y en a plusieurs, l'une des valeurs de $x$ dans l'équation $fx = o$, on aura par le théorème de MACLAURIN:

$$x = \hat{f}(fx) = S\left[\frac{\hat{f}^{\beta} o}{\mathfrak{b}!}(fx)^{\mathfrak{b}}\right] = S\left[\frac{\hat{f}^{\beta}(fr)}{\mathfrak{b}!}(fx)^{\mathfrak{b}}\right] \qquad (A)$$

Il ne s'agit donc, pour pouvoir exprimer $x$ par une série ordonnée suivant les puissances de la fonction $fx$, que de savoir déduire de $fx$, ou de ses dérivées: $f'x$, $f''x$, etc. le facteur ou coëfficient $\frac{\hat{f}^{\beta}(fr)}{\mathfrak{b}!}$; ce dont nous allons nous occuper dans l'article suivant.

## Différentiation d'une fonction inverse d'une autre.

En différentiant l'équation $\hat{f}(fx) = x$ on obtient celle-ci:

$$\frac{d[\hat{f}(fx)]}{dx} = \hat{f}'(fx) \cdot f'x = 1, \text{ ou bien, } \hat{f}'(fx) = \frac{1}{f'x} \qquad (B)$$

Toutes les différentielles de $\hat{f}(fx)$ d'un ordre supérieur au premier, devant disparaître, on aura, en vertu de la propos. II, pour tous les cas où $m > 1$:

$$\frac{d^m[\hat{f}(fx)]}{m!\, dx^m} = S\left[\frac{(\overset{1}{\mathfrak{a}} + \cdots + \overset{m}{\mathfrak{a}})!}{\overset{1}{\mathfrak{a}}! \cdots\cdots \overset{m}{\mathfrak{a}}!}\left(\frac{f'x}{1!}\right)^{\overset{1}{\mathfrak{a}}} \cdots \left(\frac{f^{\mu}x}{m!}\right)^{\overset{m}{\mathfrak{a}}} \frac{\hat{f}^{\overset{1}{\mathfrak{a}} + \cdots + \overset{m}{\mathfrak{a}}}(fx)}{(\overset{1}{\mathfrak{a}} + \cdots + \overset{m}{\mathfrak{a}})!}\right] = o \qquad (C)$$

$$\overset{1}{\mathfrak{a}} + 2\overset{2}{\mathfrak{a}} + \cdots + m\overset{m}{\mathfrak{a}} = m$$

En prenant d'abord $\overset{1}{\mathfrak{a}} = m$, puis ajoutant à ce même aggrégat l'équation de condition: $\overset{1}{\mathfrak{a}} + \overset{2}{\mathfrak{a}} + \cdots + \overset{m}{\mathfrak{a}} = m - 1 - \mathfrak{b}$, on en détachera le dernier terme et l'on aura:

$$S\left[\frac{(\overset{1}{\mathfrak{a}}+\cdots+\overset{m}{\mathfrak{a}})!}{\overset{1}{\mathfrak{a}}!\cdots\cdots\overset{m}{\mathfrak{a}}!}\left(\frac{f'x}{1!}\right)^{\overset{1}{\mathfrak{a}}}\cdots\left(\frac{f^{\mu}x}{m!}\right)^{\overset{m}{\mathfrak{a}}}\frac{\hat{f}^{\overset{1}{\mathfrak{a}}+\cdots+\overset{m}{\mathfrak{a}}}(fx)}{(\overset{1}{\mathfrak{a}}+\cdots+\overset{m}{\mathfrak{a}})!}\right]+\frac{m!}{m!}\left(\frac{f'x}{1!}\right)^{m}\frac{\hat{f}^{\mu}(fx)}{m!}=0$$

$$\overset{1}{\mathfrak{a}}+2\overset{2}{\mathfrak{a}}+\cdots+m\overset{m}{\mathfrak{a}}=m$$

$$\overset{1}{\mathfrak{a}}+\overset{2}{\mathfrak{a}}+\cdots+\overset{m}{\mathfrak{a}}=m-1-\mathfrak{b}$$

par conséquent :

$$\frac{\hat{f}^{\mu}(fx)}{m!}=-\frac{1}{(f'x)^{m}}S\left[\frac{(m-1-\mathfrak{b})!}{\overset{1}{\mathfrak{a}}!\cdots\cdots\overset{m}{\mathfrak{a}}!}\left(\frac{f'x}{1!}\right)^{\overset{1}{\mathfrak{a}}}\cdots\left(\frac{f^{\mu}x}{m!}\right)^{\overset{m}{\mathfrak{a}}}\frac{\hat{f}^{\mu-1-\beta}(fx)}{(m-1-\mathfrak{b})!}\right]$$

$$\overset{1}{\mathfrak{a}}+2\overset{2}{\mathfrak{a}}+\cdots+m\overset{m}{\mathfrak{a}}=m$$

$$\overset{1}{\mathfrak{a}}+\overset{2}{\mathfrak{a}}+\cdots+\overset{m}{\mathfrak{a}}=m-1-\mathfrak{b}$$

ou, parce que $\mathfrak{b}$ ne peut être tout au plus que $m-2$ et qu'il est donc permis de faire $\mathfrak{b}=m-2-\mathfrak{d}$ :

$$\frac{\hat{f}^{\mu}(fx)}{m!}=-\frac{1}{(f'x)^{m}}S\left[\frac{(\mathfrak{d}+1)!}{\overset{1}{\mathfrak{a}}!\cdots\overset{m}{\mathfrak{a}}!}\left(\frac{f'x}{1!}\right)^{\overset{1}{\mathfrak{a}}}\cdots\left(\frac{f^{\mu}x}{m!}\right)^{\overset{m}{\mathfrak{a}}}\frac{\hat{f}^{\mathfrak{d}+1}(fx)}{(\mathfrak{d}+1)!}\right] \qquad (D)$$

$$\overset{1}{\mathfrak{a}}+2\overset{2}{\mathfrak{a}}+\cdots+m\overset{m}{\mathfrak{a}}=m$$

$$\overset{1}{\mathfrak{a}}+\overset{2}{\mathfrak{a}}+\cdots+\overset{m}{\mathfrak{a}}=\mathfrak{d}+1$$

$$\mathfrak{d}+\mathfrak{e}=m-2$$

Le plus grand nombre d'accents, dont la caractéristique $\hat{f}$ se trouve affectée dans le second membre de cette équation, étant seulement $m-1$, nous en concluons qu'il doit exister un moyen de le réduire, par des substitutions successives, à 1, et d'éliminer alors entièrement le signe $\hat{f}$ par l'équation (*B*). A cet effet faisons pour abréger :

$$S_{k}^{m}=\frac{1}{(f'x)^{m}}S\left[\frac{k!}{\overset{1}{\mathfrak{a}}!\cdots\overset{m}{\mathfrak{a}}!}\left(\frac{f'x}{1!}\right)^{\overset{1}{\mathfrak{a}}}\cdots\left(\frac{f^{\mu}x}{m!}\right)^{\overset{m}{\mathfrak{a}}}\right] \qquad (E)$$

$$\overset{1}{\mathfrak{a}}+2\overset{2}{\mathfrak{a}}+\cdots+m\overset{m}{\mathfrak{a}}=m$$

$$\overset{1}{\mathfrak{a}}+\overset{2}{\mathfrak{a}}+\cdots+\overset{m}{\mathfrak{a}}=k$$

et $X^{\varkappa} = \frac{\hat{f}^{\varkappa}(fx)}{k!}$, de sorte que $X' = \frac{\hat{f}'(fx)}{1!} = \frac{1}{f'x}$ et $X^{0} = X = \hat{f}(fx) = x.$

Maintenant l'équation $(D)$ pouvant être écrite ainsi:

$$X^{\mu} = -\underset{\mathfrak{a}+\mathfrak{b}=m-2}{S}\left[S^{m}_{\mathfrak{a}+1}\, X^{\alpha+1}\right] \tag{F}$$

soit encore:

$$\begin{aligned}
S^{m}_{m-1}\, S^{m-1}_{k} - S^{m}_{k} &= \overset{1}{S}{}^{m}_{k}\\
\overset{1}{S}{}^{m}_{m-2}\, S^{m-2}_{k} - \overset{1}{S}{}^{m}_{k} &= \overset{2}{S}{}^{m}_{k}\\
\overset{2}{S}{}^{m}_{m-3}\, S^{m-3}_{k} - \overset{2}{S}{}^{m}_{k} &= \overset{3}{S}{}^{m}_{k}\\
\cdot \qquad \cdot \qquad & \cdot\\
\cdot \qquad \cdot \qquad & \cdot\\
\cdot \qquad \cdot \qquad & \cdot
\end{aligned}$$

et généralement:

$$\overset{n}{S}{}^{m}_{m-(n+1)}\, S^{m-(n+1)}_{k} - \overset{n}{S}{}^{m}_{k} = \overset{n+1}{S}{}^{m}_{k} \tag{G}$$

notation valable pour tous les cas où $n$ désigne un nombre entier et positif ou $o$, pourvu qu'on suppose $\overset{0}{S}{}^{m}_{k} = S^{m}_{k}$.

Cela posé nous aurons:

$$X^{\mu} = -\underset{\mathfrak{a}+\mathfrak{b}=m-2}{S}\left[S^{m}_{\mathfrak{a}+1}\, X^{\alpha+1}\right] = -S^{m}_{m-1}\, X^{\mu-1} - \underset{\mathfrak{a}+\mathfrak{b}=m-3}{S}\left[S^{m}_{\mathfrak{a}+1}\, X^{\alpha+1}\right] =$$

$$+ S^{m}_{m-1}\, \underset{\mathfrak{a}+\mathfrak{b}=m-3}{S}\left[S^{m-1}_{\mathfrak{a}+1}\, X^{\alpha+1}\right] - \underset{\mathfrak{a}+\mathfrak{b}=m-3}{S}\left[S^{m}_{\mathfrak{a}+1}\, X^{\alpha+1}\right] = \underset{\mathfrak{a}+\mathfrak{b}=m-3}{S}\left[\left(S^{m}_{m-1}\, S^{m-1}_{\mathfrak{a}+1} - S^{m}_{\mathfrak{a}+1}\right) X^{\alpha+1}\right]$$

$$= \underset{\mathfrak{a}+\mathfrak{b}=m-3}{S}\left[\overset{1}{S}{}^{m}_{\mathfrak{a}+1}\, X^{\alpha+1}\right] = \overset{1}{S}{}^{m}_{m-2}\, X^{\mu-2} + \underset{\mathfrak{a}+\mathfrak{b}=m-4}{S}\left[\overset{1}{S}{}^{m}_{\mathfrak{a}+1}\, X^{\alpha+1}\right] = -\overset{1}{S}{}^{m}_{m-2}\, \underset{\mathfrak{a}+\mathfrak{b}=m-4}{S}\left[S^{m-2}_{\mathfrak{a}+1}\, X^{\alpha+1}\right]$$

$$+ \underset{\mathfrak{a}+\mathfrak{b}=m-4}{S}\left[\overset{1}{S}{}^{m}_{\mathfrak{a}+1}\, X^{\alpha+1}\right] = -\underset{\mathfrak{a}+\mathfrak{b}=m-4}{S}\left[\left(\overset{1}{S}{}^{m}_{m-2}\, S^{m-2}_{\mathfrak{a}+1} - \overset{1}{S}{}^{m}_{\mathfrak{a}+1}\right) X^{\alpha+1}\right] = -\underset{\mathfrak{a}+\mathfrak{b}=m-4}{S}\left[\overset{2}{S}{}^{m}_{\mathfrak{a}+1}\, X^{\alpha+1}\right]$$

$$= \cdots\cdots\cdots = +\underset{\mathfrak{a}+\mathfrak{b}=m-5}{S}\left[\overset{3}{S}{}^{m}_{\mathfrak{a}+1}\, X^{\alpha+1}\right] = \cdots\cdots\cdots = -\underset{\mathfrak{a}+\mathfrak{b}=m-6}{S}\left[\overset{4}{S}{}^{m}_{\mathfrak{a}+1}\, X^{\alpha+1}\right] = \cdots\cdots\cdots$$

*

$$=(-1)^{n-1}\,S\,[\underset{\mathfrak{a}+\mathfrak{b}=m-n}{{}^{n-2}\overset{m}{\underset{\mathfrak{a}+1}{S}}}\;X^{\mathfrak{a}+1}]=\cdots\cdots=(-1)^{m-1}\,S\,[\underset{\mathfrak{a}+\mathfrak{b}=o}{{}^{m-2}\overset{m}{\underset{\mathfrak{a}+1}{S}}}\;X^{\mathfrak{a}+1}],$$ ce qui

fournit enfin :

$$X^{\mu}=(-1)^{m-1}\,{}^{m-2}\overset{m}{\underset{1}{S}}\;X' \qquad (H)$$

Maintenant, avant d'entreprendre la réduction immédiate et générale du facteur ${}^{m-2}\overset{m}{\underset{1}{S}}$ à une simple expression de la forme $\overset{m}{\underset{k}{S}}$, car tel est évidemment notre but actuel, commençons par considérer quelques cas particuliers.

1)
$$S_{m-1}^{\;m}\,S\,{}^{m-1}_{\;k}=\frac{1}{(f'x)^m}\,S\left[\frac{(m-1)\,!}{\overset{1}{\mathfrak{b}}\,!\cdots\cdot\overset{m}{\mathfrak{a}}\,!}\left(\frac{f'x}{1!}\right)^{\overset{1}{\mathfrak{a}}}\cdots\left(\frac{f^{\mu}x}{m!}\right)^{\overset{m}{\mathfrak{a}}}\right]\times$$
$$\overset{1}{\mathfrak{a}}+2\overset{2}{\mathfrak{a}}+\cdots+m\overset{m}{\mathfrak{a}}=m$$
$$\overset{1}{\mathfrak{a}}+\overset{2}{\mathfrak{a}}+\cdots+\overset{m}{\mathfrak{a}}=m-1$$

$$\frac{1}{(f'x)^{m-1}}\,S\left[\frac{k\,!}{\overset{1}{\mathfrak{a}}\,!\cdots\cdots\overset{m-1}{\mathfrak{b}}\,!}\left(\frac{f'x}{1!}\right)^{\overset{1}{\mathfrak{b}}}\cdots\left(\frac{f^{\mu-1}x}{(m-1)\,!}\right)^{\overset{m-1}{\mathfrak{b}}}\right]$$
$$\overset{1}{\mathfrak{b}}+2\overset{2}{\mathfrak{b}}+\cdots+(m-1)\overset{m-1}{\mathfrak{b}}=m-1$$
$$\overset{1}{\mathfrak{b}}+\overset{2}{\mathfrak{b}}+\cdots+\overset{m-1}{\mathfrak{b}}=k$$

ou bien, l'addition d'un nouveau terme $\overset{m}{\mathfrak{b}}$ dans ces deux équations de condition ainsi que dans le second aggrégat lui-même n'y changeant rien, vu que ce $\overset{m}{\mathfrak{b}}$ n'y pourra être que $=o$:

$$S_{m-1}^{\;m}\,S\,{}^{m-1}_{\;k}=\frac{1}{(f'x)^m}\,S\left[\frac{(m-1)\,!}{\overset{1}{\mathfrak{a}}\,!\cdots\cdots\overset{m}{\mathfrak{a}}\,!}\left(\frac{f'x}{1!}\right)^{\overset{1}{\mathfrak{a}}}\cdots\left(\frac{f^{\mu}x}{m!}\right)^{\overset{m}{\mathfrak{a}}}\right]\times$$
$$\overset{1}{\mathfrak{a}}+2\overset{2}{\mathfrak{a}}+\cdots+m\overset{m}{\mathfrak{a}}=m$$
$$\overset{1}{\mathfrak{a}}+\overset{2}{\mathfrak{a}}+\cdots+\overset{m}{\mathfrak{a}}=m-1$$

$$\frac{1}{(f'x)^{m-1}}\, S\left[\frac{k!}{\overset{1}{\mathfrak{b}}!\cdots\overset{m}{\mathfrak{b}}!}\left(\frac{f'x}{1!}\right)^{\overset{1}{\mathfrak{b}}}\cdots\left(\frac{f^{\mu}x}{m!}\right)^{\overset{m}{\mathfrak{b}}}\right] =$$

$$\overset{1}{\mathfrak{b}}+2\overset{2}{\mathfrak{b}}+\cdots+m\overset{m}{\mathfrak{b}}=m-1$$

$$\overset{1}{\mathfrak{b}}+\overset{2}{\mathfrak{b}}+\cdots+\overset{m}{\mathfrak{b}}=k$$

$$\frac{1}{(f'x)^{2m-1}}\, S\left[\frac{(m-1)!\,k!}{\overset{1}{\mathfrak{a}}!\,\overset{1}{\mathfrak{b}}!\cdots\overset{m}{\mathfrak{a}}!\,\overset{m}{\mathfrak{b}}!}\left(\frac{f'x}{1!}\right)^{\overset{1}{\mathfrak{a}}+\overset{1}{\mathfrak{b}}}\cdots\left(\frac{f^{\mu}x}{m!}\right)^{\overset{m}{\mathfrak{a}}+\overset{m}{\mathfrak{b}}}\right]$$

$$(\overset{1}{\mathfrak{a}}+\overset{1}{\mathfrak{b}})+2(\overset{2}{\mathfrak{a}}+\overset{2}{\mathfrak{b}})+\cdots+m(\overset{m}{\mathfrak{a}}+\overset{m}{\mathfrak{b}})=2m-1$$

$$(\overset{1}{\mathfrak{a}}+\overset{1}{\mathfrak{b}})+(\overset{2}{\mathfrak{a}}+\overset{2}{\mathfrak{b}})+\cdots+(\overset{m}{\mathfrak{a}}+\overset{m}{\mathfrak{b}})=k+m-1$$

$$\overset{1}{\mathfrak{a}}+2\overset{2}{\mathfrak{a}}+\cdots+m\overset{m}{\mathfrak{a}}=m$$

$$\overset{1}{\mathfrak{a}}+\overset{2}{\mathfrak{a}}+\cdots+\overset{m}{\mathfrak{a}}=m-1.$$

Donc, en vertu de la propos. III :

$$S^{\;m}_{m-1}\, S^{\;m-1}_{k} = \frac{1}{(f'x)^{2m-1}}\, S\left[\frac{(m-1)!\,k!\,(\overset{1}{\mathfrak{a}}+\overset{1}{\mathfrak{b}})_{\overset{1}{\mathfrak{a}}}\cdots(\overset{m}{\mathfrak{a}}+\overset{m}{\mathfrak{b}})_{\overset{m}{\mathfrak{a}}}}{(\overset{1}{\mathfrak{a}}+\overset{1}{\mathfrak{b}})!\cdots(\overset{m}{\mathfrak{a}}+\overset{m}{\mathfrak{b}})!}\left(\frac{f'x}{1!}\right)^{\overset{1}{\mathfrak{a}}+\overset{1}{\mathfrak{b}}}\cdots\left(\frac{f^{\mu}x}{m!}\right)^{\overset{m}{\mathfrak{a}}+\overset{m}{\mathfrak{b}}}\right]$$

(mêmes équations de condition)

ou, en faisant $\overset{h}{\mathfrak{a}}+\overset{h}{\mathfrak{b}}=\overset{h}{\mathfrak{c}}$ :

$$S^{\;m}_{m-1}\, S^{\;m-1}_{k} = \frac{1}{(f'x)^{2m-1}}\, S\left[\frac{(m-1)!\,k!\,\overset{1}{\mathfrak{c}}_{\overset{1}{\mathfrak{a}}}\cdots\overset{m}{\mathfrak{c}}_{\overset{m}{\mathfrak{a}}}}{\overset{1}{\mathfrak{c}}!\cdots\cdots\overset{m}{\mathfrak{c}}!}\left(\frac{f'x}{1!}\right)^{\overset{1}{\mathfrak{c}}}\cdots\left(\frac{f^{\mu}x}{m!}\right)^{\overset{m}{\mathfrak{c}}}\right]$$

$$\overset{1}{\mathfrak{c}}+2\overset{2}{\mathfrak{c}}+\cdots+m\overset{m}{\mathfrak{c}}=2m-1$$

$$\overset{1}{\mathfrak{c}}+\overset{2}{\mathfrak{c}}+\cdots+\overset{m}{\mathfrak{c}}=k+m-1$$

$$\overset{1}{\mathfrak{a}}+2\overset{2}{\mathfrak{a}}+\cdots+m\overset{m}{\mathfrak{a}}=m$$

$$\overset{1}{\mathfrak{a}}+\overset{2}{\mathfrak{a}}+\cdots+\overset{m}{\mathfrak{a}}=m-1.$$

Mais, puisque les deux dernières équations de condition, à cause de : $\overset{2}{a}+2\overset{3}{a}+\cdots+(m-1)\overset{m}{a}=1$, ne donnent que cette seule solution :

$$\overset{1}{a}=m-2,\quad \overset{2}{a}=1,\quad \overset{3}{a}=\overset{4}{a}=\cdots=\overset{m}{a}=0$$

et que $\overset{1}{c}$ ne peut être $<\overset{1}{a}$, par ceque autrement s'évanouirait le facteur $\overset{1}{c}_{\overset{1}{a}}$, il doit être permis de remplacer $\overset{1}{c}$ par $\overset{1}{c}+m-2$; et alors on obtient :

$$S^{m}_{m-1}\,S^{m-1}_{k}=\frac{1}{(f'x)^{2m-1}}\,S\left[\frac{(m-1)!\,k!\,(\overset{1}{c}+m-2)_{m-2}\overset{2}{c}}{(\overset{1}{c}+m-2)!\,\overset{2}{c}!\,\cdots\cdots\overset{m}{c}!}\left(\frac{f'x}{1!}\right)^{\overset{1}{c}+m-2}\left(\frac{f''x}{2!}\right)^{\overset{2}{c}}\cdots\left(\frac{f^{m}x}{m!}\right)^{\overset{m}{c}}\right]$$

$$\overset{1}{c}+m-2+2\overset{2}{c}+\cdots+m\overset{m}{c}=2m-1$$

$$\overset{1}{c}+m-2+\overset{2}{c}+\cdots+\overset{m}{c}=k+m-1$$

$$=\text{(prop. III.)}\ \frac{1}{(f'x)^{m+1}}\,S\left[\frac{(m-1)\,k!\,\overset{2}{c}}{\overset{1}{c}!\,\cdots\cdots\overset{m}{c}!}\left(\frac{f'x}{1!}\right)^{\overset{1}{c}}\cdots\left(\frac{f^{m}x}{m!}\right)^{\overset{m}{c}}\right]$$

$$\overset{1}{c}+2\overset{2}{c}+\cdots+m\overset{m}{c}=m+1$$

$$\overset{1}{c}+\overset{2}{c}+\cdots+\overset{m}{c}=k+1.$$

On a d'un autre côté :

$$S^{m}_{k}=\frac{1}{(f'x)^{m}}\,S\left[\frac{k!}{\overset{1}{c}!\cdots\overset{m}{c}!}\left(\frac{f'x}{1!}\right)^{\overset{1}{c}}\cdots\left(\frac{f^{m}x}{m!}\right)^{\overset{m}{c}}\right]=$$

$$\overset{1}{c}+2\overset{2}{c}+\cdots+m\overset{m}{c}=m$$

$$\overset{1}{c}+\overset{2}{c}+\cdots+\overset{m}{c}=k$$

$$\frac{1}{(f'x)^{m+1}}\,S\left[\frac{k!\,(\overset{1}{c}+1)}{(\overset{1}{c}+1)!\,\overset{2}{c}!\cdots\overset{m}{c}!}\left(\frac{f'x}{1!}\right)^{\overset{1}{c}+1}\left(\frac{f''x}{2!}\right)^{\overset{2}{c}}\cdots\left(\frac{f^{m}x}{m!}\right)^{\overset{m}{c}}\right]$$

$$(\overset{1}{c}+1)+2\overset{2}{c}+\cdots+m\overset{m}{c}=m+1$$

$$(\overset{1}{c}+1)+\overset{2}{c}+\cdots+\overset{m}{c}=k+1,$$

Or il doit être permis de remplacer ici $\overset{1}{c}+1$ par $\overset{1}{c}$, parce que, en faisant ce nouveau $\overset{1}{c}=o$, toute l'expression sous le signe $S$ s'évanouira et ne produira par conséquent aucun nouveau terme. On a donc :

$$S^{m}_{k} = \frac{1}{(f'x)^{m+1}}\, S\left[\frac{k!\,\overset{1}{c}}{\overset{1}{c}!\cdots\cdots\overset{m}{c}!}\left(\frac{f'x}{1!}\right)^{\overset{1}{c}}\cdots\left(\frac{f^{\mu}x}{m!}\right)^{\overset{m}{c}}\right]$$

$$\overset{1}{c}+2\overset{2}{c}+\cdots+m\overset{m}{c}=m+1$$

$$\overset{1}{c}+\overset{2}{c}+\cdots+\overset{m}{c}=k+1.$$

En combinant les deux résultats que nous venons d'obtenir, on formera :

$$\overset{1}{S}{}^{m}_{k} = S^{m}_{m-1}\; S^{m-1}_{k} - S^{m}_{k} = \frac{1}{(f'x)^{m+1}}\, S\left[\frac{k!\,((m-1)\overset{2}{c}-\overset{1}{c})}{\overset{1}{c}!\cdots\cdots\cdots\overset{m}{c}!}\left(\frac{f'x}{1!}\right)^{\overset{1}{c}}\cdots\left(\frac{f^{\mu}x}{m!}\right)^{\overset{m}{c}}\right] \quad (K)$$

$$\overset{1}{c}+2\overset{2}{c}+\cdots+m\overset{m}{c}=m+1$$

$$\overset{1}{c}+\overset{2}{c}+\cdots+\overset{m}{c}=k+1.$$

2) L'équation $(K)$ nous donne :

$$\overset{1}{S}{}^{m}_{m-2}\times S^{m-2}_{k} = \frac{1}{(f'x)^{m+1}}\, S\left[\frac{(m-2)!\,((m-1)\overset{2}{a}-\overset{1}{a})}{\overset{1}{a}!\cdots\cdots\overset{m}{a}!}\left(\frac{f'x}{1!}\right)^{\overset{1}{a}}\cdots\left(\frac{f^{\mu}x}{m!}\right)^{\overset{m}{a}}\right]\times$$

$$\overset{1}{a}+2\overset{2}{a}+\cdots+m\overset{m}{a}=m+1$$

$$\overset{1}{a}+\overset{2}{a}+\cdots+\overset{m}{a}=m-1$$

$$\frac{1}{(f'x)^{m-2}}\times S\left[\frac{k!}{\overset{1}{b}!\cdots\cdots\overset{m-2}{b}!}\left(\frac{f'x}{1!}\right)^{\overset{1}{b}}\cdots\left(\frac{f^{\mu-2}x}{(m-2)!}\right)^{\overset{m-2}{b}}\right]$$

$$\overset{1}{b}+2\overset{2}{b}+\cdots+(m-2)\overset{m-2}{b}=m-2$$

$$\overset{1}{b}+\overset{2}{b}+\cdots+\overset{m-2}{b}=k$$

En introduisant dans le second de ces aggrégats les termes $\overset{m-1}{\mathfrak{b}}$ et $\overset{m}{\mathfrak{b}}$, qui n'y peuvent rien changer, vu qu'ils ne pourront avoir d'autre valeur que $o$, et en effectuant la multiplication, on obtient:

$$\overset{1}{S}{}^{m}_{m-2} \times S^{m-2}_{k} = \frac{1}{(f'x)^{2m-1}} S \left[ \frac{k!\,(m-2)!\,((m-1)\overset{2}{\mathfrak{a}}-\overset{1}{\mathfrak{a}})}{\overset{1}{\mathfrak{a}}!\,\overset{1}{\mathfrak{b}}!\,\ldots\ldots\ldots\,\overset{m}{\mathfrak{a}}!\,\overset{m}{\mathfrak{b}}!} \left(\frac{f'x}{1!}\right)^{\overset{1}{\mathfrak{a}}+\overset{1}{\mathfrak{b}}} \cdots \left(\frac{f^{\mu}x}{m!}\right)^{\overset{m}{\mathfrak{a}}+\overset{m}{\mathfrak{b}}} \right]$$

$$(\overset{1}{\mathfrak{a}}+\overset{1}{\mathfrak{b}})+2(\overset{2}{\mathfrak{a}}+\overset{2}{\mathfrak{b}})+\cdots+m(\overset{m}{\mathfrak{a}}+\overset{m}{\mathfrak{b}})=2m-1$$

$$(\overset{1}{\mathfrak{a}}+\overset{1}{\mathfrak{b}})+(\overset{2}{\mathfrak{a}}+\overset{2}{\mathfrak{b}})+\cdots+(\overset{m}{\mathfrak{a}}+\overset{m}{\mathfrak{b}})=k+m-1$$

$$\overset{1}{\mathfrak{a}}+2\overset{2}{\mathfrak{a}}+\cdots+m\overset{m}{\mathfrak{a}}=m+1$$

$$\overset{1}{\mathfrak{a}}+\overset{2}{\mathfrak{a}}+\cdots+\overset{m}{\mathfrak{a}}=m-1$$

et en faisant $\overset{h}{\mathfrak{a}}+\overset{h}{\mathfrak{b}}=\overset{h}{\mathfrak{c}}$ et réduisant en même tems au-moyen de la propos. III:

$$\overset{1}{S}{}^{m}_{m-2}\, S^{m-2}_{k} = \frac{1}{(f'x)^{2m-1}} S \left[ \frac{k!\,(m-2)!\,((m-1)\overset{2}{\mathfrak{a}}-\overset{1}{\mathfrak{a}})\,\overset{1}{\mathfrak{c}}_{\overset{1}{\mathfrak{a}}}\cdots\overset{m}{\mathfrak{c}}_{\overset{m}{\mathfrak{a}}}}{\overset{1}{\mathfrak{c}}!\,\ldots\ldots\,\overset{m}{\mathfrak{c}}!} \left(\frac{f'x}{1!}\right)^{\overset{1}{\mathfrak{c}}} \cdots \left(\frac{f^{\mu}x}{m!}\right)^{\overset{m}{\mathfrak{c}}} \right]$$

$$\overset{1}{\mathfrak{c}}+2\overset{2}{\mathfrak{c}}+\cdots+m\overset{m}{\mathfrak{c}}=2m-1$$

$$\overset{1}{\mathfrak{c}}+\overset{2}{\mathfrak{c}}+\cdots+\overset{m}{\mathfrak{c}}=k+m-1$$

$$\overset{1}{\mathfrak{a}}+2\overset{2}{\mathfrak{a}}+\cdots+m\overset{m}{\mathfrak{a}}=m+1$$

$$\overset{1}{\mathfrak{a}}+\overset{2}{\mathfrak{a}}+\cdots+\overset{m}{\mathfrak{a}}=m-1.$$

Mais puisque la plus petite des deux valeurs, que peut prendre $\overset{1}{\mathfrak{a}}$, est $m-3$, et que $\overset{1}{\mathfrak{c}}$ ne doit pas être $<\overset{1}{\mathfrak{a}}$, remplaçons $\overset{1}{\mathfrak{a}}$ par $\overset{1}{\mathfrak{a}}+m-3$ et $\overset{1}{\mathfrak{c}}$ par $\overset{1}{\mathfrak{c}}+m-3$, et nous aurons après les réductions convenables:

$$\overset{1}{S}{}^{m}_{m-2}\, S^{m-2}_{k} = \frac{1}{(f'x)^{m+2}} \times$$

$$S\left[\frac{k!\,(m-2)!\,((m-1)\overset{2}{a}-\overset{1}{a}-(m-3))\,(\overset{1}{c}+m-3)_{\overset{1}{a}+m-3}\,\overset{2}{c}_{\overset{2}{a}}\cdots\overset{m}{c}_{\overset{m}{a}}}{(\overset{1}{c}+m-3)!\,\overset{2}{c}!\cdots\overset{m}{c}!}\left(\frac{f'x}{1!}\right)^{\overset{1}{c}}\cdots\left(\frac{f^{\mu}x}{m!}\right)^{\overset{m}{c}}\right]$$

$$\overset{1}{c}+2\overset{2}{c}+\cdots+m\overset{m}{c}=m+2$$

$$\overset{1}{c}+\overset{2}{c}+\cdots+\overset{m}{c}=k+2$$

$$\overset{1}{a}+2\overset{2}{a}+\cdots+m\overset{m}{a}=4$$

$$\overset{1}{a}+\overset{2}{a}+\cdots+\overset{m}{a}=2$$

ce qui, au moyen de la prop. III et vu que $\overset{4}{a}, \overset{5}{a}$, etc. $=o$, se réduit encore à:

$$\overset{1}{S}{}^{m}_{m-2}\,S^{m-2}_{k}=$$

$$\frac{1}{(f'x)^{m+2}}\,S\left[\frac{k!\,(m-2)\,((m-1)\overset{2}{a}-\overset{1}{a}-(m-3))\,(\overset{1}{c}+m-3)_{\overset{1}{a}+m-3}\,\overset{2}{c}_{\overset{2}{a}}\,\overset{3}{c}_{\overset{3}{a}}}{(\overset{1}{c}+m-3)_{m-3}\,\overset{1}{c}!\cdots\overset{m}{c}!}\left(\frac{f'x}{1!}\right)^{\overset{1}{c}}\cdots\left(\frac{f^{\mu}x}{m!}\right)^{\overset{m}{c}}\right]$$

$$\overset{1}{c}+2\overset{2}{c}+\cdots+m\overset{m}{c}=m+2$$

$$\overset{1}{c}+\overset{2}{c}+\cdots+\overset{m}{c}=k+2$$

$$\overset{1}{a}+2\overset{2}{a}+3\overset{3}{a}=4$$

$$\overset{1}{a}+\overset{2}{a}+\overset{3}{a}=2$$

Les deux dernières équations de condition fournissant:

| $\overset{1}{a}$ | $\overset{2}{a}$ | $+\,2\overset{3}{a}=2$ |
|---|---|---|
| 0 | 2 | 0 |
| 1 | 0 | 1 |

on aura:

$$\overset{1}{S}{}^{m}_{m-2}\,S^{m-2}_{k}=\frac{1}{(f'x)^{m+2}}\,S\left[\frac{k!\,(m-2)\,((m+1)\,\overset{2}{c}_{2}-\overset{1}{c}\,\overset{3}{c})}{\overset{1}{c}!\cdots\overset{m}{c}!}\left(\frac{f'x}{1!}\right)^{\overset{1}{c}}\cdots\left(\frac{f^{\mu}x}{m!}\right)^{\overset{m}{c}}\right]$$

$$\overset{1}{c}+2\overset{2}{c}+\cdots+m\overset{m}{c}=m+2$$
$$\overset{1}{c}+\overset{2}{c}+\cdots+\overset{m}{c}=k+2$$

et puisqu'en même tems:

$$\overset{1}{S}{}^{m}_{k}=\frac{1}{(f'x)^{m+1}}\,S\left[\frac{k!\,((m-1)\,\overset{2}{c}-\overset{1}{c})}{\overset{1}{c}!\cdots\cdots\overset{m}{c}!}\left(\frac{f'x}{1!}\right)^{\overset{1}{c}}\cdots\left(\frac{f^{\mu}x}{m!}\right)^{\overset{m}{c}}\right]=$$
$$\overset{1}{c}+2\overset{2}{c}+\cdots+m\overset{m}{c}=m+1$$
$$\overset{1}{c}+\overset{2}{c}+\cdots+\overset{m}{c}=k+1$$

$$\frac{1}{(f'x)^{m+2}}\,S\left[\frac{k!\,(\overset{1}{c}+1)\,[(m-1)\,\overset{2}{c}-((\overset{1}{c}+1)-1)]}{(\overset{1}{c}+1)!\,\overset{2}{c}!\cdots\cdots\overset{m}{c}!}\left(\frac{f'x}{1!}\right)^{\overset{1}{c}+1}\left(\frac{f''x}{2!}\right)^{\overset{2}{c}}\cdots\left(\frac{f^{\mu}x}{m!}\right)^{\overset{m}{c}}\right]$$
$$(\overset{1}{c}+1)+2\overset{2}{c}+\cdots+m\overset{m}{c}=m+2$$
$$(\overset{1}{c}+1)+\overset{2}{c}+\cdots+\overset{m}{c}=k+2$$

ou bien, en écrivant $\overset{1}{c}$ au lieu de $\overset{1}{c}+1$, d'où, à cause du nouveau facteur $\overset{1}{c}$ et parce que $o!=1$, il ne peut résulter aucun changement dans l'aggrégat entier:

$$\overset{1}{S}{}^{m}_{k}=\frac{1}{(f'x)^{m+2}}\,S\left[\frac{k!\,\overset{1}{c}\,((m-1)\,\overset{2}{c}-(\overset{1}{c}-1))}{\overset{1}{c}!\cdots\cdots\overset{m}{c}!}\left(\frac{f'x}{1!}\right)^{\overset{1}{c}}\cdots\left(\frac{f^{\mu}x}{m!}\right)^{\overset{m}{c}}\right]$$
$$\overset{1}{c}+2\overset{2}{c}+\cdots+m\overset{m}{c}=m+2$$
$$\overset{1}{c}+\overset{2}{c}+\cdots+\overset{m}{c}=k+2$$

on obtient finalement:

$$\overset{2}{S}{}^{m}_{k}=\overset{1}{S}{}^{m}_{m-2}\,S^{m-2}_{k}-\overset{1}{S}{}^{m}_{k}=$$

$$\frac{1}{(f'x)^{m+2}}\,S\left[\frac{k!\,[(m-2)\,((m+1)\,\overset{2}{c}_2-\overset{1}{c}\,\overset{3}{c})-\overset{1}{c}((m-1)\,\overset{2}{c}-(\overset{1}{c}-1))]}{\overset{1}{c}!\cdots\cdots\overset{m}{c}!}\left(\frac{f'x}{1!}\right)^{\overset{1}{c}}\cdots\left(\frac{f^{\mu}x}{m!}\right)^{\overset{m}{c}}\right]\ (L)$$

$$\overset{1}{c}+2\overset{2}{c}+\cdots+m\overset{m}{c}=m+2$$

$$\overset{1}{c}+\overset{2}{c}+\cdots+\overset{m}{c}=k+2$$

Une marche absolument semblable à celle suivie dans les deux cas particuliers précédens conduirait encore à ce résultat :

$$\overset{3}{S}{}^{m}_{k}=\frac{1}{(f'x)^{m+3}}\times \qquad (M)$$

$$S\left[k!\,\frac{(m-3)\left[2(m+2)_3\overset{2}{c}_3-(m+1)\overset{1}{c}\overset{2}{c}\overset{3}{c}+2\overset{1}{c}_2\overset{4}{c}\right]-\overset{1}{c}\left[(m-2)\left((m+1)\overset{2}{c}_2-(\overset{1}{c}-1)\overset{3}{c}\right)-(\overset{1}{c}-1)\left((m-1)\overset{2}{c}-(\overset{1}{c}-2)\right)\right]}{\overset{1}{c}!\cdots\cdots\overset{m}{c}!}\left(\frac{f'x}{1!}\right)^{\overset{1}{c}}\cdots\left(\frac{f^{\mu}x}{m!}\right)^{\overset{m}{c}}\right]$$

$$\overset{1}{c}+2\overset{2}{c}+\cdots+m\overset{m}{c}=m+3$$

$$\overset{1}{c}+\overset{2}{c}+\cdots+\overset{m}{c}=k+3$$

qui, conjointement avec les deux antérieurs, paraît pleinement justifier l'hypothèse suivante :

$$\overset{p}{S}{}^{m}_{k}=\frac{k!}{(f'x)^{m+p}}\,S\left[\frac{\varphi(\overset{1}{a},\overset{2}{a},\cdots\overset{p+1}{a})}{\overset{1}{a}!\cdots\cdots\overset{m}{a}!}\left(\frac{f'x}{1!}\right)^{\overset{1}{a}}\cdots\left(\frac{f^{\mu}x}{m!}\right)^{\overset{m}{a}}\right] \qquad (N)$$

$$\overset{1}{a}+2\overset{2}{a}+\cdots+m\overset{m}{a}=m+p$$

$$\overset{1}{a}+\overset{2}{a}+\cdots+\overset{m}{a}=k+p$$

où $\varphi(\overset{1}{a},\overset{2}{a},\cdots\overset{p+1}{a})$ désigne une fonction, encore inconnue, des quantités: $m, p, \overset{1}{a}, \overset{2}{a}, \cdots \overset{p+1}{a}$, et dont la forme doit être déterminée de manière à pouvoir satisfaire à l'équation:

$$\overset{p+1}{S}{}^{m}_{k}=(\text{v. G.})\ \overset{p}{S}{}^{m}_{m-(p+1)}\ S^{m-(p+1)}_{k}-\overset{p}{S}{}^{m}_{k}=$$

$$\frac{k!}{(f'x)^{m+p+1}}\,S\left[\frac{\varphi(\overset{1}{a},\overset{2}{a},\cdots\overset{p+2}{a})}{\overset{1}{a}!\cdots\cdots\overset{m}{a}!}\left(\frac{f'x}{1!}\right)^{\overset{1}{a}}\cdots\left(\frac{f^{\mu}x}{m!}\right)^{\overset{m}{a}}\right]$$

$$\overset{1}{a}+2\overset{2}{a}+\cdots+m\overset{m}{a}=m+p+1$$

$$\overset{1}{a}+\overset{2}{a}+\cdots+\overset{m}{a}=k+p+1$$

*

condition que nous tâcherons de remplir, en imitant la méthode employée ci-dessus pour les trois premiers cas particuliers: $p = 1$, $p = 2$ et $p = 3$.

L'hypothèse $(N)$ rend d'abord:

$$\overset{p}{S}{}^{m}_{m-(p+1)}\, S^{m-(p+1)}_{k} = \frac{1}{(f'x)^{m+p}}\, S\left[\frac{(m-p-1)!\,\varphi(\overset{1}{\mathfrak{a}},\ldots\overset{p+1}{\mathfrak{a}})}{\overset{1}{\mathfrak{a}}!\cdots\cdots\overset{m}{\mathfrak{a}}!}\left(\frac{f'x}{1!}\right)^{\overset{1}{\mathfrak{a}}}\cdots\left(\frac{f^{\mu}x}{m!}\right)^{\overset{m}{\mathfrak{a}}}\right]\times$$

$$\overset{1}{\mathfrak{a}} + 2\overset{2}{\mathfrak{a}} + \cdots + m\overset{m}{\mathfrak{a}} = m + p$$

$$\overset{1}{\mathfrak{a}} + \overset{2}{\mathfrak{a}} + \cdots + \overset{m}{\mathfrak{a}} = m - 1$$

$$\frac{1}{(f'x)^{m-p-1}}\, S\left[\frac{\lambda!}{\mathfrak{b}!\cdots\cdots\overset{m-p-1}{\mathfrak{b}}!}\left(\frac{f'x}{1!}\right)^{\overset{1}{\mathfrak{b}}}\cdots\left(\frac{f^{\mu-\pi-1}x}{(m-p-1)!}\right)^{\overset{m-p-1}{\mathfrak{b}}}\right] \text{(v. E.)}$$

$$\overset{1}{\mathfrak{b}} + 2\overset{2}{\mathfrak{b}} + \cdots + (m-p-1)\overset{m-p-1}{\mathfrak{b}} = m-p-1$$

$$\overset{1}{\mathfrak{b}} + \overset{2}{\mathfrak{b}} + \cdots + \overset{m-p-1}{\mathfrak{b}} = k$$

ou bien, en introduisant $\overset{m-p}{\mathfrak{b}}$, $\overset{m-p+1}{\mathfrak{b}}$, $\cdots\cdots \overset{m}{\mathfrak{b}}$, qui, vu que les deux dernières équations de condition les rendent toujours $= o$, ne peuvent aucunement altérer l'expression $S^{m-(p+1)}_{k}$; puis, effectuant la multiplication:

$$\overset{p}{S}{}^{m}_{m-(p+1)}\, S^{m-(p+1)}_{k} =$$

$$\frac{1}{(f'x)^{2m-1}}\, S\left[\frac{k!\,(m-p-1)!\,\varphi(\overset{1}{\mathfrak{a}},\ldots\overset{p+1}{\mathfrak{a}})}{\overset{1}{\mathfrak{a}}!\,\overset{1}{\mathfrak{b}}!\cdots\cdots\cdots\cdots\overset{m}{\mathfrak{a}}!\,\overset{m}{\mathfrak{b}}!}\left(\frac{f'x}{1!}\right)^{\overset{1}{\mathfrak{a}}+\overset{1}{\mathfrak{b}}}\cdots\cdots\left(\frac{f^{\mu}x}{m!}\right)^{\overset{m}{\mathfrak{a}}+\overset{m}{\mathfrak{b}}}\right]$$

$$(\overset{1}{\mathfrak{a}}+\overset{1}{\mathfrak{b}}) + 2(\overset{2}{\mathfrak{a}}+\overset{2}{\mathfrak{b}}) + \cdots + m(\overset{m}{\mathfrak{a}}+\overset{m}{\mathfrak{b}}) = 2m - 1$$

$$(\overset{1}{\mathfrak{a}}+\overset{1}{\mathfrak{b}}) + (\overset{2}{\mathfrak{a}}+\overset{2}{\mathfrak{b}}) + \cdots + (\overset{m}{\mathfrak{a}}+\overset{m}{\mathfrak{b}}) = k + m - 1$$

$$\overset{1}{\mathfrak{a}} + 2\overset{2}{\mathfrak{a}} + \cdots + m\overset{m}{\mathfrak{a}} = m + p$$

$$\overset{1}{\mathfrak{a}} + \overset{2}{\mathfrak{a}} + \cdots + \overset{m}{\mathfrak{a}} = m - 1$$

équation qui, en faisant $\overset{h}{\mathfrak{a}} + \overset{h}{\mathfrak{b}} = \overset{h}{\mathfrak{c}}$ et transformant suivant la propos. III, devient:

$$\overset{p}{S}_{m-(p+1)}\overset{m}{S}{}^{m-(p+1)}_{k} = \frac{1}{(f'x)^{2m-1}} \times$$

$$S\left[\frac{k!\,(m-p-1)!\,\varphi(\overset{1}{a},\cdots\overset{p+1}{a})\,\overset{1}{c}_{\overset{1}{a}}\cdots\overset{m}{c}_{\overset{m}{a}}}{\overset{1}{c}!\,\cdots\cdots\,\overset{m}{c}!}\left(\frac{f'x}{1!}\right)^{\overset{1}{c}}\cdots\left(\frac{f''x}{m!}\right)^{\overset{m}{c}}\right]$$

$$\overset{1}{c}+2\overset{2}{c}+\cdots+m\overset{m}{c}=2m-1$$

$$\overset{1}{c}+\overset{2}{c}+\cdots+\overset{m}{c}=k+m-1$$

$$\overset{1}{a}+2\overset{2}{a}+\cdots+m\overset{m}{a}=m+p$$

$$\overset{1}{a}+\overset{2}{a}+\cdots+\overset{m}{a}=m-1$$

Les deux dernières équations de condition produisant :

$$\overset{2}{a}+2\overset{3}{a}+\cdots+(m-1)\overset{m}{a}=p+1$$

il est évident que la plus grande valeur que puisse avoir $\overset{2}{a}$ est: $p+1$, d'où il faut conclure que la plus petite qu'on puisse assigner à $\overset{1}{a}$ est : $m-p-2$. Observan en outre que toute valeur de $\overset{1}{c}$ prise au-dessous de $\overset{1}{a}$ devient inutile, parce qu'elle rend le facteur $\overset{1}{c}_{\overset{1}{a}}=o$, on est autorisé à remplacer à la fois $\overset{1}{a}$ par $\overset{1}{a}+m-p-2$ et $\overset{1}{c}$ par $\overset{1}{c}+m-p-2$. Cela fait, on obtient après les réductions convenables:

$$\overset{p}{S}_{m-(p+1)}\overset{m}{S}{}^{m-(p+1)}_{k} = \frac{k!}{(f'x)^{m+p+1}} \times$$

$$S\left[\frac{(m-p-1)!\,\varphi(\overset{1}{a}+m-p-2,\,\overset{2}{a},\cdots\overset{p+1}{a})\,(\overset{1}{c}+m-p-2)_{\overset{1}{a}+m-p-2}\,\overset{2}{c}_{\overset{2}{a}}\cdots\overset{m}{c}_{\overset{m}{a}}}{(\overset{1}{c}+m-p-2)!\,\overset{2}{c}!\cdots\cdots\overset{m}{c}!}\left(\frac{f'x}{1!}\right)^{\overset{1}{c}}\cdots\left(\frac{f''x}{m!}\right)^{\overset{m}{c}}\right]$$

$$\overset{1}{c}+2\overset{2}{c}+\cdots+m\overset{m}{c}=m+p+1$$

$$\overset{1}{c}+\overset{2}{c}+\cdots+\overset{m}{c}=k+p+1$$

$$\overset{1}{a}+2\overset{2}{a}+\cdots+m\overset{m}{a}=2(p+1)$$

$$\overset{1}{a}+\overset{2}{a}+\cdots+\overset{m}{a}=p+1$$

et, puisque la condition: $\overset{2}{a}+2\overset{3}{a}+\cdots+(m-1)\overset{m}{a}=p+1$ fait disparaître tous les $a$ au delà de $\overset{p+2}{a}$, et qu'en vertu de la prop. III:

$$\frac{(m-p-1)!\,(\overset{1}{c}+m-p-2)_{\overset{1}{a}+m-p-2}}{(\overset{1}{c}+m-p-2)!}=\frac{(m-p-1)!\,(\overset{1}{c}+m-p-2)_{\overset{1}{a}+m-p-2}}{(m-p-2)!\,\overset{1}{c}!\,(\overset{1}{c}+m-p-2)_{m-p-2}}=\frac{(m-p-1)\,\overset{1}{c}_{\overset{1}{a}}}{(\overset{1}{a}+m-p-2)_{\overset{1}{a}}}$$

on en tire:

$$\overset{p}{S}_{m-(p+1)}\overset{m}{S}{}^{m-(p+1)}_{k}=\frac{k!\,(m-p-1)}{(f'x)^{m+p+1}}\times$$

$$S\left[\frac{\varphi(\overset{1}{a}+m-p-2,\ \overset{2}{a},\cdots\overset{p+1}{a})\cdot\overset{1}{c}_{\overset{1}{a}}\cdots\overset{p+2}{c}_{\overset{p+2}{a}}}{(\overset{1}{a}+m-p-2)_{\overset{1}{a}}\cdot\overset{1}{c}!\cdots\overset{m}{c}!}\left(\frac{f'x}{1!}\right)^{\overset{1}{c}}\cdots\left(\frac{f^{m}x}{m!}\right)^{\overset{m}{c}}\right]$$

$$\begin{aligned}\overset{1}{a}+2\overset{2}{a}+\cdots+(p+2)\overset{p+2}{a}&=2(p+1)\\ \overset{1}{a}+\overset{2}{a}+\cdots+\overset{p+2}{a}&=p+1\\ \overset{1}{c}+2\overset{2}{c}+\cdots+m\overset{m}{c}&=m+p+1\\ \overset{1}{c}+\overset{2}{c}+\cdots+\overset{m}{c}&=k+p+1\end{aligned}$$

Or comme l'hypothèse $(N)$ nous donne immédiatement:

$$\overset{p}{S}{}^{m}_{k}=\frac{k!}{(f'x)^{m+p}}\,S\left[\frac{\varphi(\overset{1}{c},\cdots\overset{p+1}{c})}{\overset{1}{c}!\cdots\overset{m}{c}!}\left(\frac{f'x}{1!}\right)^{\overset{1}{c}}\cdots\left(\frac{f^{m}x}{m!}\right)^{\overset{m}{c}}\right]=$$

$$\begin{aligned}\overset{1}{c}+2\overset{2}{c}+\cdots+m\overset{m}{c}&=m+p\\ \overset{1}{c}+\overset{2}{c}+\cdots+\overset{m}{c}&=k+p\end{aligned}$$

$$\frac{k!}{(f'x)^{m+p+1}}\,S\left[\frac{(\overset{1}{c}+1)\,\varphi((\overset{1}{c}+1)-1.\ \overset{2}{c},\cdots\overset{p+1}{c})}{(\overset{1}{c}+1)!\,\overset{2}{c}!\cdots\overset{m}{c}!}\left(\frac{f'x}{1!}\right)^{\overset{1}{c}+1}\left(\frac{f''x}{2!}\right)^{\overset{2}{c}}\cdots\left(\frac{f^{m}x}{m!}\right)^{\overset{m}{c}}\right]$$

$$(\overset{1}{c}+1)+2\overset{2}{c}+\cdots+m\overset{m}{c}=m+p+1$$

$$(\overset{1}{c}+1)+\overset{2}{c}+\cdots+\overset{m}{c}=k+p+1$$

on aura, en mettant $\overset{1}{c}$ à la place de $\overset{1}{c}+1$, ce qui, comme nous avons eu occasion d'observer déja deux fois, ne change point du tout cet aggrégat:

$$\overset{p}{S}{}^{m}_{k}=\frac{k!}{(f'x)^{m+p+1}}\,S\left[\frac{\overset{1}{c}\cdot\varphi(\overset{1}{c}-1,\overset{2}{c},\cdots\overset{p+1}{c})}{\overset{1}{c}!\cdots\cdots\overset{m}{c}!}\left(\frac{f'x}{1!}\right)^{\overset{1}{c}}\cdots\left(\frac{f^{\mu}x}{m!}\right)^{\overset{m}{c}}\right]$$

$$\overset{1}{c}+2\overset{2}{c}+\cdots+m\overset{m}{c}=m+p+1$$

$$\overset{1}{c}+\overset{2}{c}+\cdots+\overset{m}{c}=k+p+1$$

Enfin, en retranchant cette expression de la sus-trouvée, il résulte:

$$\overset{p+1}{S}{}^{m}_{k}=\overset{p}{S}_{m-(p+2)}\overset{m}{S}{}^{m-(p+2)}_{k}-\overset{p}{S}{}^{m}_{k}=\frac{k!}{(f'x)^{m+p+1}}\times$$

$$S\left[\frac{\dfrac{(m-p-1)\,\varphi(\overset{1}{a}+m-p-2,\overset{2}{a},\cdots\overset{p+1}{a})}{(\overset{1}{a}+m-p-2)_{\overset{1}{a}}}\,\overset{1}{c}_{\overset{1}{a}}\cdots\overset{p+2}{c}_{p+\overset{}{a}2}-\overset{1}{c}\cdot\varphi(\overset{1}{c}-1,\overset{2}{c},\cdots\overset{p+1}{c})}{\overset{1}{c}!\cdots\cdots\cdots\overset{m}{c}!}\left(\frac{f'x}{1!}\right)^{\overset{1}{c}}\cdots\left(\frac{f^{\mu}x}{m!}\right)^{\overset{m}{c}}\right]\quad(P)$$

$$\overset{1}{a}+2\overset{2}{a}+\cdots+(p+2)\overset{p+2}{a}=2(p+1)$$

$$\overset{1}{a}+\overset{2}{a}+\cdots+\overset{p+2}{a}=p+1$$

$$\overset{1}{c}+2\overset{2}{c}+\cdots+m\overset{m}{c}=m+p+1$$

$$\overset{1}{c}+\overset{2}{c}+\cdots+\overset{m}{c}=k+p+1$$

expression qui, par suite de l'hypothèse ($N$), devra être identique avec celle-ci:

$$\frac{k!}{(f'x)^{m+p+1}}\,S\left[\frac{\varphi(\overset{1}{c},\cdots\overset{p+2}{c})}{\overset{1}{c}!\cdots\overset{m}{c}!}\left(\frac{f'x}{1!}\right)^{\overset{1}{c}}\cdots\left(\frac{f^{\mu}x}{m!}\right)^{\overset{m}{c}}\right]$$

$$\overset{1}{c}+2\overset{2}{c}+\cdots+m\overset{m}{c}=m+p+1$$

$$\overset{1}{c}+\overset{2}{c}+\cdots+\overset{m}{c}=k+p+1$$

condition qui de sa part exige l'identité de cette équation:

$$\varphi(\overset{1}{\mathfrak{c}}, \cdots \overset{p+2}{\mathfrak{c}}) = (m-p-1)\, S\left[\frac{\varphi(\overset{1}{\mathfrak{a}}+m-p-2,\ \overset{2}{\mathfrak{a}},\cdots \overset{p+1}{\mathfrak{a}})}{(\overset{1}{\mathfrak{a}}+m-p-2)_{\overset{1}{\mathfrak{a}}}}\ \overset{1}{\mathfrak{c}}_{\overset{1}{\mathfrak{a}}}\cdots \overset{p+2}{\mathfrak{c}}_{\overset{p+2}{\mathfrak{a}}}\right] -$$

$$\overset{1}{\mathfrak{c}}\cdot\varphi(\overset{1}{\mathfrak{c}}-1,\ \overset{2}{\mathfrak{c}},\cdots \overset{p+1}{\mathfrak{c}}) \qquad (Q)$$

Or nous avançons que, pour y satisfaire, la fonction $\varphi$ doit être telle que:

$$\varphi(\overset{1}{\mathfrak{c}}, \cdots \overset{n}{\mathfrak{c}}) = (m+n-2)!\ M\times S\left[(-1)^{\overset{1}{\mathfrak{a}}}(m-n+1+\mathfrak{b})\ \frac{\overset{1}{\mathfrak{c}}_{\overset{1}{\mathfrak{a}}}}{(m+n-2)_{\overset{1}{\mathfrak{a}}}}\ \overset{2}{\mathfrak{c}}_{\overset{2}{\mathfrak{a}}}\cdots \overset{n}{\mathfrak{c}}_{\overset{n}{\mathfrak{a}}}\right]$$

$$\overset{1}{\mathfrak{a}}+2\overset{2}{\mathfrak{a}}+\cdots+n\overset{n}{\mathfrak{a}} = 2(n-1)-\mathfrak{b}$$

$$\overset{1}{\mathfrak{a}}+\overset{2}{\mathfrak{a}}+\cdots+\overset{n}{\mathfrak{a}} = n-1 \qquad (R)$$

où l'initiale $M$ doit indiquer une expression ou entièrement constante ou dépendante de la seule quantité $m$.

Nous allons prouver cette assertion.

L'équation $(R)$, dont pour un moment nous supposons la réalité, donnant lieu à ces deux autres:

$$\varphi(\overset{1}{\mathfrak{a}}+m-p-2,\ \overset{2}{\mathfrak{a}},\cdots \overset{p+1}{\mathfrak{a}}) = (m+p-1)!\ M\times$$

$$S\left[(-1)^{\overset{1}{\mathfrak{e}}}(m-p+\mathfrak{b})\ \frac{(\overset{1}{\mathfrak{a}}+m-p-2)_{\overset{1}{\mathfrak{e}}}}{(m+p-1)_{\overset{1}{\mathfrak{e}}}}\ \overset{2}{\mathfrak{a}}_{\overset{2}{\mathfrak{e}}}\cdots \overset{p+1}{\mathfrak{a}}_{\overset{p+1}{\mathfrak{e}}}\right]$$

$$\overset{1}{\mathfrak{e}}+2\overset{2}{\mathfrak{e}}+\cdots+(p+1)\overset{p+1}{\mathfrak{e}} = 2p-\mathfrak{b}$$

$$\overset{1}{\mathfrak{e}}+\overset{2}{\mathfrak{e}}+\cdots+\overset{p+1}{\mathfrak{e}} = p$$

$$\varphi(\overset{1}{\mathfrak{c}}-1,\ \overset{2}{\mathfrak{c}},\cdots \overset{p+1}{\mathfrak{c}}) = (m+p-1)!\ M\times S\left[(-1)^{\overset{1}{\mathfrak{e}}}(m-p+\mathfrak{b})\ \frac{(\overset{1}{\mathfrak{c}}-1)_{\overset{1}{\mathfrak{e}}}}{(m+p-1)_{\overset{1}{\mathfrak{e}}}}\ \overset{2}{\mathfrak{c}}_{\overset{2}{\mathfrak{e}}}\cdots \overset{p+1}{\mathfrak{c}}_{\overset{p+1}{\mathfrak{e}}}\right]$$

(mêmes conditions)

nous aurons en substituant et désignant le second membre de l'équation $(Q)$ par $Y$:

$$Y = (m-p-1)\cdot(m+p-1)!\; M \times$$

$$S\left[(-1)^{\overset{1}{\mathfrak{e}}}\, \frac{m-p+\mathfrak{b}}{(\overset{1}{\mathfrak{a}}+m-p-2)_{\substack{1\\ \mathfrak{a}}}} \times \frac{(\overset{1}{\mathfrak{a}}+m-p-2)_{\substack{1\\ \mathfrak{e}}}}{(m+p-1)_{\substack{1\\ \mathfrak{e}}}} \times \overset{2}{\mathfrak{a}}_{\substack{2\\ \mathfrak{e}}} \cdots \overset{p+1}{\mathfrak{a}}_{\substack{p+1\\ \mathfrak{e}}} \times \overset{1}{\mathfrak{c}}_{\substack{1\\ \mathfrak{a}}} \cdots \overset{p+2}{\mathfrak{c}}_{\substack{p+2\\ \mathfrak{a}}}\right]$$

$$-\,(m+p-1)!\; M \times S\left[(-1)^{\overset{1}{\mathfrak{e}}}(m-p+\mathfrak{b})\, \frac{(\overset{1}{\mathfrak{e}}+1)\,\overset{1}{\mathfrak{c}}_{\substack{1\\ \mathfrak{e}+1}}}{(m+p-1)_{\substack{1\\ \mathfrak{e}}}}\, \overset{2}{\mathfrak{c}}_{\substack{2\\ \mathfrak{e}}} \cdots \overset{p+1}{\mathfrak{c}}_{\substack{p+1\\ \mathfrak{e}}}\right]$$

$$\begin{aligned}
\overset{1}{\mathfrak{a}} + 2\overset{2}{\mathfrak{a}} + \cdots + (p+2)\overset{p+2}{\mathfrak{a}} &= 2(p+1)\\
\overset{1}{\mathfrak{a}} + \overset{2}{\mathfrak{a}} + \cdots + \overset{p+2}{\mathfrak{a}} &= p+1.\\
\overset{1}{\mathfrak{e}} + 2\overset{2}{\mathfrak{e}} + \cdots + (p+1)\overset{p+1}{\mathfrak{e}} &= 2p-\mathfrak{b}\\
\overset{1}{\mathfrak{e}} + \overset{2}{\mathfrak{e}} + \cdots + \overset{p+1}{\mathfrak{e}} &= p
\end{aligned}$$

où $\overset{1}{\mathfrak{c}}\,(\overset{1}{\mathfrak{c}}-1)_{\substack{1\\ \mathfrak{e}}}$ a été remplacé par $(\overset{1}{\mathfrak{e}}+1)\,\overset{1}{\mathfrak{c}}_{\substack{1\\ \mathfrak{e}+1}}$.

Mais, considérant que les solutions des deux dernières équations de condition restent les mêmes lorsqu'à leurs premiers membres on ajoute respectivement les termes $(p+2)\overset{p+2}{\mathfrak{e}}$ et $\overset{p+2}{\mathfrak{e}}$, qui n'y peuvent être qu'égaux à zéro; de plus, faisant $\mathfrak{b} = p-\mathfrak{d}$ et remplaçant $\frac{\overset{1}{\mathfrak{e}}+1}{(m+p-1)_{\substack{1\\ \mathfrak{e}}}}$ par $\frac{m+p}{(m+p)_{\substack{1\\ \mathfrak{e}+1}}}$, expression absolument identique avec celle-là, l'équation précédente pourra prendre cette forme:

$$Y = (m+p)!\; M \times S\left[(-1)^{\overset{1}{\mathfrak{e}}+1}(m-\mathfrak{d})\, \frac{\overset{1}{\mathfrak{c}}_{\substack{1\\ \mathfrak{e}+1}}}{(m+p)_{\substack{1\\ \mathfrak{e}+1}}}\, \overset{2}{\mathfrak{c}}_{\substack{2\\ \mathfrak{e}}} \cdots \overset{p+2}{\mathfrak{c}}_{\substack{p+2\\ \mathfrak{e}}}\right] +$$

$$(m-p-1)\cdot(m+p-1)!\; M \times$$

$$S\left[(-1)^{\overset{1}{\mathfrak{e}}}\, \frac{m-\mathfrak{d}}{(\overset{1}{\mathfrak{a}}+m-p-2)_{\substack{1\\ \mathfrak{a}}}} \times \frac{(\overset{1}{\mathfrak{a}}+m-p-2)_{\substack{1\\ \mathfrak{e}}}}{(m+p-1)_{\substack{1\\ \mathfrak{e}}}} \times \overset{2}{\mathfrak{a}}_{\substack{2\\ \mathfrak{e}}} \cdots \overset{p+2}{\mathfrak{a}}_{\substack{p+2\\ \mathfrak{e}}} \times \overset{1}{\mathfrak{c}}_{\substack{1\\ \mathfrak{a}}} \cdots \overset{p+2}{\mathfrak{c}}_{\substack{p+2\\ \mathfrak{a}}}\right]$$

$$\overset{2}{\mathfrak{a}} + 2\overset{3}{\mathfrak{a}} + \cdots + (p+1)\overset{p+2}{\mathfrak{a}} = p+1$$

$$\overset{2}{a} + \overset{3}{a} + \cdots + \overset{p+2}{a} = p + 1 - \overset{1}{a}$$
$$\overset{2}{c} + 2\overset{3}{c} + \cdots + (p+1)\overset{p+2}{c} = \mathfrak{d}$$
$$\overset{2}{c} + \overset{3}{c} + \cdots + \overset{p+2}{c} = p - \overset{1}{c}$$

Maintenant, dirigeons notre attention sur l'aggrégat contenu dans le second terme du second membre de cette dernière équation, aggrégat qui pourra être mis sous la forme suivante:

$$S\left[(-1)^{\overset{1}{c}}(m-\mathfrak{d})\,\frac{[m-(p+1-\overset{1}{a})-1]_{\overset{1}{c}}}{[m+(p+1-\overset{1}{a})+\overset{1}{a}-2]_{\overset{1}{c}}}\;\overset{2}{a}_{\overset{2}{c}}\cdots\overset{p+2}{a}_{\overset{p+2}{c}}\times\frac{\overset{1}{c}_{\overset{1}{a}}\cdots\overset{p+2}{c}_{\overset{p+2}{a}}}{(\overset{1}{a}+m-p-2)_{\overset{1}{a}}}\right]$$

$$\overset{2}{a} + 2\overset{3}{a} + \cdots + (p+1)\overset{p+2}{a} = (p+1-\overset{1}{a}) + \overset{1}{a}$$
$$\overset{2}{a} + \overset{3}{a} + \cdots + \overset{p+2}{a} = p + 1 - \overset{1}{a}$$
$$\overset{2}{c} + 2\overset{3}{c} + \cdots + (p+1)\overset{p+2}{c} = \mathfrak{d}$$
$$\overset{2}{c} + \overset{3}{c} + \cdots + \overset{p+2}{c} = [(p+1) - \overset{1}{a}] + \overset{1}{a} - 1 - \overset{1}{c}$$

ce qui en rend la partie, qui ne contient point les caractéristiques $c$, comparable à l'aggrégat de la formule de la prop. VI. Donc, pour pouvoir y appliquer cette formule, il faut d'abord examiner, quelles sont les limites de la variable $\overset{1}{c}$ du cas actuel. Or comme ici nous avons:

$$(\overset{1}{a} - \overset{1}{c}) + (\overset{2}{a} - \overset{2}{c}) + \cdots + (\overset{p+2}{a} - \overset{p+2}{c}) = 1$$
$$\text{et}\quad (\overset{1}{a} - \overset{1}{c}) + 2(\overset{2}{a} - \overset{2}{c}) + \cdots + (p+2)(\overset{p+2}{a} - \overset{p+2}{c}) = 2 + \mathfrak{b}$$

et qu'à cause des facteurs $\overset{2}{a}_{\overset{2}{c}}, \cdots \overset{p+2}{a}_{\overset{p+2}{c}}$ les $\overset{2}{c}, \cdots \overset{p+2}{c}$ ne doivent pas excéder les $\overset{2}{a}, \cdots \overset{p+2}{a}$, il s'ensuit que $\overset{1}{a} - \overset{1}{c}$ ne pourra jamais devenir $= 1$ et moins encore un autre nombre positif, mais qu'il devra être ou $o$ ou négatif: donc $\overset{1}{c}$ aura pour limites: $\overset{1}{a}$ et $p$, ce qui rend $u = 1$ dans la formule mentionnée. De plus, comme, par suite de nos quatre équations de condition, $\mathfrak{d} - (p - \overset{1}{c})$ ne pourra être $> (p+1) - (p+1-\overset{1}{a})$,

ou bien, $\mathfrak{d}$ pas $> p - (\overset{1}{\mathfrak{e}} - \overset{1}{\mathfrak{a}})$, la limite, prescrite par l'équation: $\mathfrak{b} = p - \mathfrak{d}$ ou $\mathfrak{b} + \mathfrak{d} = p$, ne gènera aucunement l'application de la prop. VI. Enfin, quant au multiplicateur $N(q, m, n)$, nous n'avons pas besoin d'en tenir compte dans le cas, qui nous occupe à présent, vu qu'à cause du facteur variable: $\frac{\overset{1}{c}_{\overset{1}{\mathfrak{e}}} \cdots \overset{p+2}{c}_{\overset{p+2}{\mathfrak{a}}}}{(\overset{1}{\mathfrak{a}} + m - p - 2)_{\overset{1}{\mathfrak{a}}}}$, nous sommes obligés de conserver encore les deux premières équations de condition. Tout cela nous autorise à modifier notre dernière équation de la manière suivante:

$$Y = (m+p)!\, M \times S\left[(-1)^{\overset{1}{\mathfrak{e}}+1}(m - \mathfrak{d})\, \frac{\overset{1}{c}_{\overset{1}{\mathfrak{e}}+1}}{(m+p)_{\overset{1}{\mathfrak{e}}+1}}\, \overset{2}{c}_{\overset{2}{\mathfrak{e}}} \cdots \overset{p+2}{c}_{\overset{p+2}{\mathfrak{e}}}\right] \times$$

$$\overset{2}{\mathfrak{e}} + 2\overset{3}{\mathfrak{e}} + \cdots + (p+1)\overset{p+2}{\mathfrak{e}} = \mathfrak{d}$$
$$\overset{2}{\mathfrak{e}} + \overset{3}{\mathfrak{e}} + \cdots + \overset{p+2}{\mathfrak{e}} = p - \overset{1}{\mathfrak{e}}$$

$$(m-p-1)\,(m+p-1)!\, M \times S\left[(-1)^{\overset{1}{\mathfrak{a}}}\, \frac{m+p-\overset{1}{\mathfrak{a}}}{(\overset{1}{\mathfrak{a}}+m-p-2)_{\overset{1}{\mathfrak{a}}}} \times \frac{(\overset{1}{\mathfrak{a}}+m-p-2)_{\overset{1}{\mathfrak{a}}}}{(m+p-1)_{\overset{1}{\mathfrak{a}}}} \times \overset{1}{c}_{\overset{1}{\mathfrak{a}}} \cdots \overset{p+2}{c}_{\overset{p+2}{\mathfrak{a}}}\right]$$

$$\overset{2}{\mathfrak{a}} + 2\overset{3}{\mathfrak{a}} + \cdots + (p+1)\overset{p+2}{\mathfrak{a}} = p+1$$
$$\overset{2}{\mathfrak{a}} + \overset{3}{\mathfrak{a}} + \cdots + \overset{p+2}{\mathfrak{a}} = p+1-\overset{1}{\mathfrak{a}}$$

$$= (m+p)!\, M \times S\left[(-1)^{\overset{1}{\mathfrak{e}}+1}(m - (p+1-(\mathfrak{b}+1)))\, \frac{\overset{1}{c}_{\overset{1}{\mathfrak{e}}+1}}{(m+p)_{\overset{1}{\mathfrak{e}}+1}}\, \overset{2}{c}_{\overset{2}{\mathfrak{e}}} \cdots \overset{p+2}{c}_{\overset{p+2}{\mathfrak{e}}}\right]$$

$$(\overset{1}{\mathfrak{e}}+1) + 2\overset{2}{\mathfrak{e}} + \cdots + (p+2)\overset{p+2}{\mathfrak{e}} = 2(p+1) - (\mathfrak{b}+1)$$
$$(\overset{1}{\mathfrak{e}}+1) + \overset{2}{\mathfrak{e}} + \cdots + \overset{p+2}{\mathfrak{e}} = p+1$$

$$+ (m+p)!\, M \times S\left[(-1)^{\overset{1}{\mathfrak{a}}}(m-(p+1))\, \frac{\overset{1}{c}_{\overset{1}{\mathfrak{a}}}}{(m+p)_{\overset{1}{\mathfrak{a}}}}\, \overset{2}{c}_{\overset{2}{\mathfrak{a}}} \cdots \overset{p+2}{c}_{\overset{p+2}{\mathfrak{a}}}\right]$$

*

$$\begin{aligned}\overset{1}{\mathfrak{a}}+2\overset{2}{\mathfrak{a}}+\cdots+(p+2)\overset{p+2}{\mathfrak{a}}&=2(p+1)\\ \overset{1}{\mathfrak{a}}+\overset{2}{\mathfrak{a}}+\cdots+\overset{p+2}{\mathfrak{a}}&=p+1\end{aligned}$$

$$=(m+p)!\;M\times S\left[(-1)^{\overset{1}{\mathfrak{a}}+1}(m-(p+1-\mathfrak{b}))\,\frac{\overset{1}{\mathfrak{c}}_{\overset{1}{\mathfrak{a}}+1}}{(m+p)_{\overset{1}{\mathfrak{a}}+1}}\,\overset{2}{\mathfrak{c}}_{\overset{2}{\mathfrak{a}}}\cdots\overset{p+2}{\mathfrak{c}}_{\overset{p+2}{\mathfrak{a}}}\right]-$$

$$\begin{aligned}(\overset{1}{\mathfrak{a}}+1)+2\overset{2}{\mathfrak{a}}+\cdots+(p+2)\overset{p+2}{\mathfrak{a}}&=2(p+1)-\mathfrak{b}\\ (\overset{1}{\mathfrak{a}}+1)+\overset{2}{\mathfrak{a}}+\cdots+\overset{p+2}{\mathfrak{a}}&=p+1\end{aligned}$$

$$(m+p)!\;M\times S\left[(-1)^{\overset{1}{\mathfrak{a}}+1}(m-(p+1))\,\frac{\overset{1}{\mathfrak{c}}_{\overset{1}{\mathfrak{a}}+1}}{(m+p)_{\overset{1}{\mathfrak{a}}+1}}\,\overset{2}{\mathfrak{c}}_{\overset{2}{\mathfrak{a}}}\cdots\overset{p+2}{\mathfrak{c}}_{\overset{p+2}{\mathfrak{a}}}\right]+$$

$$\begin{aligned}(\overset{1}{\mathfrak{a}}+1)+2\overset{2}{\mathfrak{a}}+\cdots+(p+2)\overset{p+2}{\mathfrak{a}}&=2(p+1)\\ (\overset{1}{\mathfrak{a}}+1)+\overset{2}{\mathfrak{a}}+\cdots+\overset{p+2}{\mathfrak{a}}&=p+1\end{aligned}$$

$$(m+p)!\;M\times S\left[(-1)^{0}(m-(p+1))\,\frac{\overset{1}{\mathfrak{c}}_{0}}{(m+p)_{0}}\,\overset{2}{\mathfrak{c}}_{\overset{2}{\mathfrak{a}}}\cdots\overset{p+2}{\mathfrak{c}}_{\overset{p+2}{\mathfrak{a}}}\right]+$$

$$\begin{aligned}0+2\overset{2}{\mathfrak{a}}+\cdots+(p+2)\overset{p+2}{\mathfrak{a}}&=2(p+1)\\ 0+\overset{2}{\mathfrak{a}}+\cdots+\overset{p+2}{\mathfrak{a}}&=p+1\end{aligned}$$

$$(m+p)!\;M\times S\left[(-1)^{\overset{1}{\mathfrak{a}}+1}(m-(p+1))\,\frac{\overset{1}{\mathfrak{c}}_{\overset{1}{\mathfrak{a}}+1}}{(m+p)_{\overset{1}{\mathfrak{a}}+1}}\,\overset{2}{\mathfrak{c}}_{\overset{2}{\mathfrak{a}}}\cdots\overset{p+2}{\mathfrak{c}}_{\overset{p+2}{\mathfrak{a}}}\right]$$

$$\begin{aligned}(\overset{1}{\mathfrak{a}}+1)+2\overset{2}{\mathfrak{a}}+\cdots+(p+2)\overset{p+2}{\mathfrak{a}}&=2(p+1)\\ (\overset{1}{\mathfrak{a}}+1)+\overset{2}{\mathfrak{a}}+\cdots+\overset{p+2}{\mathfrak{a}}&=p+1\end{aligned}$$

$$=(m+p)!\;M\times S\left[(-1)^{\overset{1}{\mathfrak{a}}+1}(m-(p+1-\mathfrak{b}))\,\frac{\overset{1}{\mathfrak{c}}_{\overset{1}{\mathfrak{a}}+1}}{(m+p)_{\overset{1}{\mathfrak{a}}+1}}\,\overset{2}{\mathfrak{c}}_{\overset{2}{\mathfrak{a}}}\cdots\overset{p+2}{\mathfrak{c}}_{\overset{p+2}{\mathfrak{a}}}\right]$$

$$\begin{matrix} (\overset{1}{a}+1)+2\overset{2}{a}+\cdots+(p+2)\overset{p+2}{a} = 2(p+1)-b \\ (\overset{1}{a}+1)+\overset{2}{a}+\cdots+\overset{p+2}{a} = p+1 \end{matrix}$$

$$+(m+p)!\, M\times S\left[(-1)^0(m-(p+1))\,\frac{\overset{1}{c}_0}{(m+p)_0}\,\overset{2}{c}_{\overset{2}{a}}\cdots\overset{p+2}{c}_{\overset{p+2}{a}}\right]$$

$$\begin{matrix} 0+2\overset{2}{a}+\cdots+(p+2)\overset{p+2}{a} = 2(p+1) \\ 0+\overset{2}{a}+\cdots+\overset{p+2}{a} = p+1 \end{matrix}$$

$$=(m+p)!\, M\times S\left[(-1)^{\overset{1}{a}}(m-(p+1)+b)\,\frac{\overset{1}{c}_{\overset{1}{a}}}{(m+p)_{\overset{1}{a}}}\,\overset{2}{c}_{\overset{2}{a}}\cdots\overset{p+2}{c}_{\overset{p+2}{a}}\right]$$

$$\begin{matrix} \overset{1}{a}+2\overset{2}{a}+\cdots+(p+2)\overset{p+2}{a} = 2(p+1)-b \\ \overset{1}{a}+\overset{2}{a}+\cdots+\overset{p+2}{a} = p+1 \end{matrix}$$

parce que, pour le cas où l'on fait $\overset{1}{a}=o$, $b$ ne peut avoir d'autre valeur que $o$ également, car autrement on aurait: $\overset{2}{a}+2\overset{3}{a}+\cdots+(p+1)\overset{p+2}{a}<\overset{2}{a}+\overset{3}{a}+\cdots+\overset{p+2}{a}$.

L'expression, à laquelle nous venons d'arriver, n'étant autre chose que ce qu'on obtient de l'équation $(R)$ en y faisant $n=p+2$, il est donc rigoureusement démontré que la forme de la fonction $\varphi$ ne peut être autre que celle que nous lui avons supposée. Reste donc seulement à déterminer le facteur $M$. Mais puisque celui-ci ne doit dépendre que de la seule quantité $m$, l'une quelconque des expressions particulières $(K)$, $(L)$, $(M)$ pourra servir à cette détermination. Prenons donc la première comme la plus simple et en vertu de laquelle il faut qu'il soit:

$$(m-1)\overset{2}{c}-\overset{1}{c}=\varphi(\overset{1}{c},\overset{2}{c})=m!\, M\times S\left[(-1)^{\overset{1}{a}}(m-1+b)\,\frac{\overset{1}{c}_{\overset{1}{a}}}{m_{\overset{1}{a}}}\,\overset{2}{c}_{\overset{2}{a}}\right]$$

$$\begin{matrix} \overset{1}{a}+2\overset{2}{a}=2-b \\ \overset{1}{a}+\overset{2}{a}=1 \end{matrix}$$

Ces équations de condition nous fournissant ces valeurs correspondantes:

| $\mathfrak{b}$ | $\overset{1}{\mathfrak{a}}$ | $\overset{2}{\mathfrak{a}}$ |
|---|---|---|
| 0 | 0 | 1 |
| 1 | 1 | 0 |

nous aurons:

$$(m-1)\overset{2}{\mathfrak{c}}-\overset{1}{\mathfrak{c}}=m!\,M\left((m-1)\overset{2}{\mathfrak{c}}-\overset{1}{\mathfrak{c}}\right)$$

d'où l'on tire:

$$M=\frac{1}{m!}$$

Ceci établit la suivante relation générale:

$$\overset{p\ \ m}{S}_{k}=\frac{k!}{(f'x)^{m+p}}\times S\left[\frac{(m+p-1)!\ (-1)^{\overset{1}{\mathfrak{a}}}(m-p+\mathfrak{b})\,\overset{1}{\mathfrak{c}}_{\overset{1}{\mathfrak{a}}}\cdots\overset{p+1}{\mathfrak{c}}_{\overset{p+1}{\mathfrak{a}}}}{m!\ (m+p-1)_{\overset{1}{\mathfrak{a}}}\ \overset{1}{\mathfrak{c}}!\cdots\overset{m}{\mathfrak{c}}!}\left(\frac{f'x}{1!}\right)^{\overset{1}{\mathfrak{c}}}\cdots\left(\frac{f^{\mu}x}{m!}\right)^{\overset{m}{\mathfrak{c}}}\right]\ (S)$$

$$\begin{aligned}
\overset{1}{\mathfrak{c}}+2\overset{2}{\mathfrak{c}}+\cdots+m\overset{m}{\mathfrak{c}} &= m+p\\
\overset{1}{\mathfrak{c}}+\overset{2}{\mathfrak{c}}+\cdots+\overset{m}{\mathfrak{c}} &= k+p\\
\overset{1}{\mathfrak{a}}+2\overset{2}{\mathfrak{a}}+\cdots+(p+1)\overset{p+1}{\mathfrak{a}} &= 2p-\mathfrak{b}\\
\overset{1}{\mathfrak{a}}+\overset{2}{\mathfrak{a}}+\cdots+\overset{p+1}{\mathfrak{a}} &= p
\end{aligned}$$

et par conséquent:

$$\overset{m-2\ \ m}{S}_{1}=\frac{(2m-3)!}{m!\ (f'x)^{2m-2}}\,S\left[(-1)^{\overset{1}{\mathfrak{a}}}\frac{(2+\mathfrak{b})\,\overset{1}{\mathfrak{c}}_{\overset{1}{\mathfrak{a}}}\cdots\cdots\overset{m}{\mathfrak{c}}_{\overset{m}{\mathfrak{a}}}}{(2m-3)_{\overset{1}{\mathfrak{a}}}\ \overset{1}{\mathfrak{c}}!\cdots\overset{m}{\mathfrak{c}}!}\left(\frac{f'x}{1!}\right)^{\overset{1}{\mathfrak{c}}}\cdots\left(\frac{f''x}{m!}\right)^{\overset{m}{\mathfrak{c}}}\right]$$

$$\begin{aligned}
\overset{1}{\mathfrak{c}}+2\overset{2}{\mathfrak{c}}+\cdots+m\overset{m}{\mathfrak{c}} &= 2(m-1)\\
\overset{1}{\mathfrak{c}}+\overset{2}{\mathfrak{c}}+\cdots+\overset{m}{\mathfrak{c}} &= m-1\\
\overset{1}{\mathfrak{a}}+2\overset{2}{\mathfrak{a}}+\cdots+m\overset{m}{\mathfrak{a}} &= 2(m-2)-\mathfrak{b}\\
\overset{1}{\mathfrak{a}}+\overset{2}{\mathfrak{a}}+\cdots+\overset{m}{\mathfrak{a}} &= m-2
\end{aligned}$$

où l'introduction du terme $\overset{m}{\mathfrak{a}}$ n'a rien pu changer dans les termes de l'aggrégat.

Cette équation, pouvant être mise sous la forme suivante:

$$\overset{m-2}{S}{}^{m}_{\cdot\,1} = \frac{(2m-3)!}{m!\,(f'x)^{2m-2}} \times$$

$$S\left[\frac{(-1)^{\overset{1}{a}}(m-(m-b-2))\dfrac{[m-(m-1-\overset{1}{c})-1]_{\overset{1}{a}}}{[m+(m-1-\overset{1}{c})+\overset{1}{c}-2]_{\overset{1}{a}}}\,\overset{2}{c}_{\overset{2}{a}}\cdots\overset{m}{c}_{\overset{m}{a}}}{\overset{1}{c}!\cdots\cdots\cdots\overset{m}{c}!}\left(\frac{f'x}{1!}\right)^{\overset{1}{c}}\cdots\left(\frac{f^{\mu}x}{m!}\right)^{\overset{m}{c}}\right]$$

$$\overset{2}{c}+2\overset{3}{c}+\cdots+(m-1)\overset{m}{c}=(m-1-\overset{1}{c})+\overset{1}{c}$$

$$\overset{2}{c}+\overset{3}{c}+\cdots+\overset{m}{c}=m-1-\overset{1}{c}$$

$$\overset{2}{a}+2\overset{3}{a}+\cdots+(m-1)\overset{m}{a}=m-b-2$$

$$\overset{2}{a}+\overset{3}{a}+\cdots+\overset{m}{a}=(m-1-\overset{1}{c})+\overset{1}{c}-1-\overset{1}{a}$$

on peut encore, à l'aide de considérations semblables à celles dont nous avons appuyé la démonstration de la réalité de l'équation $(R)$, y appliquer la prop. VI, et le résultat en est:

$$\overset{m-2}{S}{}^{m}_{1} = \frac{(2m-3)!}{m!\,(f'x)^{2m-2}}\,S\left[\frac{(-1)^{\overset{1}{c}}\dfrac{\overset{1}{c}_{\overset{1}{c}}}{(2m-3)_{\overset{1}{c}}}(2m-2-\overset{1}{c})}{\overset{1}{c}!\cdots\cdots\overset{m}{c}!}\left(\frac{f'x}{1!}\right)^{\overset{1}{c}}\cdots\left(\frac{f^{\mu}x}{m!}\right)^{\overset{m}{c}}\right]$$

$$\overset{1}{c}+2\overset{2}{c}+\cdots+m\overset{m}{c}=2(m-1)$$

$$\overset{1}{c}+\overset{2}{c}+\cdots+\overset{m}{c}=m-1$$

ou bien, en réduisant par la prop. III:

$$\overset{m-2}{S}{}^{m}_{1} = \frac{1}{(f'x)^{2m-2}}\,S\left[(-1)^{\overset{1}{c}}\frac{(2m-2-\overset{1}{c})!}{m!\,\overset{2}{c}!\cdots\overset{m}{c}!}\left(\frac{f'x}{1!}\right)^{\overset{1}{c}}\cdots\left(\frac{f^{\mu}x}{m!}\right)^{\overset{m}{c}}\right] \qquad (T)$$

$$\overset{1}{c}+2\overset{2}{c}+\cdots+m\overset{m}{c}=2(m-1)$$

$$\overset{1}{c}+\overset{2}{c}+\cdots+\overset{m}{c}=m-1$$

expression qui, substituée dans l'équation $(H)$, nous donne enfin :

$$X^{\mu} = \frac{\hat{f}^{\mu}(fx)}{m!} = (-1)^{m-1}\,{}^{m}\overset{m-2}{S}{}^{m}_{1} \cdot X' =$$

$$\frac{1}{(f'x)^{2m-1}}\, S\left[(-1)^{m+\overset{1}{\mathfrak{a}}-1}\,\frac{(2m-2-\overset{1}{\mathfrak{a}})!}{m!\,\overset{2}{\mathfrak{a}}!\cdots\overset{m}{\mathfrak{a}}!}\left(\frac{f'x}{1!}\right)^{\overset{1}{\mathfrak{a}}}\cdots\left(\frac{f^{\mu}x}{m!}\right)^{\overset{m}{\mathfrak{a}}}\right] \qquad (U)$$

$$\overset{1}{\mathfrak{a}} + 2\overset{2}{\mathfrak{a}} + \cdots + m\overset{m}{\mathfrak{a}} = 2(m-1)$$

$$\overset{1}{\mathfrak{a}} + \overset{2}{\mathfrak{a}} + \cdots + \overset{m}{\mathfrak{a}} = m-1$$

où il faut encore observer que, quoique primitivement cette formule n'ait été cherchée que pour les cas où $m > 1$ (v. $B$ et $C$), elle est néanmoins encore juste pour $m = 1$.

### FORMULE GÉNÉRALE POUR LE RETOUR DES SUITES.

L'équation $(A)$ nous ayant fourni :

$$x = S\left[\frac{\hat{f}^{\beta}(fr)}{\mathfrak{b}!}(fx)^{\mathfrak{b}}\right] = r + S\left[\frac{\hat{f}^{\beta+1}(fr)}{(\mathfrak{b}+1)!}(fx)^{\mathfrak{b}+1}\right]$$

substituons dans le dernier terme la formule de l'équation $(U)$ et nous aurons :

$$x = r + S\left[(-1)^{\overset{1}{\mathfrak{a}}+\mathfrak{b}}\,\frac{(2\mathfrak{b}-\overset{1}{\mathfrak{a}})!}{(\mathfrak{b}+1)!\,\overset{2}{\mathfrak{a}}!\cdots\overset{\mathfrak{b}+1}{\mathfrak{a}}!}\left(\frac{f'r}{1!}\right)^{\overset{1}{\mathfrak{a}}}\cdots\left(\frac{f^{\beta+1}r}{(\mathfrak{b}+1)!}\right)^{\overset{\mathfrak{b}+1}{\mathfrak{a}}} \times \frac{(fx)^{\mathfrak{b}+1}}{(f'r)^{2\mathfrak{b}+1}}\right] \qquad (V)$$

$$\overset{1}{\mathfrak{a}} + 2\overset{2}{\mathfrak{a}} + \cdots + (\mathfrak{b}+1)\overset{\mathfrak{b}+1}{\mathfrak{a}} = 2\mathfrak{b}$$

$$\overset{1}{\mathfrak{a}} + \overset{2}{\mathfrak{a}} + \cdots + \overset{\mathfrak{b}+1}{\mathfrak{a}} = \mathfrak{b}$$

et, si $r = o$ :

$$x = S\left[(-1)^{\overset{1}{\mathfrak{a}}+\mathfrak{b}}\,\frac{(2\mathfrak{b}-\overset{1}{\mathfrak{a}})!}{(\mathfrak{b}+1)!\,\overset{2}{\mathfrak{a}}!\cdots\overset{\mathfrak{b}+1}{\mathfrak{a}}!}\left(\frac{f'o}{1!}\right)^{\overset{1}{\mathfrak{a}}}\cdots\left(\frac{f^{\beta+1}o}{(\mathfrak{b}+1)!}\right)^{\overset{\mathfrak{b}+1}{\mathfrak{a}}} \times \frac{(fx)^{\mathfrak{b}+1}}{(f'o)^{2\mathfrak{b}+1}}\right] \qquad (W)$$

$$\overset{1}{\mathfrak{a}} + 2\overset{2}{\mathfrak{a}} + \cdots + (\mathfrak{b}+1)\overset{\mathfrak{b}+1}{\mathfrak{a}} = 2\mathfrak{b}$$

$$\overset{1}{\mathfrak{a}} + \overset{2}{\mathfrak{a}} + \cdots + \overset{\mathfrak{b}+1}{\mathfrak{a}} = \mathfrak{b}$$

formule qui s'applique facilement à une série quelconque donnée:

$$y = a + \overset{1}{a}x + \overset{2}{a}x^2 + \overset{3}{a}x^3 + \cdots\cdots$$

car on n'a qu'à faire:

$$fx = \overset{1}{a}x + \overset{2}{a}x^2 + \overset{3}{a}x^3 + \cdots\cdots = y - a$$

ce qui donne $r = o$, et par conséquent:

$$x = S\left[(-1)^{\overset{1}{\mathfrak{a}}+\mathfrak{b}} \frac{(2\mathfrak{b}-\overset{1}{\mathfrak{a}})!}{(\mathfrak{b}+1)!\,\overset{2}{\mathfrak{a}}!\cdots\overset{\mathfrak{b}+1}{\mathfrak{a}}!}\, \overset{1}{a}{}^{\overset{1}{\mathfrak{a}}}\cdot\overset{2}{a}{}^{\overset{2}{\mathfrak{a}}}\cdot\overset{3}{a}{}^{\overset{3}{\mathfrak{a}}}\cdots\overset{\mathfrak{b}+1}{a}{}^{\overset{\mathfrak{b}+1}{\mathfrak{a}}}\, \frac{(y-a)^{\mathfrak{b}+1}}{\overset{1}{a}{}^{2\mathfrak{b}+1}}\right] \qquad (X)$$

$$\overset{1}{\mathfrak{a}} + 2\overset{2}{\mathfrak{a}} + \cdots + (\mathfrak{b}+1)\overset{\mathfrak{b}+1}{\mathfrak{a}} = 2\mathfrak{b}$$

$$\overset{1}{\mathfrak{a}} + \overset{2}{\mathfrak{a}} + \cdots + \overset{\mathfrak{b}+1}{\mathfrak{a}} = \mathfrak{b}$$

$$= \frac{1}{\overset{1}{a}}(y-a) - \frac{\overset{2}{a}}{\overset{1}{a}{}^3}(y-a)^2 + \frac{2\overset{2}{a}{}^2 - \overset{1}{a}\overset{3}{a}}{\overset{1}{a}{}^5}(y-a)^3 -$$

$$\frac{5\overset{2}{a}{}^3 - 5\overset{1}{a}\overset{2}{a}\overset{3}{a} + \overset{1}{a}{}^2\overset{4}{a}}{\overset{1}{a}{}^7}(y-a)^4 + \frac{14\overset{2}{a}{}^4 - 21\overset{1}{a}\overset{2}{a}{}^2\overset{3}{a} + 6\overset{1}{a}{}^2\overset{2}{a}\overset{4}{a} + 3\overset{1}{a}{}^2\overset{3}{a}{}^2 - \overset{1}{a}{}^3\overset{5}{a}}{\overset{1}{a}{}^9} \times$$

$$(y-a)^5 - \frac{42\overset{2}{a}{}^5 - 84\overset{1}{a}\overset{2}{a}{}^3\overset{3}{a} + 28\overset{1}{a}{}^2\overset{2}{a}{}^2\overset{4}{a} + 28\overset{1}{a}{}^2\overset{2}{a}\overset{3}{a}{}^2 - 7\overset{1}{a}{}^3\overset{2}{a}\overset{5}{a} - 7\overset{1}{a}{}^3\overset{3}{a}\overset{4}{a} + \overset{1}{a}{}^4\overset{6}{a}}{\overset{1}{a}{}^{11}} \times$$

$(y-a)^6 +$ etc. etc. etc.

---

Nous terminons ces recherches par la remarque que le retour des suites n'est au-fait qu'un cas très-particulier d'un problème beaucoup plus général, celui de *développer une fonction quelconque donnée en une série suivant les puissances* (à exposans entiers et positifs) *d'une autre fonction, également donnée:* problème dont nous croyons pouvoir présenter la solution générale dans un prochain mémoire.

---

# ÜBER DIE

# VERÄNDERUNGEN DER HÖHE

## WELCHE DIE

## OBERFLÄCHE DES KASPISCHEN MEERES

## BIS ZUM APRIL DES JAHRES 1830 ERLITTEN HAT;

VON

E. LENZ.

---

(Gelesen den 30. November 1831.)

Jener riesenhafte Landsee, der unter dem Namen des kaspischen Meeres bekannt ist und welcher im Durchschnitt eine Länge von 10 Breitengraden und eine Breite von 5 Längengraden besitzt, hat von jeher die Aufmerksamkeit der Geographen und Physiker in mehr als einer Hinsicht auf sich gezogen. Eine Menge Flüsse und unter diesen einige, die zu den grösseren der alten Welt gehören, ergiessen sich in dieses gemeinschaftliche Reservoir und führen ihm in jeder Stunde eine mächtige Wassermasse zu. Dennoch steigt das Niveau dieses See's im Allgemeinen nicht, ja in den letzten Jahren kann man im Gegentheil ein ziemlich bedeutendes Sinken desselben nachweisen, wie wir aus dem Folgenden ersehn werden. Da man nun in früherer Zeit der Ausdünstung allein die Ableitung dieses grossen Zuflusses nicht zuschreiben zu können glaubte, so nahm man seine Zuflucht zu einem unterirdischen Abflusse in den persischen Meerbusen oder ins schwarze Meer. Man citirte zur Unterstützung dieser Hypothese das angebliche Factum, dass organische Erzeugnisse der Ufer des kaspischen Meeres in den Wellen des persischen Meerbusens

wieder gefunden wurden. Allein vergeblich suchten die Schiffer auf dem kaspischen Meere den Punkt, wo jener unterirdische Abfluss statt finden sollte und der sich durch ein Hinströmen des Wassers von allen Seiten dahin hätte kund thun müssen. Es wird zwar in mehreren ältern Schriften *) behauptet, die ersten russischen Seefahrer dieses Meeres, die Peter der Grosse zur Aufnahme desselben beorderte, hätten in der Bai von Karabugas, welche an der östlichen Küste des See's liegt, einen solchen heftigen Strom bemerkt, der auf einen Abfluss des Wassers in der Mitte dieser Bai hindeute: allein Woodroof **) bemerkt, dass ihm dieses Factum von Einwohnern der südlich davon gelegenen Insel Ogurtjoy, welche ihm als Piloten dienten, gänzlich geleugnet werde und doch halten sich fast fortwährend einige Böte dieser Insulaner in besagter Bai auf, des ergiebigen Fischfangs wegen. — Bei neuern Schriftstellern wird nirgends etwas von einem solchen Strome erwähnt; ja schon Kämpfer ***) widerlegt ausdrücklich eine solche Meinung und thut zugleich dar, dass das obenerwähnte Vorfinden organischer Producte der kaspischen Ufer im persischen Meerbusen gänzlich ungegründet sey. Hieraus ergiebt sich, dass die ganze Hypothese eines unterirdischen Abflusses zu verwerfen sey, besonders da wir sogleich sehn werden, dass ein solcher Abfluss physisch unmöglich ist. In neuerer Zeit haben nämlich Engelhardt und Parrot durch ihr mühsames barometrisches Nivellement die schon früher durch den Lauf der Flüsse angedeutete Ansicht, als liege das kaspische Meer tiefer als das schwarze, vollkommen bestätigt und den Unterschied ihrer Niveau's auf 52 Toisen bestimmt. Hierdurch wird nun ein Zusammenhang beider Meere unmöglich, da sonst das kaspische Meer dadurch um 52 T. steigen müsste. Auch mit dem indischen Oceane wird eine unterirdische Verbindung hierdurch wenigstens im höchsten Grade unwahrscheinlich, da bis jetzt alle Messungen dafür sprechen, dass das Weltmeer überall ein gleiches Niveau habe,

---

*) Vergl. Топографія Оренбургской Губерніи, соч. Петр. Рычковымъ, 1762. Tom. I. p. 206,

**) Hanway's Reise. Tom. I. pag. 109.

***) Kämpfer, Amoenit. exotic. p. 253.

welcher Satz noch neuerdings durch das Nivellement des Isthmus von Panama durch Lloyd eine schöne Bestätigung gefunden hat. Wir sind also gezwungen anzunehmen, dass das dem kaspischen Meere zugeführte Wasser blos durch Verdunstung abgeleitet werde.

Es ist aber noch ein andrer Umstand bei diesem Meere, der unsre Aufmerksamkeit nicht minder in Anspruch nimmt, nämlich die Veränderungen seines Niveau zu verschiedenen Zeiten. Hierüber herrschte bis jetzt die grösste Verwirrung in den Angaben; bald liest man bei einem Schriftsteller, die Oberfläche sey gesunken, bald bei einem andern, sie sei gestiegen; ja fast alle, namentlich Hanway *), Lerch **), Müller ***) u. a. erwähnen der Sage der Einwohner von einer regelmässigen Periode in dieser Erscheinung, so dass der Wasserspiegel in 30 bis 35 Jahren steige und eben so lange Zeit wieder sinke. — Es war mein Bestreben während meines Aufenthalts in Baku und auf der Rückreise von dieser Stadt bis Astrachan über diesen Punkt zu einiger Gewissheit zu gelangen und die gegenwärtige Abhandlung enthält dasjenige, was ich hierüber habe ermitteln können und was sich aus den verschiedenen Angaben früherer Reisender durch eine Zusammenstellung derselben als das Wahrscheinlichste ergiebt. Um aber Andere durch die Benutzung derjenigen Autoren, die ich mir zur Ansicht hier nicht verschaffen konnte, in den Stand zu setzen, meine Resultate noch mehr zu vervollständigen, lasse ich hier zuerst eine Liste der von mir benutzten Werke, die ich meist der Gefälligkeit Sr. Excellenz, des Hrn. von Fraehn verdanke, folgen:

*Bakui*, in den *Notices et extraits de la bibliothèque du roi. T. II.* — *Olearius*, Persianische Reisebeschreibung. — *Kämpfer*, *amoenitates exoticae.* — *Pallas*, Reise. — *Hanway's* Reise. — *Lerch's* beide Reisen in Büschings Magazin. T. III. u. X. — Топографія Оренбургской губерніи соч. Петромъ Рычковымъ, 1762.

---

*) Hanway's Reise. Tom. I. p. 110.

**) Büsching's Magazin. T. X. p. 440.

***) Müller's Sammlung russischer Geschichte. T. IV. p. 10.

— *Kephalides*, *de historia maris Caspii.* — *Reinegg's* Kaukasus. — *Marschall von Biberstein*, *Tableau des provinces etc.* — *Gmelin's* Reise. — *Güldenstädt's* Reise. — *Gamba's* Reise. — *Eichwald's* Reise, als Auszug in den geographischen Ephemeriden, Tom. XXIV. — Путешествіе въ Туркменію и Хиву Николая Муравьева. — *Müller's* Sammlung russischer Geschichte, T. IV. u. VII. — Подробное описаніе Персіи. — Записки во время проѣзда изъ Астрахани на Кавказъ и въ Грузію, въ 1827 года. Н...И..... — *Ritter's* Geographie, Asien.

Ich werde in dieser Abhandlung den Gang befolgen, dass ich zuerst die Veränderungen des Niveau's des kaspischen Meeres in den letzten Zeiten, etwa seit Anfang des gegenwärtigen Jahrhunderts erörtern und dann auf die Veränderungen in früherer Zeit zurückgehn werde. Ueber den ersten Theil haben wir Data, die uns Gewissheit gewähren; bei dem letzten werden wir uns mit mehr oder weniger Wahrscheinlichkeit begnügen müssen.

Es lässt sich vielleicht kein Ort an den kaspischen Ufern ausfindig machen, der geeigneter wäre zur Beobachtung über das Niveau dieses Meeres, als Baku. Diesen Vorzug hat die Stadt aus 3 Gründen:

1) Das ziemlich steile Emporsteigen der Berge, welche das Ufer bei Baku einschliessen, machte es möglich die Stadt dicht an dem Meeresufer zu bauen.

2) Kein Fluss ergiesst sich in der Nähe Baku's ins Meer.

3) Die durch die Richtung des Ufers selbst (das Vorspringen der Halbinsel Abscheron) und durch die vorliegenden Inseln Nargen und Wulf mehr geschlossene Gestalt der Bai von Baku und der steile Abfall seiner Ufer macht diese den Sandanschwemmungen weniger ausgesetzt, als es andre Punkte der Ufer dieses See's (z. B. Derbend) sind.

Der zuerst erwähnte Umstand rückt das Phänomen den Einwohnern unmittelbar vor Augen und giebt ihnen leicht Anhaltspunkte, von welchen aus sie die Höhe des Wasserstandes, fast ohne es zu wollen, bemerken mussten. Ich selbst wurde dadurch in den Stand gesetzt, die Angaben der früheren Reisenden, die Baku besuchten, nicht nur im Allgemeinen zur Bestimmung eines Fallens oder Steigens zu

benutzen, sondern auch die Grösse dieser Veränderungen zu messen und in Zahlen auszudrücken.

Nicht minder wichtig ist der zweite Punkt, nämlich die Abwesenheit der Mündung irgend eines Flusses an der Küste von Baku. Die Flüsse, die dem caucasischen Gebirge entspringen und nach einem, gegen die Höhe ihres Ursprungs, sehr kurzen Laufe sich in's kaspische Meer ergiessen, sind aus diesem Grunde reissend und fliessen zum Theil nah bei ihrer Mündung in einem weichen sandigen Boden. Es ist daher bei manchen von ihnen (z. B. dem Terek) gar nicht ungewöhnlich, dass sie fast in jedem Jahre ihr Bett verändern und hierbei theils Stücke ihrer ehemaligen Ufer in die See fortreissen, theils wieder an andern Orten das weggeschwemmte Land absetzen und Sandbänke bilden, die endlich aus dem Wasser hervortreten und als Inseln erscheinen. Findet das Erste statt, so kann ein darauf nicht vorbereiteter Beobachter (besonders wenn sich an der Mündung des Flusses keine Wohnsitze der Einwohner finden), bei einem zufälligen Besuche dieses Wegreissen durch den Fluss leicht einem Verschlingen durchs Meer zuschreiben und daher auf ein Steigen der Oberfläche desselben schliessen. Im zweiten Fall aber kann er auf den entgegengesetzten Fehlschluss geleitet werden, nämlich die hervorgetretene Sandbank einem Sinken des Meeres zuzuschreiben. Wir werden im Folgenden Gelegenheit haben hierauf zurückzukommen.

Was endlich den dritten Punkt betrifft, nämlich die Sandanschwemmungen durch die Meereswellen, so finden sich Beispiele dafür von den Schriftstellern öfters erwähnt. Das auffallendste der Art liefert das folgende Factum, das sich in Bruce's Memoir. p. 285 findet und welches ich aus Ritter's Geographie entlehne. Eine Flotte von 13 Transportschiffen zerschellte an der Westküste des kaspischen Meeres nicht weit von Derbend in einem Sturme und innerhalb 3 Stunden war auch nicht die geringste Spur eines Wraks mehr zu sehen; sie waren während dieser kurzen Zeit ganz im Sande begraben. — Zu andern Zeiten und bei unverändertem Winde wühlt dasselbe Meer diesen aufgehäuften Sand wieder um und trägt ihn über an einen andern Ort. Dass hierdurch Erscheinungen hervorgebracht wer-

den, die denen durch Anschwemmung der Flüsse ganz ähnlich sind, ist leicht begreiflich.

Nach dem so eben Erwähnten werde ich also vorzüglich die Veränderungen des Meeresniveau bei Baku betrachten, und nachher erst die Beobachtungen, die man von andern Punkten hierüber hat, damit verbinden. Ich habe bereits in meiner, im vorigen Jahre gehaltenen öffentlichen Rede über meine Reise nach Baku *), bei Beschreibung der Umgegend dieser Stadt bemerkt, dass der südlich von derselben gelegene Theil der Bucht zum Theil aus Muschelkalkfels besteht, welcher in südöstlich geneigten Schichten gelagert ist, zum Theil aber auch aus horizontalen, auf jenem aufliegenden, Thonschichten, die gleichfalls eine Menge noch jetzt lebendig vorkommender Muscheln enthalten und die sich abgesetzt haben, nachdem der Muschelkalk bereits seine Neigung durch innere Hebung erhalten hatte. An diesen weicheren Thonschichten sieht man nun deutlich, dass die Wellen sie bespült haben; sie sind fast alle an ihrem untern Theil mehr oder weniger ausgehöhlt, während die Wellen sie jetzt **) nicht mehr erreichen, sondern auch beim höchsten Wasserstande (bei Südoststurm) durch ein schmales Sandufer von ihnen getrennt sind. Dieses deutet auf einen gegenwärtig niedrigeren Stand des Meeresspiegels als früherhin, also auf ein Sinken desselben, hin. — Eben so zeigt die längs der Küste sich hinziehende Stadtmauer durch die Farbe ihres untersten Theils, dass sie hier einst von den Wellen bespühlt worden sey; jetzt steht sie etwa 4 Faden vom Ufer entfernt. Wenn man aus diesen Datis auf die frühere Meereshöhe schliessen wollte, so würde sie sich etwa 12 Fuss höher als im Jahre 1830 ergeben. — Dieses Resultat erlangte ich sogleich bei meinen ersten Ausflüchten in die nächsten Umgebungen der Stadt, verbunden mit den vorläufigen Nachfragen, die ich an verschiedene Personen hierüber that. — Demnächst ging mein Bestreben dahin, jemanden in der

*) Recueil des actes de la séance publique de l'acad. impér. d. sc. de St.-Pétersbourg, tenue le 29 Décembre 1830.

**) Wenn ich mich in dieser Abhandlung des Ausdruckes „jetzt" bediene, so verstehe ich immer darunter die Zeit, als ich in Baku war, d. h. den Monat März des Jahres 1830.

Stadt ausfindig zu machen, durch den ich in den Stand gesetzt würde für eine grosse Anzahl von Jahren diese Abnahme des Wassers mit noch mehr Genauigkeit bestimmen zu können und es glückte mir, diesen Zweck zu erreichen. Der Postmeister von Baku, Nicolai Dimitritsch Schdanoff (Николай Дмитріевичъ Ждановъ) befindet sich seit dem Jahre 1805 in dieser Gegend; er war in den ersten Jahren Steuermann auf einer der dort postirten russischen Kriegsbriggs gewesen und hatte bei einer, gerade zur damaligen Zeit veranstalteten, Aufnahme und Sondirung der Bai mit geholfen. Durch dieses Geschäft schon musste er auf den Stand des Wassers aufmerksam geworden seyn. Er versicherte mich, dass seitdem er dort sey, die Meereshöhe abgenommen habe, ohne irgend einmal inzwischen zu steigen. Als er in Baku ankam, legten die Böte unmittelbar vor der Stadtmauer an der noch jetzt dort befindlichen steinernen Aufahrt an; jetzt ist von derselben eine lange hölzerne Brücke bis in's Wasser hineingebaut. — Auf meine Bitte besuchte er mit mir die südliche Küste der Bai, um mir auf derselben eine Felsplatte zu zeigen, an welcher in den ersten Jahren seines Hierseyns die russische Schiffsmannschaft und mit derselben er selbst gewöhnlich zu landen pflegten, wenn sie ihre Ausflüchte in die Umgegend machen wollten. Diese Felsplatte ist so ausgezeichnet und muss für den Fall eines so hohen Wasserstandes für's Landen der Böte so sehr bequem seyn, dass sie unmöglich zu verwechseln ist. Von diesem Punkte ging ich daher aus und bestimmte seine Höhe über dem jetzigen Meeresspiegel, wie er sich bei vollkommen stiller Luft und im Monat März des Jahres 1830 darbot, mit Sorgfalt. Diese Höhe fand ich genau 10 englische Fuss, so dass wir also annehmen müssen, dass in dem Jahr 1805 das Meer um 10 Fuss höher stand als jetzt. Derselbe Augenzeuge bezeichnete mir noch ein Paar andere Punkte an der Stadtmauer, bis zu welchen früher (1805) das Wasser stand; sie befanden sich in der Höhe von $10\frac{1}{2}$ und 11 englische Fuss über dem Stande von 1830. Beide Höhen stimmen ziemlich mit der früher hergeleiteten überein, jedoch ziehe ich die erste Bestimmung diesen beiden letzten vor, weil jener Punkt am Felsen schärfer bezeichnet war als diese letzten an der Mauer. Wir werden es also als erwiesen

ansehn können, dass das Niveau des See's damals um 10 Fuss höher gestanden habe als jetzt und dass diese Höhe eher etwas mehr als weniger betrage. Wann aber eigentlich das Wasser zu sinken angefangen habe, konnte der Befragte mir nicht mehr mit Bestimmtheit angeben; er behauptete nur, dass erst im Jahr 1817 die in der Bai von Baku versunkene Karavanserai, von der späterhin noch ausführlicher die Rede seyn wird, beim Wellenschlage bald aus dem Wasser hervorzutauchen, bald wieder unter der Oberfläche zu verschwinden angefangen habe. Bei ruhigem Wasser ragt die höchste Spitze derselben jetzt um 4 Fuss aus dem Wasser hervor, allein um hieraus auf die Höhe des Wasserspiegels im Jahr 1817 schliessen zu können, müsste man wissen, wie tief das Meer durch die Wellen hier aufgewühlt werde und ob bestimmt kein Theil der jezt aus dem Wasser hervorragenden Mauern durch Stürme und Wellenschlag herabgeworfen worden sey. — Mit mehr Bestimmtheit werden wir über diesen Punkt nach einer andern Aussage entscheiden können, die ich aus dem Munde eines astrachanischen Kaufmanns habe, der jährlich dieses Meer bis Baku und Sallian hinunter beschiffte und, nach der Vorsichtigkeit bei seinem Urtheile und nach dem Zeugnisse mehrerer Einwohner Bakus zu urtheilen, sehr zuverlässig zu seyn schien. Sein Name ist Semen Prokofjew (Семенъ Прокофьевъ) und seine Aussage war, dass vor dem Jahre 1817 die Meereswellen die Mauern von Baku bespülten, dass aber seit diesem Jahre die Oberfläche des Wassers gesunken sei bis zum Jahre 1824, wo sie eine Zeit lang stille stand, dass sie aber in den letzten Jahren wieder falle. — Hiermit sehr wohl vereinbar ist Gambas Ausspruch in seiner Reisebeschreibung *), dass dieses Fallen des Meeresniveau seit 4 Jahren vor seiner Ankunft in Baku (welche im Jahr 1820 statt fand) besonders bemerkbar sey. Folglich hat es im Jahr 1816 begonnen und nach Gamba 3 Fuss in 4 Jahren betragen, denn wo vor 1816 Schiffe von 18 Fuss Tiefe segeln konnten, da konnten es im Jahr 1820 nur solche, die ein Fahrwasser von 15 Fuss brauchen. Wir können also aus allen bisher angeführten Beobachtun-

*) Voyage dans la Russie etc., par Gamba. Tom. II. pag. 307.

gen und Aussagen den Schluss ziehen, dass seit dem Jahre 1816 ein Sinken des Meeresspiegels bei Baku statt gefunden und dass dasselbe bis zum Jahre 1830 10 Fuss betragen habe (eher mehr als weniger). Vielleicht hat es schon einige Jahre früher begonnen, allein auf weniger bemerkbare Weise als seit 1816. Dieses Sinken ist nicht gleichmässig vor sich gegangen, wie der oben angeführte Stillstand im Jahre 1824 anzudeuten scheint *).

Ausser in Baku ist mir das Sinken des Meeresniveau in den letzten Jahren auch an andern Orten, durch die mich meine Reise längs dem westlichen Ufer des kaspischen Meeres hinauf bis Astrachan führte, bestätigt worden, namentlich in Derbend, Kislar und Astrachan. Ich konnte aber keine Angaben finden, aus denen ich mir ein Maass dieses Sinkens für eine bestimmte Zeit ableiten könnte. Derbend liegt zwar am Meere, wenigstens erstrecken sich die berühmten Mauren dieser Stadt bis dahin, allein die Häuser der Einwohner sind doch über eine Werst weit vom Ufer entfernt, das überdies nicht felsigt ist, sondern aus Sand mit Muscheltrümmern besteht. Daher liess sich hier schon im Voraus eine genaue Messung der Höhenabnahme nicht erwarten. Die Mauern, welche sich früher weit ins Meer hinein erstreckten, kann man jetzt längs dem Ufer trocknen Fusses umgehn, jedoch trug hierzu nicht blos das Sinken des Meeresspiegels bei, sondern auch die Zerstörung eines Theils dieser Mauern, dort wo sie das Wasser berührten, und die schon oben hier gerade als besonders thätig erwiesene Sandanspühlung, so dass sich über die Grösse der Abnahme der Wasserhöhe aus diesem Allen nichts Bestimmtes schliessen lässt.

---

*) Hiernach zu berichtigen ist eine Bemerkung über diesen Gegenstand, welche ich in einem Briefe an Herr v. Humboldt aussprach und welche dieser berühmte Reisende in seinem so eben erschienenen Werke: „Fragments de Géologie et de Climatologie asiatiques" aufzunehmen gewürdigt hat. Ich gab dort das Sinken des kaspischen Meeresniveau seit dem Jahre 1805 auf 10 Fuss an, ich hätte mich aber ausdrücken müssen: „das Meer *steht jetzt* um 10 Fuss niedriger als im Jahr 1805", ohne zugleich zu sagen, die Abnahme der Höhe habe mit dem Jahr 1805 begonnen und bis zum Jahre 1830 fortgewährt, wie dieses sich aus den Worten meines Briefes zu ergeben scheint. Als ich denselben schrieb, waren mir die beiden zuletzt angeführten Data nicht so gegenwärtig, wie jetzt, da ich mich eine Zeit lang ausschliesslich mit dem Gegenstande beschäftigt habe. Ich benutzte damals nur die Aussage Schdanows.

*

Herr v. Humboldt erwähnte in der Rede, die er hier in St. Petersburg in der öffentlichen Sitzung der Akademie der Wissenschaften hielt, ebenfalls des gegenwärtigen Sinkens des kaspischen Meeres an seinen nördlichen Ufern, von welchem er auf seiner sibirischen Reise Nachrichten einsammelte. Endlich theilt Eichwald in dem Auszuge seiner Reisebeschreibung, welcher sich in den geographischen Ephemeriden vorfindet *), die Bemerkung mit, dass die Tiefe des Meeres bei der Astrabadschen Küste seit einigen Jahren vor seinem Aufenthalt in der dortigen Gegend (d. h. vor dem Ende des Jahres 1825) ungemein abgenommen habe. Diese Abnahme findet sich daher sowohl an der westlichen, als auch an der nördlichen und südlichen Küste des kaspischen Meeres bestätigt. Wir haben also aus allen bisherigen Untersuchungen das Resultat erhalten, *dass das kaspische Meer an allen seinen Küsten seit dem Jahr* 1816 *an Höhe abgenommen habe und dass diese Abnahme bis zum Jahr* 1830 *zehn Fuss betrage, eher mehr als weniger.*

Nachdem ich in Baku alle die Data gesammelt hatte, die uns zu dem so eben ausgesprochenen Resultate geleitet haben, ging meine nächste Absicht dahin, künftige Beobachter in den Stand zu setzen die Veränderungen des Niveau des kaspischen Meeres seit meinem Dortseyn mit noch mehr Sicherheit, als es mir möglich war, zu beobachten. Ich liess deshalb 2 eiserne Bolzen von 2 Fuss Länge und $2\frac{1}{4}$ Zoll Breite und Dicke schmieden und vergoss dieselben mit Blei in Löchern, welche zu dem Endzweck in den Muschelkalk hineingeschlagen worden waren, so dass nur ein Ende von 2 Zoll aus dem Felsen hervorragte. Eins dieser festen Zeichen wurde nahe bei der Stadt errichtet, ein anderes auf der Insel Nargen, welche in der Bai von Baku etwa 10 Werst von der Stadt entfernt liegt. Die Höhe des ersten, bei Baku gelegenen, über dem Wasserstande des kaspischen Meeres vom Jahr 1830 betrug 5 Fuss 11,85 Zoll englisch vom untern Rande des hervorstehenden Würfels an gerechnet, die Höhe des zweiten auf der Insel Nargen aber 4′ 8″. Ich bedaure nur, dass ich diese Zeichen nicht höher über dem damaligen Wasserstande errich-

*) Geograph. Ephemerid. T. XXIV. pag. 407.

ten konnte, allein ich fand in grösserer Höhe keinen Fels, der die gehörige Festigkeit gehabt hätte und von dem das Nivellement bis zum Ufer ohne bedeutende Schwierigkeit hätte gemacht werden können. Auch der Fels, in welchem diese Bolzen eingelassen wurden, hat nicht die Festigkeit, die hierfür wünschenswerth wäre, allein es war der härteste Muschelkalk, der sich in der Nähe der Küste findet. Ueber die Auffindung dieser Zeichen werde ich das Nähere in der vollständigen Beschreibung meiner Reise bekannt machen und besonders für das mehr versteckte auf Nargen eine kleine Zeichnung der Bai, in welcher ich es angebracht habe, hinzufügen.

Wenden wir uns nun zum zweiten Haupttheil dieser Abhandlung und wollen wir für eine längere Zeit zurück, als 25 Jahre, über die Veränderung des Niveau des kaspischen Meeres etwas ergründen, so müssen wir auf diejenigen Nachrichten zurückgehen, die uns ältere Reisende hierüber gegeben haben. Hierbei stossen wir auf so verschiedene, sich scheinbar widersprechende Angaben, dass wir an der Ausmittelung der Wahrheit glauben verzweifeln zu müssen; indessen wird eine, in chronologischer Ordnung gegebene, Zusammenstellung des uns theils aus Volkssagen, theils durch Berichte der Reisenden Bekannten zuletzt doch einiges Licht über diesen Gegenstand verbreiten und uns zu einem genügenden Resultate führen. Bei dieser Zusammenstellung werde ich wiederum aus den schon oben angeführten Gründen zuerst die Angaben, welche sich auf Baku beziehen, anführen und dann auf die übrigen übergehen; vor Allem aber muss ich dasjenige erwähnen, was sich über die Veränderungen der Ufer des kaspischen Meeres in Zeiten, die vor der Erbauung Baku's anzunehmen sind, muthmassen lässt. Es ist bekannt dass Pallas *) bereits die Hypothese aufgestellt hat, das kaspische Meer habe in früheren Zeiten mit dem schwarzen oder eigentlich Asovschen Meere Zusammenhang gehabt, eine Meinung, welcher Kephalides **) beistimmt und welche er mit vielen Gründen unterstützt; ja letzterer sucht auch noch darzuthun, dass dieser Zusammenhang sich bis auf den Aralsee erstreckt habe. Die Hauptgründe, die Pallas für diese seine Hypothese,

---

*) Pallas Reise. T. III. pag. 569.

**) Kephalides de histor. mar. Casp. pag. 158.

der man einen hohen Grad der Wahrscheinlichkeit nicht absprechen kann, anführt, sind von der Beschaffenheit des Bodens zwischen dem schwarzen und kaspischen Meere, in der Steppe, die der Manitsch und die Kuma durchströmen, hergeleitet. Diese ganze Gegend ist nämlich flach, und nur mit niedrigen Hügeln des reinsten Flugsandes bedeckt, in welchem man zahlreiche Muschelschalen, die sowohl dem schwarzen als kaspischen Meere gehören, vorfindet; häufig finden sich in dieser Steppe Salzseen, ja der ganze Boden scheint mit Salz gesättigt zu seyn. Ferner spricht für die Hypothese die vollkommene Identität der Fische und Muschelarten beider Meere und endlich fehlt es sogar nicht an historischen Zeugnissen, die dafür zu zeugen scheinen. Pallas führt als solches folgende Stelle des Stritter *) an: Ein gewisser Priscus nämlich, welcher eine Gesandtschaft begleitete, die der König Theodosius II. im Jahr Chr. 449 an den Attilla sandte, beschreibt den Weg, den die Scythen und Hunnen zu nehmen pflegten um in Persien einzufallen, folgendermassen: „Sie brachen von der Gegend um den Don auf, durchzogen zuerst eine Wüste oder Steppe und nachdem sie einen Sumpf passirt waren, kamen sie während 15 Tagen über ein Gebirge; nach Beendigung eines noch eben so grossen Weges langten sie endlich in Medien an.“ Dieser Sumpf nun existirt jetzt in jener Gegend nicht mehr, wahrscheinlich war er ein Ueberbleibsel jenes breiten Kanals, welcher das kaspische Meer früher mit dem Asovschen verband und zur Zeit jener Streifzüge der Hunnen noch nicht völlig ausgetrocknet war. — So viel über die Pallas'sche Hypothese; wir gehen jetzt auf andere Data über, die sich gleichfalls auf eine frühere Periode (vor Baku's Erbauung) beziehen. Hieher gehört die in Baku allgemein verbreitete und mir von mehreren dort lebenden Personen wiederholte Sage: vor langer Zeit habe das Meer 20 Werst vom Lande weiter zurückgestanden als jetzt und die Inseln Nargen und Wulf **), so wie Swätoi und Schiloi seyen Theile des festen Landes gewesen; einst aber sey das Meer plötzlich weiter vorgedrungen und habe der Küste die-

*) Memoriae populor. olim ad Danub. cet incolentium e script. histor. Byzant. erutae a J. G. Stritero. T. I. pag. 513.

**) Hiermit zu vergleichen ist Lerch's Aussage in Büschings Magazin. T. III. p. 15.

jenige Gestalt gegeben, die sie jetzt noch zeigt. Für die Wahrheit dieser Sage sprechen mehrere Umstände. In der Bai von Baku ragen jetzt noch die Spitzen eines Gebäudes aus dem Wasser hervor, das wahrscheinlich ein ehemaliges Karavanserai vorstellte und das ich in den letzten Tagen meines Aufenthalts in Baku besuchte. Es ist ein langes Viereck von NW. nach SO. sich erstreckend (also in der Richtung der gegenüberliegenden Küste) und von einer, noch jetzt in ihrem unter dem Wasser gelegenen Theil überall zusammenhängenden Mauer, gebildet. Seine Länge ist etwa 150 Fuss, seine Breite 25. Das Gebäude hat 8 Thürme, von welchen 2 einander diagonal entgegengesetzte, an den Ecken befindliche breiter sind als die übrigen. Diese zwei sind inwendig hohl, während die 6 kleinen voll gewesen zu seyn scheinen. Bei meinem Besuche ragten 7 Thürme aus dem Wasser hervor, einer der grössern aber nicht; dieses Hervorragen betrug bei ruhigem Wasser an den höchsten runden kleinen Thürmen 4 Fuss, bei dem grössern 3 Fuss 5 Zoll, (Alles nach englischem Maasse). Die Mauern sind aus Muschelkalkstein und wie es mir schien ohne allen Kitt aufgeführt und haben eine Dicke von 4½ Fuss; die grössern Thürme haben 15 Fuss im äusseren Durchmesser. Die Tiefe des Wassers in 25 Fuss Entfernung vom Gebäude betrug 10 Fuss; näher herzu ist dieselbe geringer, wegen der in's Wasser gestürzten Trümmer des obern Theils der Mauern.

Ein ähnliches unter dem Wasser stehendes Karavanserai fand Eichwald *) an der Ostküste dieses Meeres bei dem sogenannten Silberhügel; er betrachtet es als zu den Ueberbleibseln des ehemaligen berühmten *Emporium Abosgum* gehörig.

Um aber auf unsre obige Sage zurückzukommen, so gewinnt sie noch dadurch an Wahrscheinlichkeit, dass auf der Insel Nargen Spuren eines Weges zu bemerken sind, welche von den zweirädrigen, in den kaukasischen Provinzen überall gebräuchlichen Lastwagen, den Arben, dem Erdreich eingedrückt worden sind. Dieser Weg führt der Insel entlang auf das Dorf und Vorgebirge Schichu los, welches die Endspitze des südlichen Ufers der Bai von Baku bildet. Bei meinem Besuche auf der

*) Geograph. Ephemeriden. Tom. XXIV. pag. 406.

Insel fand ich allerdings diese Spur, aber so sehr verwischt, dass, wenn ich nicht mit Absicht darnach gesucht hätte, ich sie schwerlich bemerkt haben würde. Der gemeine Mann behauptet jedoch in Baku allgemein, diese Spur sey gar nicht zu verkennen und die Sicherheit dieser Behauptung mag bei ihm wohl mit durch Ueberlieferung aus früherer Zeit, wo sie noch deutlicher zu erkennen war, herrühren. Diese Spur und ihre Richtung ins Meer hinein giebt allerdings ein sehr gewichtiges Argument für eine frühere Verbindung der Insel mit dem Festlande ab, da die Insel in ihrem jetzigen Zustande ihres geringen Umfanges und ihrer spärlichen Vegetation wegen nicht bewohnt und auch nicht wohl bewohnbar ist, wenigstens wäre, selbst wenn sie beständige Einwohner gehabt hätte, ein Fuhrwerk auf derselben gänzlich überflüssig und unbrauchbar gewesen. — Dass sie aber einmal bewohnt gewesen sey, dafür sprechen ausserdem noch einige in den Fels gehauene viereckige Vertiefungen, die wahrscheinlich als Cisternen dienten, als welche sie bereits von Lerch *) erwähnt werden. — Aus allem diesem folgt aber, dass die Oberfläche des Meeres bei Baku einmal gestiegen sey; und weil die Tiefe des Meeres zwischen Nargen und Schichu jetzt im Maximum 50 Fuss beträgt, so muss jenes Steigen wenigstens eben so hoch angeschlagen werden. Dass dasselbe aber vor sehr langer Zeit statt gefunden habe, kann man schon daraus schliessen, dass sonst wohl dieses Factums bei irgend einem der orientalischen Schriftsteller Erwähnung geschehn worden wäre. Ja schon die Lage und Bauart Baku's zeugt dafür, dass dieses Ereigniss vor der Gründung der jetzigen Stadt geschehen sey. — Es lehrt nämlich der blosse Anblick der Stadt, dass sie zu einer Hafenstadt angelegt worden ist. Die Seemauer biegt sich nach der Krümmung des Ufers und an dem südlichen Ende der Stadt läuft eine Mauer gerade in die See hinein, und diente früher bei höherem Wasserstande offenbar dazu, um einen Theil des Hafens als einen bequemen Ankerplatz der Schiffe von dem übrigen abzuschneiden, wie solches sichtbar ist in der Abbildung dieser Stadt, die Kämpfer in seinen *amoenit. exotic.* uns nachgelas-

---

*) Büsching's Magazin. Tom. III. pag. 15 u. 16.

sen hat. Die nächste Angabe, die sich auf die Wasserhöhe des kaspischen Meeres bezieht, ist die uns von Bakui *) (vom Jahre 1400) hinterlassene, dass das Meer einen Theil der ehemaligen Stadt verschlungen, und zu seiner Zeit bei der Moschee gestanden habe. Diese Höhe würde nach meinen Messungen an Ort und Stelle ungefähr 15 Fuss über dem Meeresniveau von 1830 betragen. Die Erwähnung aber einer Verschlingung der ältern Stadt durch die Wellen scheint es zu bestätigen, dass schon zu seiner Zeit die oben beschriebene Karavanserai in der Bai von Baku angetroffen worden sey.

Kämpfer **) bei seiner Beschreibung Baku's im Jahre 1685 drückt sich unter andern folgendermassen aus: „*Duo urbis latera fluctus alluunt, unum, quod portum excipit, alterum, quod aperto mari objicitur.*“ Dieses wird noch deutlicher durch seine Abbildung der Stadt, die er der Beschreibung beigefügt hat und wo man deutlich sieht, wie das Meer damals die Südmauer der Stadt bespühlt und bis zu dem Hügel hinauf gereicht habe, auf welchem jetzt das unterirdische Hauptreservoir oder der Hauptkeller der schwarzen Naphta angelegt ist. — Diese Höhe, so weit ich sie aus der Abbildung und meinen Messungen verschiedener Punkte an der Südseite der Stadt ungefähr berechnen kann, mag etwa 14 Fuss über dem Stande von 1830 betragen haben.

Im Jahre 1727 besuchte Gärber die Stadt Baku und sagt über dieselbe Folgendes***): „Die Stadt liegt nahe an der See, und weil das Ufer daselbst flach ist, so gehn die Stadtmauern bis in die See hinein. Die Schiffe haben daselbst eine bequeme Anfahrt und können unmittelbar vor der Stadt anlegen.“ Nach dieser Bemerkung lässt sich schliessen, dass zu seiner Zeit das Wasser die Mauern bespühlt, also wenigstens 10 Fuss höher gestanden habe, als ich seinen Stand beobachtete.

---

*) Notices et mémoires des manuscr. de la biblioth. du Roi. Tom. II. pag. 509.

**) Kaempfer, amoenit. exotic., pag. 268.

***) Müller's Sammlung russischer Geschichte. 4r Th. p. 129.

Lerch spricht bei der Beschreibung von Baku *), während seiner ersten Reise nach Persien, die er im Jahre 1732 vollführte, folgendermassen in Bezug auf diesen Gegenstand: „Die unterste Mauer, vorn an der See, steht jetzt im Was- „ser; vor 30 Jahren war es aber da noch trocken, wo sie steht.“ Weiter heisst es: „Es sind von dem Zunehmen und Aufschwellen des kaspischen Meeres bei Baku „deutliche Spuren zu bemerken; die zwei Mauern zu beiden Seiten der Stadt“ (schon in Kämpfer's Abbildung sieht man, dass nur eine solche Mauer an der Südseite vorhanden war, wie es auch noch jetzt der Fall ist) „erstrecken sich 60 Schritte in „die See hinein, die doch ohne Zweifel anfangs auf dem trockenen Ufer erbaut „worden. Einige wollen daraus billig schliessen, dass das Meer keinen Abfluss un- „ter der Erde habe, wie man vor Alters glaubte.“ Dieses Raisonnement ist nicht richtig, denn die an der Südseite ins Meer hinein laufende Mauer war im Gegentheil gerade dazu bestimmt soweit hinein zu reichen und einen noch sicherern Hafen von der Bucht abzuschneiden, als die Natur ihn liefert, sonst hätte diese Mauer gar keinen Zweck. Das zeigt auch schon der Anblick der Kämpfer'schen Abbildung. In Derbend haben wir einen ganz ähnlichen Fall, auch dort liefen die Mauern weit in's Meer hinein, so dass der von ihnen eingeschlossene Hafen durch eine zwischen gehängte Kette gesperrt werden konnte. — Nichts desto weniger ist das Factum, dass das Wasser vor 30 Jahren die See-Mauern nicht bespühlte nach dieser ausdrücklichen Erwähnung wohl nicht zu bezweifeln, obgleich es auffällt, dass Gärber hierüber nichts sagt. — Wie tief das Wasser aber niedriger gestanden habe, als im Jahre 1732, lässt sich hier auf keine Weise ausmitteln. Wir werden aus den Angaben an andern Orten sehn, dass bei dem niedrigsten Stande der Unterschied seines Niveau von dem des Jahres 1830 nicht sehr bedeutend gewesen ist. Wir können also aus dem von Lerch Gesagten schliessen, dass im Jahre 1733 das Wasser gegen 10 Fuss über der Höhe von 1830 gestanden habe, dass aber die Oberfläche desselben im Anfange des 18ten Jahrhunderts, niedriger gewesen

*) Büsching's Magazin. Tom. III. pag. 15.

sey, vielleicht nicht höher als gegenwärtig. In Hinsicht auf die Zeit dieses tiefern Standes herrscht aber Ungewissheit, da Lerch diese erste Reise schrieb, nachdem er die zweite 1747 bereits vollendet hatte, wie aus einigen Zeilen weiter, als die angeführte Stelle *), deutlich erhellt. Er kann daher unter *jetzt* eben so wohl 1732 als 1747 meinen, wo dann der niedrige Stand entweder 1702 oder 1717 statt fand. — In seiner zweiten Reise **) [1747] sagt Lerch von Baku zwar nur: „Die Schiffe können ganz nahe anlegen"; allein wir können schliessen, dass das Wasser damals bei dieser Stadt beinah eben so hoch gestanden habe, als 1732, weil er eines bedeutenden Unterschiedes gewiss ausdrücklich erwähnt hätte, da man aus mehreren Stellen seiner Reise sieht, dass er auf diesen Punkt wohl sein Augenmerk richtete. So wäre dann auch 1747 der Wasserstand um 10 Fuss höher, als bei meinem Besuche in dieser Gegend gewesen.

Gmelin erzählt ***) von Baku, wo er 1770 war; „es pflegen die Schiffe dicht vor der Stadtmauer sicher zu stehn"; welches wieder anzuzeigen scheint, dass das Wasser bis zu ihr gereicht, also 10 Fuss höher gestanden habe als jetzt. —

Bei Reineggs ****) im Jahre 1780 heisst es: „die Stadt Baku liegt 22 Werst „vom südlichen Arm des Kaukasus in einer flachhügelichten, fluss- und bachlosen „Ebene, die, so wie auch die Stadt, ans Meer stösst." Dieses zeigt eben so, wie die Aussage Gmelins, dass das Wasser gegen 10 Fuss höher stand als zu meiner Zeit.

Endlich erzählt noch Gamba (1820), dass seit 4 Jahren das Meer abnehme; diese Aussage haben wir bereits für den Beweis des Fallens des Wassers in den letzten Jahren, vorzüglich von 1816 an, benutzt.

Gehen wir nun von der Höhe des Wasserspiegels im Jahre 1830 aus, indem wir diese Höhe = 0 annehmen und setzen wir für den Augenblick den Stand des

---

*) Siehe die Folge dieser Abhandlung, wo von Lerch's Aussage über die Meerestiefe von Astrabad die Rede ist.

**) Büsching's Magazin. Tom. X. pag. 468.

***) Gmelin's Reise. Tom. III. 41.

****) Reinegg's Kaukasus. Tom. I. p. 144.

Wassers vor Bakui, als blos auf mehr oder weniger wahrscheinlichen Hypothesen beruhend, aus den Augen, so ergiebt sich aus den bisher benutzten Angaben für den Wasserstand bei Baku in verschiedenen Zeiten folgendes Resultat:

| | | |
|---|---|---|
| Im Jahre 1400 (Bakui) Höhe des Wassers | 15 | Fuss |
| — — 1685 (Kämpfer) — — — | 14 | — |
| Anfang des 18. Jahrhunderts (Lerch) wahrscheinlich nicht weit von | 0 | — |
| — — — 1727 (Gärber) — — — — — — | 10 | — |
| — — — 1732 (Lerch) — — — — — — | 10 | — |
| — — — 1747 (Lerch) — — — — — — | 10 | — |
| — — — 1770 (Gmelin) — — — — — — | 10 | — |
| — — — 1780 (Reineggs) — — — — — — | 10 | — |
| — — — 1820 (Gamba) — — — — — — | 7 | — |
| — — — 1830 (Lenz) — — — — — — | 0 | — |

Diese Zahlen sind begreiflicher Weise nur annäherungsweise genau, jedoch ist zu bemerken, dass ausser bei der Angabe von 1700, die Höhen eher zu klein als zu gross angegeben worden sind. — Wir können hieraus ersehen, dass die Höhe des Wasserspiegels im Ganzen bis zum Jahre 1700 abgenommen hat, dass sie aber von 1700 bis 1732 gestiegen ist und sich dann ziemlich unverändert erhielt, bis das schon oben erwiesene Sinken in neuerer Zeit eintrat. Eine regelmässige 30 jährige Periode des Steigens und Fallens wird durch diese Uebersicht vollständig widerlegt; in der Folge aber werden wir sehen, was wahrscheinlich zu dieser Sage, die fast alle spätern Reisenden von Lerch an erwähnen, Veranlassung gab. —

Ich wende mich jetzt zu denjenigen Datis, die wir von andern Orten als von Baku her haben, und werde dieselbe chronologische Folge dabei beobachten wie bisher, wenn nämlich die Angaben sich auf eine bestimmte Zeit beziehen. Hier ist nun vor Allem wichtig eine Stelle aus der Orenburgischen Topographie von Ritschkof*) weil sie, besonders mit Pallas Aussage vereinigt, sich am ausführlichsten und

---

*) Топографія Оренбургская, сочин Петромъ Рычковымъ. Tom. I. p. 207.

bestimmtesten hierüber verbreitet. Folgendes ist eine fast wörtliche Uebersetzung der hierauf Bezug habenden Zeilen: „Es findet noch ein anderer merkwürdiger „Umstand bei diesem Meere statt, dass nämlich das Wasser in demselben während „30 oder 35 Jahren steige und während eben so langer Zeit wiederum falle. Einige „behaupten, dass ein solches Steigen auf 5 oder 6 Faden sich belaufe d. h. auf circa „40 englische Fuss. Im Jahre 1715, wie man allgemein behauptet, fing es an zu „steigen und war im Jahre 1742 am allerhöchsten; aber 1743 begann es wieder „allmählig zu fallen und 1744 war es sichtbar, dass dieses Fallen bei den Inseln, „welche der See zu lagen, ungefähr 3 Fuss betrug; das Steigen dauerte auf diese „Weise 27 Jahre. Indessen ist es nicht sehr zuverlässig, dass das Steigen genau „1715 anfing, denn nur aus Versuchen, die mit Sachkenntniss angestellt worden „sind, kann eine solche Sache mit Sicherheit behauptet werden. Wenn ferner die „Einwohner sich nicht täuschen (was bei ungebildeten Leuten leicht möglich ist), „so findet bei höherem Wasser eine Zunahme von Kälte, bei niedrigerem eine Zunah- „me von Hitze in den Umgebungen dieses Meeres statt. Indessen ist so viel gewiss, „dass in dem Jahre 1741 und 1742 fast alle Gartengewächse, besonders die zarten „Bäume, wie Pfirsiche, Nüsse und ähnliche erfroren, und Alle behaupten einstim- „mig, dass schon seit 10 Jahren die Sommerhitze geringer sey, was einem geschick- „ten Physiker auszumitteln bleibt. Hiermit zu vergleichen ist was Pallas in seiner Reise über diesen Gegenstand sagt und was ich wörtlich aus ihm entlehne *). „Die „kleine Insel Kamenoi, welche an der nördlichen Seite mit ein Paar niedrigen Spit- „zen ausläuft, scheint jetzt überhaupt nur ungefähr zwei Ellen über die See her- „vorzuragen. Sie soll aber ehedem nicht nur viel grösser, sondern auch wirklich „vor 5 — 6 Jahren merklich höher gewesen seyn. An dieser und einigen andern „Inseln hat man sowohl, als an der ganzen Gurjefschen Gegend seit dem Jahre 1730 „ungemeine Veränderungen durch das Zunehmen der See beobachtet. Ich will hier „dasjenige anführen, was ich davon aus dem Munde eines Greises, welcher schon

---

*) Pallas Reise. T. I. pag. 434.

„vor selbiger Zeit, (d. h. vor 1730) in Gurjef gelebt hat, aufgezeichnet habe, ob- „gleich es nicht völlig mit demjenigen übereinstimmt, was davon in der Orenburg- „schen Topographie ist gemeldet worden. Vor gedachtem 1730sten Jahre soll die „Gegend um Gurjef trocken, die Ufer des Jaick (oder Ural) fast 2 Faden hoch ge- „wesen seyn, mit welchen jetzt das Wasser beinahe gleich steht. Die grossen Ein- „brüche und Busen, die sich jetzt bis nahe an Gurjef erstrecken, sind gar nicht vor- „handen gewesen. Die See war zwischen der Insel Kamenoi und dem festen Lande „so flach, dass man zuweilen, wenn ein Nordwind das Wasser vertrieb, zu Fuss „hinüber waten konnte. Ausser dieser Insel, die zu selbiger Zeit mehr als viermal „grösser war, befanden sich noch 3 andere Inseln nicht weit von der Jaikschen „Mündung, nämlich: Pestschannoi (die sandige) ungefähr 25 Werst von Kamenoi „weiter in die See hinein; Kaminin (камынинъ), östlich in einer geringen Entfer- „nung vom Ausfluss des Jaik; und Peschnoi bei der sogenannten Gogelskaja Kos- „sa, wo vordem ein ungemein starker Seehundsfang soll gewesen seyn. Nach dem „Anwachsen der See aber, welches im Frühling des vorgedachten merkwürdigen „Jahres auf 6 Faden soll betragen haben, sind die Inseln nicht wieder zum Vor- „schein gekommen. In eben diesem Jahre ist in diesen Gegenden der Schneefall, „der bis dahin, wie der Winter überhaupt, sehr gering war, so stark gewesen, „dass der Schnee den Mauern der Festung gleich gelegen. Vorher dauerte der rechte „Winter 2 Monate und die Schifffahrt war vom März bis zum Januar offen; nach- „her sind die Winter strenger und anhaltender geworden und das Eis steht nun- „mehr viel länger. Doch ist diese Kälte auch mit erfolgter Abnahme der See „wieder etwas gemindert worden. Diese Abnahme hat bis etwa vor 3 Jahren „gedauert (1766) und seit dem merkt man, dass die See wieder wächst. — Bei dem „niedrigsten Wasser aber soll doch noch ein Unterschied von beinahe 2 Faden ge- „gen die vorige Beschaffenheit geblieben seyn. — Wegen der abwechselnden Win- „de, die das Wasser bald an der nördlichen Küste anhäufen, bald vertreiben, lässt „sich übrigens von der Ordnung des Steigens und Fallens der See nichts Gewisses „bestimmen; ja es ist auch vielleicht gar keine Ordnung drin, sondern Alles von

„dem Zufluss des Wassers aus den Flüssen und folglich von der allgemeinen Wit„terung gewisser Jahre abhängig.“

So weit Pallas: vergleichen wir diese Angaben mit den kurz vorher citirten aus der Orenburgschen Topographie, so finden wir zwischen beiden darin Uebereinstimmung dass ungefähr in der ersten Hälfte des 18. Jahrhunderts ein bedeutendes Steigen des kaspischen Meeres statt gefunden habe, welches bei beiden bis auf 6 Faden oder bis circa 40 Fuss angegeben wird; allein in Hinsicht auf die Zeit weichen sie sehr von einander ab. Nach der Topographie fing das Steigen 1715 an und dauerte bis 1742, nach Pallas erreicht es seine höchste Höhe 1730; dort wird nur angegeben dass das Wasser 1744 wieder um 3 Fuss gefallen war, nach Pallas aber nahm es bis 1766 ab, und stieg dann wieder; jedoch erwähnt er, dass es selbst beim niedrigsten Stande noch um 2 Faden höher stand, als vor dem grossen Steigen. Ueberhaupt sieht man aus Pallas Beschreibung selbst, dass das Fallen nachher sehr unbedeutend gewesen seyn müsse, denn er fand 3 Jahre nach dem niedrigsten Stande, als man eben erst wieder ein Steigen zu bemerken anfing, die Ufer des Jaik oder Ural fast mit dem Meer gleich hoch und die Insel Kamenoi 4 mal kleiner, als sie vor dem Steigen gewesen seyn soll; die Topographie schweigt gänzlich über ein bis zu ihrer Zeit (1762) fortgesetztes Fallen, nur während des Jahres 1744 fand es nach ihr statt und betrug 3 Fuss. — Endlich wird nur dann der Unterschied der Angaben in den beiden angeführten Stellen begreiflich, wenn man den Stand des Wassers von 1730 bis 1743 als fast constant voraussetzt, kleine Unterschiede abgerechnet, die jährlich in diesem Meere statt finden, und ihren Ursprung in der verschiedenen Richtung der Winde und dem hygrometrischen Zustande der Jahreszeiten haben. Was aber die Angabe der Höhe auf 40 Fuss betrifft, so ist sie auf jeden Fall sehr übertrieben. Dieses ist schon daraus klar, dass das Meer in diesem Falle vor dem Steigen, namentlich am nördlichen Ufer, mehrere Werste weiter von den jetzigen Küsten zurückgestanden haben müsste, wodurch die Schifffahrt fast gänzlich unmöglich gemacht worden wäre. Auch widerspricht die Aussage sich geradezu selbst. Vor dem Steigen betrug die Höhe der Ufer des Ural 2 Faden, nach dem-

selben waren sie fast mit der See gleich hoch, was also ein Steigen von nicht zwei Faden begründen würde. Doch, glaube ich, selbst diese Höhen sind noch etwas zu hoch angegeben und man kann das Steigen auf nicht mehr als 10 Fuss anschlagen. Ich habe mich durch häufige Erfahrungen davon überzeugt, wie die dortigen Einwohner die Höhe der Ufer fast immer überschätzen; das zeigte sich mir namentlich bei Nargen und bei den Thürmen der Karavanserai, die in der Bai von Baku unter dem Wasser liegt. Bei dieser letztern wurde der aus dem Wasser hervorragende Theil mir fast einstimmig auf 7—8 Fuss hoch angegeben, während sich die Höhe bei der Messung, wie ich bereits oben erwähnte, an ihren höchsten Punkten uur auf 4′ 5″ englisch beläuft. — Hiernach wird man auch wohl von der Höhe der ehemaligen Ufer des Jaik, die 14 englische Fuss betragen haben sollen, einige Fuss abrechnen müssen. Uebrigens ist es von keiner bedeutenden Wichtigkeit, ob die Zunahme der Höhe 10 oder 14 Fuss betragen habe; nur die Höhe von 40 Fuss ist sehr übertrieben. Es scheint sich also aus dem bisher Gesagten so viel als das Wahrscheinlichste zu ergeben:

1) Das kaspische Meer ist in dem ersten Drittheile des 18ten Jahrhunderts bedeutend gestiegen.
2) Nach diesem Steigen ist es vielleicht etwas gefallen, aber auf jeden Fall sehr unbedeutend.
3) Das Steigen kann nicht viel mehr als 10 Fuss betragen haben.
4) Das Steigen des Meeres ist von strengen Wintern begleitet gewesen, welche nachgelassen haben, sobald es aufhörte.

Vergleichen wir diese Resultate mit den bei Baku erhaltenen, so finden wir auch dort im Anfange des 18ten Jahrhunderts einen niedrigen Stand durch Lerch angemerkt, so dass diese Facta sehr wohl mit einander übereinstimmen; die Zeit des höchten Standes passt ebenfalls sehr wohl, besonders zu Pallas Angaben, denn 1732 fand auch Lerch das Wasser wieder an den Mauern von Baku; übrigens ist nichts in seiner Angabe, was einem fortgesetzten, nur unbedeutenden, Steigen bis 1743 entgegen wäre. Jedoch ein beträchtliches Sinken bis 1766 wird durch Gmelin,

bei welchem sich sogar eine Abbildung der von den Wellen bespühlten Stadt findet, vollständig widerlegt. — Wir wollen aber, ehe wir in unsern Schlüssen weiter gehen, erst die Angaben anderer Schriftsteller über diesen Gegenstand berücksichtigen.

Lerch spricht ebenfalls von Beweisen eines Anschwellens der See*), wovon ich einige bereits erwähnt und deren Ungrund gezeigt habe; dazu gehört der Umstand, dass die Mauern Baku's an der Südseite der Stadt ins Meer hineinlaufen, was Lerch für einen Beweis vom Steigen des Wassers hält, was es aber keineswegs ist. Ferner sagt er: „In Gilan, unweit Rescht, ist ein Busen 20 Werst lang, in welchem „die russischen Schiffe noch vor 20 Jahren bei der Halbinsel Ensely bis Peribasar „einfahren konnten, welches jetzt aber nicht mehr möglich ist, wie ich 1747 be„merkt habe. Die Schiffe müssen 3 Werst davon vor Anker liegen. — Bei Astra„chan, am Ausfluss der Wolga, war auf der Insel Jarky ein grosses Magazin; es „musste aber in den letzten Jahren verlassen werden, weil die See den Ort nach „und nach überschwemmte. Wenn den Einwohnern von Baku zu glauben ist, so „hat in alten Zeiten das Land an dem grossen Dorfe Schich-Derewna auf der Halb„insel rechter Hand (der südlichen Endspitze der Bai von Baku) mit der Insel Nar„gen zusammen gehangen, welche jetzt bis 3 Werst von einander liegen, da die „Schiffe durchfahren. Es ist die Zunahme der See auch deswegen sehr glaublich, „weil, ausser der Wolga, aus dem hohen kaukasischen und hyrkanischen Gebirge „sehr viel Flüsse in die See sich ergiessen, welche unmöglich, obgleich die Hitze „gross ist, wieder ausdünsten können."

Hierüber lässt sich Folgendes bemerken: der erste Umstand, dass die Bai von Rescht allmählig flacher wurde, so dass sie nicht wie früher von Schiffen befahren werden kann, würde offenbar eher ein Fallen der See beweisen, auf keinen Fall aber ein Steigen; ich glaube indessen, dass auch jenes nicht die wahre Ursache der Verflachung der Bai bei Rescht ist, sondern dass dieselbe von Sandanschwemmungen durch die Meereswellen abzuleiten sey, wie solches von der Rhede von Der-

*) Büsching's Magazin. T. III. pag. 15.

bend erwiesen ist. Jedenfalls ist ein Flachwerden der Meerestiefe an den Ufern kein Beweis, der für irgend etwas entschiede; etwas anderes wäre es, wenn ein Sinken des Meeresspiegels an der Küste beobachtet worden wäre. Was das Magazin am Ausfluss der Wolga betrifft, so ist die Zeit nicht genau angegeben, wo es abgebrochen werden musste; vielleicht fällt sie mit dem vorher erwähnten Steigen bis zum Jahre 1743 zusammen, vielleicht aber wurde die Insel durch die Fluthen der Wolga allmählig fortgespühlt. Also auch hieraus lässt sich nichts Gewisses ableiten.

Der Sage eines früheren Zusammenhanges der Insel Nargen mit dem Vorgebirge Schichu habe ich schon oben ausführlicher erwähnt; die Zeit dieses Zusammenhanges ist aber offenbar sehr weit zurückzusetzen, wie auch schon Lerch selbst mit den Worten „in alten Zeiten" bemerkt. Endlich wird die Unmöglichkeit einer so starken Verdunstung des Wassers, dass sie den Zufluss der Flüsse compensire, in den spätern Jahren durch die That widerlegt. Wir sind also durch die Bemerkungen Lerch's auf keine neue Erscheinungen in Hinsicht der Veränderungen des Niveau des kaspischen Meeres geführt worden, die sich nicht auf die bereits früher erlangten Resultate zurückführen liessen.

In Hanway's Reise *) findet sich über den uns interessirenden Gegenstand Folgendes, was ich bis auf einige Abkürzungen derjenigen Stellen, die nicht zur Sache gehören, hier wörtlich anführe: „Als die Russen zuerst anfingen die kaspische „See zu befahren, wovon man glaubt, dass es um das Jahr 1556 gewesen sey, so „fanden sie nur 5 Fuss Wasser auf beinahe 9 Meilen gegen Süden und Südost von „Четыре Бугры (am Ausfluss der Wolga). — Peter der Grosse fand 1722 in „derselben Entfernung nur 6 Fuss Wasser, so dass er seine Flotte, die aus klei„nen Fahrzeugen bestand, ziemlich weit vom Lande absegeln lassen musste. — „Nahe bei Четыре Бугры ist jetzt 12 Fuss Wasser (Hanway war 1743 dort).... „Das Wasser ist innerhalb 30 Jahren stark gestiegen und hat an der russischen

*) Hanway's Reise. T. I. pag. 109.

„Seite, ungefähr in 20 Werst von der Mündung der Wolga und Astrachan, bei-„des an der Ost- und Westseite des grossen Kanals dieses Flusses, stark um sich „gegriffen. Auch hat diese See die Perser eben so wenig geschont; denn es wird „zuverlässig berichtet, dass im Anfang dieses Jahrhunderts das Land auf ungefähr „8 englische Meilen an der Seite des Flusses Longorood (in der Nähe von Rescht „an der Südwestküste) trocken und wohl bewohnt gewesen sey. Dies glaube ich „um so viel mehr, weil die Spitzen einiger Häuser noch zu sehen sind, wenn das „Wasser nur einige Fuss tief ist. Eben dasselbe wird von Astrabad (an der Süd-„ostküste) berichtet, wo die Einwohner versichern, dass noch innerhalb 50 Jah-„ren durch die Bai Esel haben gehn können und jetzt hat man daselbst 2 Klafter „Wasser. Capitain Woodroof hat dasselbe (1743) zu Balkhan (an der Ostküste) „gehört, so dass keinesweges zu zweifeln ist, dass die grossen Flüssen Wolga, Jaik, „Jamba, Sambur, Kura, Sefiet Rood und andre kleinere eine unermessliche Menge „Wasser hineingebracht haben, welches von der Sonne nicht wieder in Dünsten „herausgezogen wird und dieses ist eben, was die Einwohner an den Küsten un-„ruhig macht.“ — Zuletzt schreibt Hanway dieses Steigen der See noch den *seit einiger Zeit gemässigteren Sommern* zu.

Diese ganze Aussage Hanway's bestätigt vollkommen die Zunahme der See vom Anfange des 18ten Jahrhunderts an bis gegen das Jahr 1743 und beweist noch ausserdem, dass diese Zunahme an allen Küsten des kaspischen Meeres bemerkt wurde, an der westlichen, südlichen, östlichen und nördlichen. Wenn die Nachricht über Astrabad zuverlässig ist, dass nämlich an der Stelle der Bai, wo gegen das Jahr 1700 Esel durchgehn konnten, im Jahre 1743 sich 2 Klafter tiefes Wasser befand, so müsste die Zunahme ungefähr 10 Fuss betragen haben, was mit unserem oben erhaltenen Resultate sehr wohl übereinstimmt. — Was aber die unter dem Wasser befindlichen Gebäude betrifft, so möchte es wohl nicht anzunehmen seyn, dass sie durch das Steigen des Wassers im Anfang des 18ten Jahrhunderts verschlungen wurden (das würde ja ein Steigen von mehr als 40 Fuss voraussetzen), sondern ihr Untergang gehört wohl in eine viel frühere Periode, wahrscheinlich in eine und

dieselbe mit dem der Karavanserai bei Baku und bei dem Silberhügel, wovon weiter oben die Rede gewesen ist. Ebendasselbe gilt, meiner Meinung nach, auch von der Erzählung Gamba's *), dass es eine Sage gebe, man habe ehemals längs dem Meere von Sallian bis Lenkoran gereiset auf einem Wege, der heut zu Tage zum Theil von den Meereswogen bedeckt ist.

Endlich füge ich noch zu dem bisher Erwähnten die Ansicht Gmelin's **) hinzu, da sie in der That viel Wahres enthält und dem von mir weiter oben Bemerkten zur Bestätigung dienen kann: „Nun noch einige Worte von dem Steigen und „Fallen der kaspischen See. Es ist zuverlässig, dass solches seine Richtigkeit habe, „aber ganz ungegründet, dass die Natur mit demselben eine gewisse Ordnung be„obachte. Wie an den Ufern dieser See grosse und kleine, merkliche und unmerk„liche, steile und niedrige Sandberge entstehen und wie solche bei veränderten Um„ständen wieder vergehen, so verhält es sich auch mit den Inseln. Es kommt Al„les auf die Witterung und auf die Winde an und die sich in die See stürzenden „Flüsse tragen zu diesem Phänomen gleichfalls ein Namhaftes bey."

Das bisher Erwähnte enthält meines Wissens alle Aussagen, die sich über das Steigen und Fallen des kaspischen Meeres vorfinden, denn was etwa neuere Reisende hierüber noch erwähnen, beruht auf eben diesen Aussagen der älteren Autoren. Wir sind durch dieselben auf das Hauptresultat eines bedeutenden Steigens des Meeresspiegels im Anfang des 18ten Jahrhunderts geleitet worden. — Nun sehen wir aber aus der Angabe Kämpfer's und seiner deutlichen Abbildung der Stadt Baku, dass noch im Jahre 1686 das Wasser bei dieser Stadt sehr hoch gestanden habe, es folgt also unwiderleglich hieraus, dass es von diesem Jahre bis zum Anfang des 18ten Jahrhunderts bedeutend *gefallen* sey; dass also dem eben nachgewiesenen *Steigen* ein wenigstens eben so grosses *Sinken* des Wasserspiegels vorangegangen sey. — Wir finden dieses Sinken zwar sonst nirgends ausdrücklich erwähnt, allein als ein zweiter Beweis dafür kann uns die oft schon angeführte und

*) Gamba, voyage etc. Tom. II. pag. 307.

**) Gmelin's Reise. Tom. III pag. 267.

fast von allen Schriftstellern wiederholte Sage einer 30jährigen Periode des Steigens und Fallens des Niveau des kaspischen Meeres dienen. Diese so allgemein verbreitete Sage muss auf irgend einem Factum beruhen, es muss irgend einmal eine solche Periode statt gefunden haben, durch welche die Einwohner voreilig auf eine hierbei vorwaltende Regelmässigkeit zu schliessen veranlasst wurden, wie das bei Leuten, die durch keine wissenschaftliche Bildung vorsichtig gemacht worden sind, ja ganz gewöhnlich ist. Da wir nun später eine solche Periode nicht finden und da überhaupt dieser Sage schon von Hanway im Jahr 1743 Erwähnung geschieht, als das Wasser ungefähr wieder seine höchste Höhe erreicht hatte, so führt uns dieses nothwendig zu der Annahme, dass dem Steigen im 18ten Jahrhundert ein Sinken vorausgegangen seyn müsse, welches so wie jenes circa 30 Jahre gedauert hat, und wirklich ist zwischen Kämpfer's Anwesenheit in Baku (1685) und dem Jahre 1715, wo nach der Orenburgschen Topographie das Steigen anfing, gerade ein Zeitraum von 30 Jahren enthalten.

Bevor ich nun zu dem letzten Zusammenfassen des bisher Erwiesenen schreite, muss ich noch eines Factums erwähnen, welches mit dem so eben Ermittelten nicht in Uebereinstimmung zu seyn scheint, nämlich des Verschlingens der alten Stadt Terek durch die Meereswogen. Diese Stadt, über welche sich ausführliche Nachrichten in Müllers Sammlung russischer Geschichte *) finden, lag am Ausfluss des Flusses Terek, aber 4 Werst von der See (T. IV. p. 404) auf einer Insel, die von 2 Armen des Tereks gebildet wurde. Peter der Grosse fand ihre Lage so ungünstig, dass er beschloss, sie an einen andern Ort zu verlegen; sie lag nämlich zwischen Schilf und Sumpf. Im Jahr 1728 wurde sie daher geschleift und ihre Einwohner zogen zuerst nach der 80 Werst davon neu angelegten Festung Swätoi Krest am Sulak und, als dieser Ort später (1736) ebenfalls zerstört ward, nach Kislar. Müller schreibt an einer andern Stelle (Tom. IV. pag. 10, Anmerk.) im Jahre 1760: „Jetzt ist die Gegend, wo das ehemalige Terek lag, ganz unter Wasser.“ Dieses

*) Müller's Sammlung russischer Geschichte. Tom. IV. pag. 9. 10. 17. 153. 404—409, und T. VII. pag. 112. 519.

Verschwinden der Stätte des alten Terek, wenn es wirklich einem Steigen des kaspischen Meeres zugeschrieben werden soll, steht ganz isolirt da, da es statt fand, als das Meer bereits seine höchste Höhe erreicht hatte. Ich glaube aber, dass an demselben nicht sowohl das Meer, als vielmehr der Fluss Terek, der bekanntlich seinen Lauf jährlich mehr oder weniger bei seinem Ausflusse ändert, schuld sey. Die beiden Arme desselben, welche die zwischen Sumpf und Schilf liegenden Ruinen der alten Stadt umflossen, spühlten die zwischenliegende Insel allmählich fort, was ihnen jetzt wahrscheinlich noch dadurch erleichtert ward, dass in dem unbewohnten Ort niemand durch künstliche Mittel dem Zerstören des Flusses Einhalt thun konnte; vielleicht war es gerade durch diese Trümmer der Stätte der ehemaligen Stadt, dass der Fluss sich allmählich seine damalige Mündung so verstopfte, dass er gezwungen wurde, sich einen andern, mehr nördlichen, Ausfluss zu durchbrechen, den er gegenwärtig noch hat. Für diese meine Ansicht spricht eine Stelle aus Gamba's Reise *), die wahrscheinlich auf Aussagen der dortigen Einwohner beruht. Es heisst dort wörtlich: „*Cette ville (Tarkou) ne doit pas être confondue avec un* „*autre Tarki, que les géographes anciens plaçaient vers l'embouchure du Terek et* „*qui n'existe plus aujourd'hui,* „*les eaux de ce fleuve*“ *et les guerres ayant occa-* „*sionné sa destruction.*“ Ich selbst konnte in jenen Gegenden nichts vom alten Terek mehr erfahren, die dortigen Einwohner sprechen zwar von den Ruinen einer alten Stadt, allein nach genaueren Erkundigungen war hier unstreitig Swätoi Krest am Sulak gemeint.

Ueberblicken wir zuletzt Alles, was sich aus dem Bisherigen ergab, so werden wir zu folgenden Resultaten geführt:

Zu einer Zeit, die genau anzugeben unmöglich ist, die aber wenigstens vor dem Jahre 500 angenommen werden muss, hat das kaspische Meer mit dem Asovschen und mit dem Aralsee zusammengehangen. Diess ist die Hypothese von Pallas, für die aber Gründe sprechen, welche sie äusserst wahrscheinlich machen.

---

*) Gamba, voyage ect. Tom. II. pag. 351.

Zu einer Zeit, die ebenfalls sehr weit zurückgesetzt werden muss und wenigstens vor Erbauung des jetzigen Baku fällt, hat an den südlichen Küsten des kaspischen Meeres ein sehr bedeutendes Steigen seiner Oberfläche statt gefunden, welches wenigstens auf 50 Fuss angeschlagen werden muss. Dieses ergab sich aus dem sehr wahrscheinlichen früheren Zusammenhange Nargen's mit dem Festlande, aus dem in der Bai von Baku, am Silberhügel und bei Rescht unter Wasser stehenden Gebäuden u. s. w.

Nachdem die Oberfläche aber einmal diese Veränderungen erlitten hatte, ist ihre Höhe *im Ganzen* ziemlich gleich geblieben, jedoch scheint aus Bakui's und Kämpfer's Angabe ein geringes allgemeines Fallen sich zu ergeben, so dass die mittlere Höhe des 18ten Jahrhunderts niedriger ist als im Jahre 1400 (um circa 5 Fuss), wo das Wasser noch bei der Moschee stand, also, wie es scheint, in den Strassen der jetzigen Stadt.

Von diesem gleichen Stande im Allgemeinen können aber 2 temporäre Ausnahmen mit Sicherheit nachgewiesen werden. Vom Jahre 1685 etwa bis gegen 1715 fiel das Wasser um circa 10 Fuss und stieg wieder bis zum Jahre 1743. Dann erhielt es sich ohne *bedeutende* Veränderungen in derselben Höhe bis 1816, von welchem Jahre an ein merkliches, aber nicht durchaus regelmässiges Fallen bis zum Jahre 1830 von mir nachgewiesen und mit Sicherheit auf 10 Fuss berechnet worden ist.

Das sind die Resultate, die sich aus der Gesammtheit aller bisher über das Steigen und Sinken des kaspischen Niveau angestellten Beobachtungen herleiten lassen; es bleibt mir nur noch übrig einige Betrachtungen über die Ursachen dieses merkwürdigen Phänomens hinzuzufügen. Ich fange mit der Periode des Steigens und Fallens, die um das Jahr 1700 statt fand, und mit den Veränderungen in den letzten Jahren an, da diese beiden Phänomene aus historischen Datis nachgewiesen werden können, während die früheren auf einer, wenn auch wahrscheinlichen, Hypothese beruhn.

Diese beiden erstgenannten Phänomene nun haben im Ganzen vollkommne Aehnlichkeit mit einander, sobald man annimmt (was aus dem Folgenden sehr wahrscheinlich werden wird), dass dem jetzigen Sinken des Wasserspiegels ein künftiges Steigen folgen werde; ich werde sie daher beide aus einem Gesichtspunkte betrachten und aus denselben Ursachen zu erklären suchen. Für's Erste kann man die Sache auf zweierlei Weise ansehn; man kann nämlich die Veränderung des Niveau entweder der *Wasserfläche selbst* oder den *umgebenden Ufern* zuschreiben und im letztern Falle annehmen, dass das Sinken desselben nur scheinbar sey und eigentlich in einem langsamen Erheben der Ufer, durch innere vulkanische Kräfte, seinen Ursprung habe, so wie das Steigen desselben in einem Sinken der letzteren. Dieser Ansicht treten aber sogleich bedeutende Schwierigkeiten in den Weg. Ich habe nämlich oben nachgewiesen, dass die Veränderungen der Wasserhöhe sowohl um das Jahr 1700, als auch in den letzten Jahren allgemein an allen Küsten dieses Meeres beobachtet worden sey; wollte man daher z. B. das Sinken einer Erhebung der Küsten zuschreiben, so würde dieses voraussetzen, dass sich alle Küsten rund umher gegen den Mittelpunkt des grossen Wasserbeckens erhöben, denn würde dieses blos an einer Seite desselben geschehen, während die entgegengesetzen Ufer sich unverändert erhielten, so würde daraus bei einem geschlossenen Bassin, wie dieser Landsee eins darstellt, nothwendig ein Steigen des Wassers an den letzteren folgen. Die Ansicht einer Erhebung aller Küsten gegen den Mittelpunkt hat aber gewiss etwas sehr Unwahrscheinliches an sich. — Allein man kann die Sache noch anders ansehn, nämlich als ob sich der Boden des Meeres in der Mitte desselben allmählich senke und auf diese Weise würde die Erklärung des Phänomens allerdings viel einfacher werden. Dieser Ansicht steht zwar im Anfang des 18ten Jahrhunderts das, nach dem Sinken, wieder erfolgte Steigen des Wassers bis auf ungefähr dieselbe Höhe entgegen; es scheint nämlich, als müsste zur Erklärung desselben der so eben gesunkene Boden sich wiederum erhoben haben; ein solches abwechselndes Steigen und Fallen des festen Bodens hat aber nicht viel Wahrscheinliches für sich und wir finden kein analoges Beispiel dafür an andern Orten. Allein

bei weiterem Nachdenken werden wir finden, dass wir desselben überhaupt zu der von uns gesuchten Erklärung gar nicht bedürfen. Wir haben nämlich oben bereits erwähnt, dass das kaspische Meer ohne alle Verbindung sey mit irgend einem andern Meere, dass also das von den Flüssen zugeführte Wasser nur durch Verdunstung entweichen könne, d. h. wir müssen annehmen, dass der sich während eines Jahres bildende Wasserdunst einer Oberfläche, gleich der des kaspischen Meeres bei seinem Normalstande, gerade eben so viel tropfbares Wasser entziehe, als ihr von den, in diesen See sich ergiessenden, Flüssen zugeführt wird. Sobald daher die Oberfläche kleiner wird, kann auch die Verdunstung nicht mehr so viel betragen, während doch der Zufluss derselbe bleibt, das Wasser muss also dann allmählig wieder steigen. Eine solche Verringerung der Oberfläche findet aber natürlicher Weise statt, sobald sich dieselbe durch ein Sinken des Bodens von den alten Ufern zurückgezogen hat; wenn daher das Sinken des Bodens aufhört, wird in den nächsten Jahren ein allmähliges Steigen der Wasseroberfläche darauf folgen, bis dieselbe wiederum ihre normale Ausdehnung erlangt, d. h. bis sie wieder die alte Höhe an den Ufern erreicht hat. Jedoch auch diese Ansicht bietet immer noch Schwierigkeiten dar, die dazu beitragen, sie weniger wahrscheinlich zu machen. Nehmen wir zuerst an, der ganze Boden senke sich, so müsste dieses Sinken während der Periode des Steigens und Fallens im Anfang des 18. Jahrhunderts etwa 10 Fuss betragen und die durch die Sonde bestimmten Meerestiefen müssten sich nach dem nachherigen Steigen um eben so viel vergrössert haben. Diese Zunahme der Tiefen ist aber nicht bemerkt worden, wo man auch das Senkblei hinabgelassen hat, wenigstens findet sich nichts dem Aehnliches erwähnt; es könnte sich also nur der Theil des Bodens gesenkt haben, wo die Tiefen nicht bestimmt worden sind, nämlich die Mitte des grossen Landsees. Dann muss aber begreiflicher Weise diese Senkung auf viel mehr als 10 Fuss berechnet werden; die Zunahme der Tiefe nach dem Steigen an diesen Stellen wird sich zu 10 Fuss verhalten, wie sich die ganze Oberfläche des Wassers zu der des sich senkenden Theils verhält; wäre es also $\frac{1}{8}$ der Oberfläche, (was gewiss nicht zu wenig angenommen ist) was sich senkte, so wäre die Zunahme

der Tiefe 80 Fuss. Man sollte aber glauben eine solche Zunahme müsste an einem oder dem andern Orte doch bemerkt worden seyn, so wie noch mehr die daraus nothwendig folgende bedeutende Abnahme der Salzigkeit des Wassers und nur die Unvollständigkeit der Nachrichten, die man über diesen Punkt vor dem Jahre 1700 besitzt, lassen sich hiergegen in Anregung bringen und machen, dass die so eben entwickelte Ansicht eines Sinkens des Meeresbodens, zur Erklärung der temporären Veränderungen der Höhe seines Wasserspiegels, noch nicht geradezu zurückgewiesen werden kann. Wir können aber hoffen darüber ins Reine zu kommen, wenn, nach dem gegenwärtigen Sinken, das Wasser wieder anfangen wird zu steigen, was nach dieser Hypothese sowohl, als nach der noch anzuführenden, nothwendig wieder erfolgen muss; wir haben nämlich jetzt genauere Angaben der Salzigkeit und der verschiedenen Tiefen dieses Meeres, so dass wir dieselben mit den, nach dem wiedererfolgten Steigen, anzustellenden werden vergleichen und darnach entscheiden können.

Die zweite zulässliche Hypothese, welche das Sinken der Wasseroberfläche nicht dem Sinken des Bodens, sondern einer, eine Zeit lang, stärkeren Verdunstung derselben zuschreibt, hat ausserdem, dass sie die einfachste und die zuerst sich darbietende ist, noch Manches für sich, namentlich den aus der Orenburgschen Topographie angeführten und von Pallas und Hanway wiederholten Umstand, dass nämlich das Steigen des Wassers von kälteren Jahren, als gewöhnlich und als die vorhergehenden, begleitet worden sey, und diese Bemerkung hat um so mehr Gewicht, da sie nicht gemacht wird um einen Erklärungsgrund für das in Rede stehende Phänomen abzugeben, sondern vielmehr die grössere Kälte von den Einwohnern Orenburgs als *Folge* des Steigens, und nicht als Ursache angesehen wird. Was das Sinken des Meeres in den letzten Jahren betrifft, so kann ich zwar nicht nachweisen, dass seit dem Jahre 1816 die mittlere Temperatur des Jahres an den Küsten des kaspischen Meeres um etwas gestiegen, noch auch dass die Verdunstung durch andere Umstände, z. B. durch vorherrschende trockne Winde, begünstigt worden sey (dazu fehlt es gänzlich an genauen meteorologischen Beobachtungen), allein ich muss wenigstens anführen, dass ich im ganzen Dagestan überall klagen hörte, über

die schreckliche Hitze in den Sommermonaten, die bis auf 40° Reaum. steigen soll und sehr gefährliche Gallenkrankheiten zur Folge hat; ob diese Hitze in diesen Gegenden aber normal und seit dem Jahre 1816 nicht grösser als früher geworden sey, darüber lässt sich freilich nicht mit Bestimmtheit entscheiden. Wir sehen also, dass zwischen beiden möglichen Erklärungsarten bis jetzt nicht mit hinreichendem Grunde gewählt werden kann; ich bemerke nur, dass nach beiden ein baldiges Steigen der in den letzten Jahren gesunkenen Oberfläche des kaspischen Meeres erwartet werden muss, denn auch nach der letzteren Erklärungsart ist die stärkere Verdunstung auf keinen Fall als normal und dauernd anzusehn und es muss sich, sobald sie aufhört, die Ausdünstung mit dem Zufluss der Ströme wieder in's Gleichgewicht setzen und die Oberfläche folglich ihre alte Ausdehnung und Höhe wieder annehmen.

Zum Schlusse sey es mir noch vergönnt auch in Hinsicht auf die, wahrscheinlich schon vor Anfang der christlichen Zeitrechnung vorgefallenen, Veränderungen der Höhe des kaspischen Meeres etwas zu sagen und den von Pallas und Kephalides aufgestellten Hypothesen hierüber noch Einiges hinzuzufügen. — Beide angeführte Schriftsteller sind über den früheren Zusammenhang des kaspischen Meeres mit dem schwarzen einig und auch ich glaube, dass die von ihnen angeführten Gründe die Sache sehr wahrscheinlich machen. Allein in Hinsicht auf die Erklärung des erfolgten Aufhörens dieses Zusammenhangs differiren sie. Pallas nämlich, sich auf Tournefort's Meinung über den früheren Zusammenhang der Ufer des thracischen Bosporus stützend, glaubt, dass die Trennung beider Meere beim Durchbruch desselben erfolgt sei; Kephalides aber nimmt an, sie sei entstanden, als die Gegend zwischen den beiden jetzigen Meeren durch Anschwemmung der Flüsse allmählich so sehr erhöht wurde, dass die Fluthen sie nicht mehr überströmen konnten.

Gegen beide Ansichten lassen sich mancherlei Einwendungen machen, von welchen ich einige anführen will. — Wir wissen nämlich dass Engelhardt und Parrot das Niveau des kaspischen Meeres um circa 300 Fuss tiefer fanden, als das des

schwarzen; um so viel müsste also das erstere Meer ehemals höher gestanden haben, als beide noch Zusammenhang mit einander hatten. Nun finden sich zwar unbestreitbare Spuren des höhern Standes an den nördlichen Küsten desselben, besonders in der Gegend des Laufes der Kuma und des Manitsch, allein keinesweges bei Baku und überhaupt an den Südküsten dieses Meeres, wo dasselbe doch gleichfalls weit in's Land hineingereicht und sein früheres Daseyn auf ähnliche Weise, als an den Nordküsten, bezeichnet haben müsste; das Nichtvorhandenseyn solcher Spuren widerstreitet also dem ehemaligen höheren Stande des Wassers in der südlichen Hälfte dieses Meeres. Ja wir haben in dem Obigen nachgewiesen, dass in dieser Südhälfte des kaspischen Beckens nicht nur kein Sinken anzunehmen sey, sondern dass im Gegentheil eine Menge Facta dafür sprechen, dass daselbst ehemals ein Steigen des Niveau stattgefunden habe, welches wenigstens auf 50 Fuss angeschlagen werden muss. — Endlich aber ist es nicht zu begreifen, wie das kaspische Meer nicht einen höhern Grad von Salzigkeit habe, als wir in der That an seinem Wasser bemerken. Es ist nämlich klar, dass bei dem ungeheuren Umfange, den dasselbe haben musste, als seine Höhe 300 Fuss über der jetzigen betrug, und der, nach Pallas Verzeichnung der ehemaligen nördlichen Grenzen desselben, wenigstens auf das dreyfache von dem jetzigen angeschlagen werden kann, die Verdunstung viel stärker gewesen seyn muss, als der Zufluss der Ströme; daraus folgt aber nothwendig ein Zuströmen der Gewässer des Asovschen Meeres ins kaspische und folglich für letzteres eine bedeutende Salzigkeit. Als daher nach der Trennung das kaspische Meer, durch Verdunstung des bei weitem grösseren Theils seines Wassers, die jetzige Grösse erhielt, so müsste man in der That erwarten, dass es viel mehr Salztheilchen in seinem Wasser aufgelöst enthalten sollte, als dieses der Fall ist. —

Alle diese Gründe zusammengenommen führten mich auf eine Hypothese, die mir die so eben erwähnten Schwierigkeiten zu beseitigen scheint und die in dem Folgendem enthalten ist.

Zuvörderst lässt sich zeigen, dass das Steigen der Wasserfläche um 50 Fuss nur ein scheinbares gewesen seyn könne, d. h. dass dasselbe vielmehr einem Sinken

desjenigen Bodens, an welchem es beobachtet worden ist, zugeschrieben werden muss. Denn entweder fand dasselbe statt, noch ehe die Trennung des schwarzen und kaspischen Meeres vor sich gegangen war, oder nach dieser Zeit; in beiden Fällen setzt es voraus, dass die Wasserfläche einmal um wenigstens 50 Fuss niedriger gestanden habe, als jetzt. Dieses kann vor der Trennung beider Meere nicht der Fall gewesen seyn, da im Gegentheil die Oberfläche damals über 300 Fuss höher gestanden haben muss, als gegenwärtig; nach der Trennung aber kann ein so niedriger Stand ebenfalls nicht zugestanden werden oder es müssten sich damals nicht alle die Flüsse hineinergossen haben, die jetzt diesem Meere ihr Wasser zuführen, da die gegenwärtige Oberfläche gerade die Grösse hat um eine, zur Compensation des Zuflusses, hinlänglich starke Verdunstung möglich zu machen. Wir sind also gezwungen dasjenige Steigen der Oberfläche des kaspischen Meeres, wovon in diesem Augenblicke die Rede ist, einem Sinken des Bodens zuzuschreiben. Dass aber ferner dieses Sinken nicht ein bloss partielles derjenigen Orte, wo man die Spuren desselben vorfindet (bei Baku, Rescht und dem Silberhügel) gewesen sey, sondern sich vielmehr auf die ganze Gegend der Südhälfte des kaspischen Meeres erstreckt habe, dafür scheint z. B. bei Baku die regelmässige, ganz und gar nicht unterbrochene Schichtung des Muschelkalks, wie ich sie auf Nargen, gegen das Vorgebirge Schichu zu, beobachtet habe, zu sprechen; so wie auch der gute Zustand der unter Wasser stehenden Karavanserai auf kein stürmisches Einstürzen, sondern vielmehr auf ein langsames, über eine weite Strecke hin sich verbreitendes, Einsinken hindeutet. Das Letztere lässt sich auch von den übrigen unter Wasser gesetzten Gebäuden sagen und es ergiebt sich daher ohne Zwang die Hypothese eines ehemaligen weit verbreiteten, besonders die Südhälfte des kaspischen Beckens betreffenden, *Sinkens des Bodens.* Wir haben uns hiernach den Hergang der Sache ungefähr folgendermaassen zu denken:

Das tiefere Niveau des kaspischen Bodens unter dem schwarzen und Asovschen Meere fand nicht von Anfang an statt, sondern früher stand diese Gegend gegen 300 Fuss höher, so dass das ehemalige kaspische Meer eine ganz andere Gestalt hatte,

als das jetzige; gegen Norden ward es ungefähr durch die ihm von Pallas vorgezeichneten Gränzen eingeschlossen, gegen Süden reichte es nicht weit in sein jetziges Becken hinein, gegen Westen aber stand es durch einen Kanal, der die Stelle des jetzigen Manitsch und der Kuma einnahm, mit dem Asovschen Meere in Verbindung; in diesen ergoss sich damals der Don. Als die Trennung beider Meere erfolgte, sei es durch den Durchbruch des ehemals verschlossenen thracischen Bosporus, wie Pallas meint, oder sey es durch allmähliges Anschwemmen von Sand und die dadurch erfolgte Erhöhung des Thales des jetzigen Manitsch und der Kuma (welcher letzteren Ansicht von Kephalides ich übrigens den Vorzug zu geben nicht anstehen würde), so behielt das kaspische Meer im Ganzen seine alte Gestalt bei, bis durch eine vulkanische Operation das so eben nachgewiesene Sinken des jetzigen kaspischen Beckens und besonders der südlichen Hälfte bis zu seiner jetzigen Tiefe erfolgte; das Wasser drang dadurch nach Süden vor, überschwemmte die auf diesem Landstriche gelegenen Dörfer und Städte, deren einzelne Trümmer jetzt noch unter der Oberfläche sichtbar sind, und entblösste dagegen im Norden einen grossen Theil seines ehemaligen Bodens, der daher auch jetzt noch die Spuren seines frühern submarinischen Zustandes aufweiset. Mit der Zeit nahm dasselbe die Höhe an, die es noch gegenwärtig besitzt, und welche, ohne eine neue vulkanische Katastrophe, nur geringen und momentanen Veränderungen ausgesetzt seyn kann, da gegenwärtig Verdunstung und Zufluss der Ströme sich gegenseitig das Gleichgewicht halten.

Wenn diese Ansicht auch natürlich immer nur Hypothese bleibt, so räumt sie doch die oben erwähnten Schwierigkeiten aus dem Wege, namentlich die sonst so schwer zu vereinigenden Anzeichen eines ehemaligen höhern Standes in der Steppe der Kuma und des Manitsch und des um mehr als 350 Fuss niedrigeren an den Südküsten dieses Meeres; es scheint mir daher nothwendig sie der Hypothese von Pallas hinzuzufügen, da diese letztere nur mit ihr in Verbindung für haltbar erachtet werden kann. Ich habe also keinen Anstand genommen, diese meine Ansicht hier auszusprechen und sie dem Urtheile der Naturforscher und Geographen zu unterwerfen.

# ÜBER DEN ZAHNBAU

DER

# STELLERSCHEN SEEKUH

## (*Rytina Stelleri*)

NEBST BEMERKUNGEN

## ZUR CHARAKTERISTIK DER IN ZWEI UNTERFAMILIEN ZU ZERFÄLLENDEN FAMILIE DER PFLANZENFRESSENDEN CETACEEN;

VON

J. F. BRANDT.

---

(Gelesen den 25. Januar 1832.)

Unter den mannigfachen Thierformen, welche die unermesslichen Räume des unsere Erde umströmenden tropfbarflüssigen Elementes bevölkern, haben die im Aeussern fischähnlich gebildeten grossen Säugethiere von jeher die Aufmerksamkeit der Naturforscher gefesselt, und man kann sagen um so mehr, als man mit ihren Eigenthümlichkeiten vertrauter zu werden begann, wobei man zugleich die Ueberzeugung erhielt, wie viel noch in diesem Felde der Wissenschaft zu thun sey. Die Grösse der meisten dieser fraglichen Thierformen, die Schwierigkeiten ihres Fanges und die Unbequemlichkeiten, welche die Jagd vieler erheischt, setzen leider den Fortschritten in ihrer Kenntniss eine Menge Hindernisse in den Weg.

Mit besonderem Interesse wurde in den neuern Zeiten unter andern die Naturgeschichte der von vegetabilischen Stoffen sich nährenden Seezitzthiere durch die Arbeiten *Steller's*, *Daubenton's*, *Buffon's*, *Home's*, *Raffles's*, *Cuvier's*, *Diard's* und *Duvaucel's*, *Ehrenberg's* u. a. gefördert. Und in der That gewinnt durch die

mannigfaltigen Fabeln und Sagen von Sirenen und Meerjungfern, wozu sie durch ihre Haarlosigkeit und die auf der Brust befindlichen Brüste, wenn sie blos den vordern Theil des Körpers aus dem Wasser hervorstrecken, Anlass gaben, die Untersuchung ihrer Lebens- und Structurverhältnisse noch mehr an Reiz.

Zur eben erwähnten Familie der pflanzenfressenden Fischzitzthiere gehört auch jene 8000 Pfund an Gewicht erreichende, wunderbare Form (*Rytina Stelleri*), welche sich in der Nähe der Küsten der zwischen Asien und Amerika liegenden Inselgruppen findet.

Dem trefflichen *Steller* verdankt die Wissenschaft bis jetzt die einzigen auf eigene Beobachtung gegründeten Nachrichten über dieselbe. Er war es nämlich, der sie nach einem gefährlichen Schiffbruche, bei einem zehnmonatlichen, höchst beschwerlichen Aufenthalte auf der Behringsinsel vor 90 Jahren theils lebend, theils todt beobachtete und sowohl den äussern, wie den innern Bau untersuchte. Seine damalige unglückliche Lage, die enorme Grösse der Thiere und die geringe Hülfe gestatteten ihm nicht, was er selbst so sehr bedauert (man sehe seine Klagen *Nov. Comment. Petrop. T. II. p.* 321), alle einzelne Details mit gleichem Eifer zu verfolgen; dessen ohngeachtet wird seine, übrigens auch noch durch die genaue Beschreibung einiger anderer Seethiere, classische Arbeit in den *Novis Commentariis, T. II.* für immer zur Bewahrung seines Namens in der literärischen Welt beitragen.

Ein interessantes, sehr wichtiges Moment, worüber uns die *Stellersche* Beschreibung der *Rytina* nicht für den neuern Standpunct der Wissenschaft, der mit Recht in allen Beziehungen genaue und detaillirte Angaben fordert, die gnügende Aufklärung giebt, ist unter andern auch der Zahnbau.

*Steller* (a. a. O. pag. 302.) sagt: „Masticationem absolvunt praeter normam omnium animalium, non dentibus, quibus in universum carent, sed duobus ossibus validis, candidis, seu dentium integris massis, quarum una palato, altera maxillae inferiori infixa et huic apposita est.

Insertio ipsa seu connexio prorsus insolita, nec ullo noto nomine exprimi potest. Gomphosin vocare non licet ob id, quod ossa non infiguntur maxillis, sed mul-

tis papillis et poris, poris et papillis reciprocis palati et mandibulae inferioris recipiuntur. Praeterea a parte anteriori membranae papillari labii superioris inferni, ad latera vero oris striatis ossis, a parte posteriore duplici apophysi palato et mandibulae inferiori inseruntur et hac ratione firmantur.

Ossa haec molaria subtus multis foraminulis pertusa velut netricum digitale vel spongia, quibus arteriae et nervuli eodem modo ut dentibus animalium inseruntur, superne parte glabra et multis canalibus tortuosis et undulatis excavata ac eminentiis intra hos elata, quae eminentiae sub masticatione a canalibus oppositi ossis ita excipiuntur, ut fuci intra haec veluti intra fùllonum asseres seu molas manuarias comminuantur ac subigantur."

Diese Beschreibung *Steller's* veranlasste die verschiedensten Deutungen bei den Schriftstellern, in Beziehung auf die Beschaffenheit der Zähne der fraglichen Thierform, besonders da keiner ihre höchst merkwürdige und eigenthümliche Bildung aus Autopsie kannte.

*Linné* (*Systema naturae ed. XII. Tom. I. p.* 49.) nimmt von unserer Seekuh offenbar den Charakter der Backenzähne zu seiner Gattung *Trichecus*, indem er sagt: „Molares ex osse rugoso utrinque inferius duo." Daraus geht deutlich hervor, dass er Steller nicht richtig verstanden hat.

*Gmelin* (*Linn. syst. nat. ed. Gmel. Tom. I. p.* 59.) liess in seiner Ausgabe des Linné'schen Systems die Worte „inferius duo" weg.

*Pennant* (*History of Quadrupeds, London* 1793. 4. *Vol. II. pag.* 295.) sagt: „In the mouth are no teeth, only two flat white bones, one in each jaw; one above another below, with undulated surfaces, which serve instead of grinders."

Auf ähnliche Weise drückt er sich in der *Arctic Zoology. Vol. I. p.* 177 aus.

*Pallas* (*Zoographia Rosso-Asiatica. P. I. pag.* 273.) schreibt ihr: „Ossa molaria plana, pinnato-rugosa, cuti innata loco dentium molarium" zu.

*Illiger* (*Prodromus Syst. Mam. et av., pag.* 141.) schildert den Zahnbau des Borkenthier's auf folgende Weise: „Dentes primores et laniarii nulli. Molaris supra infraque utrinque solitarius appositus a laminis infra convergentibus compositus.

*

*G. Fischer* (*Zoognosia, Mosquae* 1814. *Vol. III. p.* 641.) nennt die *Rytina Nepus* und nimmt bei ihr einen „Dens quovis latere compositus (ut in Oryctero-pode, Ornithorhyncho) sine radice non maxillae sed laminae insidens, quae non-nisi nervis vasisque cum maxilla porosa cohaeret“, an.

*Ranzani* (*Elementi della Storia naturale dei Mammiferi. Vol. III. Bologna* 1821. *p.* 675.) sagt: „Molari $\frac{2}{2}$ composti, attacati semplicemente alle parti molli, ne inseriti negli alveoli.“

*Desmarest* (*Mammalogie à Paris* 1820. 4. *pag.* 510.) beschreibt den Zahnbau wie folgt: „Formule dentaire : incisives $\frac{0}{0}$ canines $\frac{0}{0}$ mol. $\frac{1-1}{1-1} = 4$. Point de dents implantées, mais une plaque molaire de chaque côté des mâchoires, attachée non par des racines, mais par une infinité de vaisseaux et de nerfs (comme les dents de l'oryctérope et de l'ornithorhynque); surface triturante, inégale et creusée de canaux tortueux, qui présentent des espèces de chevrons.“

*Goldfuss* (*Handbuch der Zoologie. Bd. II. p.* 337.) führt vom Zahnbau unseres Thieres an: „Vorder- und Eckzähne fehlen. In jedem Kiefer auf jeder Seite nur ein aus Platten zusammengesetzter Backenzahn mit flacher Krone.“

*Oken* (*Zoologie. Bd. II. p.* 685.) stellt beim Borkenthier folgende Merkmale, hinsichtlich des Zahnbaues auf: „Keine Lippen- und Eckzähne, jederseits in jedem Kiefer eine oder zwei Zahnplatten aus Blättern zusammengesetzt ohne Schmelz, nicht eingekeilt, sondern nur aufgelegt als Backenzähne. (Erinnern nach ihm an Ornithorhynchuszähne und Barten).“

*Cuvier* (*Règne animal.* 2. *ed. T. I. p.* 284.) bemerkt: „Paraissent n'avoir de chaque côté qu'une seule mâchelière composée, à couronne plate et hérissée de lames d'émail.“

In den *Recherches sur les ossem. foss. sec. ed. T. V. P. I. p.* 257. sagt Cuvier von den Kiefern der *Rytina* in Bezug auf Zähne: „Elles portent chacune de chaque côté une plaque ou dent composée que l'on peut comparer au palais de la raie-aigle, qui ne s'enfonce point par des racines, mais s'applique et s'unit par une infinité de vaisseaux et de nerfs, lesquels pénètrent de la mâchoire dans cette plaque dentaire par

une quantité de petits trous, qui en font paraître la surface contiguë à l'os maxillaire toute poreuse ou spongieuse précisément comme je l'ai observé dans les dents de l'ornithorhynque et dans celles de l'oryctérope. Leur face triturante est inégale et creusée de sillons tortueux destinés à faciliter la mastication et comparables aux rubans qu'on voit sur les molaires des éléphans, mais qui représentent principalement des espèces de chevrons."

*Heusinger* (*Histologie, Th. I. H.* 2. *p.* 199.) glaubt die Zähne der *Rytina* in die Kategorie der vom Orycterop bringen zu müssen.

Der Charakter *J. B. Fischer's* (*Synopsis mamm. pag.* 503.) in Bezug auf den Zahnbau des Borkenthiers lautet: „Molaris $\frac{1-1}{1-1}$ appositus e laminis infra convergentibus compositus, coronide tritoria inaequali, canalibus tortuosis excavata.

Fast ebenso beschreibt ihn *Lesson* (*Complément des oeuvres de Buffon. Tom. I. p.* 89.) nur fügt er noch hinzu, die Zähne besässen Schmelzlagen, die Zickzacks bildeten und seyen mehr hornig als knochig.

*F. Meckel* (*System der vergleichenden Anatomie. T. IV. S.* 532.) vergleicht die Zähne der *Rytina* mit den Barten der Wallfische und den Zähnen mehrerer Rochenformen, ist aber fast geneigt (denn er sagt „Statt der Zähne") die Zahnnatur der Kauplatten der *Rytina* zu läugnen und ihnen vorn in den Kiefern einen Platz anzuweisen, so dass eine davon oben, die andere unten liegen würde.

Bei der so grossen Verschiedenheit der Meinungen der Schriftsteller war es mir um so angenehmer unter den mannigfachen, interessanten Schätzen des Akademischen Museums einen einzelnen Zahn der Steller'schen Seekuh zu finden.

Er hat (*s. Abb. Fig.* 1, 2, 3.) eine länglich-viereckige Gestalt und erscheint an einem Ende (ebd. *A.*) leicht bogenförmig und mit einer schmalen, gekrümmten, parallel gestreiften Fläche versehen, am andern Ende (ebd. *B.*) dagegen endet er statt der Fläche in einen saumartigen Rand und ist an beiden Seiten schwach ausgeschweift, während er in der Mitte in einen stumpf-dreieckigen Fortsatz ausläuft. Man kann also dies letzterwähnte Ende des Zahns das spitzere nennen.

Die Seitenflächen des Zahnes (*Fig.* 3.) sind gebogen, dabei aber ziemlich eben, etwas von innen nach aussen geneigt, besonders stark am spitzeren Zahnende, so dass dieses dadurch etwas seitlich zusammengedrückt erscheint. Sie convergiren mit der untern Fläche nicht in einen rechten, sondern spitzen Winkel und tragen nach unten einen ½ Linie breiten, etwas umgeschlagenen, durchscheinenden Saum (ebendaselbst *cccc.*). Mit der obern Fläche bilden sie jederseits einen leistenförmig vortretenden, glatten und mit punctförmigen Eindrücken versehenen Rand (obern Seitenrand) (ebend. *add.*), der besonders am spitzern Ende des Zahns leicht abgesetzt erscheint (ebd. *dd.*). Zwischen diesem Rande und dem untern Saume haben sie zahlreiche, parallele Längsstreifen, indem sich dort nach aussen die den Zahn bildenden, gestreiften Horncylinder markiren.

Die obere Fläche des Zahns (*Fig.* 1.) ist gebogen und concav und zeigt in der Mitte eine mit den Seitenrändern parallel laufende, leistenähnliche Erhabenheit (mittlere Leiste) gegen welche in einen spitzen Winkel jederseits fünf von den erhabenen Seitenrändern kommende Leisten (Querleisten) convergiren, die höher und schärfer als die mittlere Leiste (ihre Convergirungslinie) sind. Zwischen diesen Querleisten bleiben längliche, tiefe, parallele, nach innen vom Seitenrande beginnende, auf ihrem Grunde mehr rissähnliche Furchen, die ganz parallel mit den Leisten laufen, zwischen denen sie sich befinden und zu deren Sonderung sie beitragen. Sie convergiren daher ebenfalls spitzwinklig gegen die mittlere Leiste. Die beiden, jedem der beiden Enden zunächst liegenden Leisten convergiren auch gegeneinander spitzwinklich, während die drei andern Leistenpaare nicht gegeneinander convergiren, sondern sich mit einander alternirend an die mittlere Leiste setzen. Das dem spitzen Ende des Zahnes zunächst liegende Paar der Querleisten tritt am Convergirungspuncte sehr stark und verbreitert vor (bildet gleichsam eine Art abgerundet-dreieckigen Fortsatz *)) und hängt mit der mittlern Leiste fast gar nicht zusammen.

*) Sollte nicht dieser Fortsatz nebst dem stumpfdreieckigen Fortsatze des spitzen Zahnendes den beiden Fortsätzen (duplex apophysis) Steller's entsprechen, womit das hintere Ende des Zahns (also unser spitzeres Zahnende) sich an den Unterkiefer oder Oberkiefer befestigt?

Zwischen der äussern Fläche des eben erwähnten Leistenpaares und der Innenfläche des leistenähnlichen Seitenrandes findet sich eine tiefe Furche, die sich auch an einer Stelle auf den Seitenrand (*Fig.* 1. bei *d.*) fortsetzt und ihn abschnürt, so dass das dem spitzen Ende des Zahns zunächst liegende Ende des Seitenrandes (ebd. *c,c.*) gleichsam die queren Leisten nochmals zu wiederholen scheint. Ueberdies ist die ganze obere Fläche des Zahns mit kleinen, rundlichen Vertiefungen fast nach Art eines Fingerhutes ziemlich dicht und regelmässig besetzt, meist matt, und mit einer eigenen, dünnen, beim Schaben pulverartig erscheinenden, vor dem Löthrohr sich aber nicht als Kalkerde nachweisenden Lage bedeckt und daher gelblichweiss, nur die obere Fläche der Querleisten und der erhabenen Seitenränder hat matten Hornglanz *) und eine schmutzig-hellgelbe Farbe.

An der untern Fläche des Zahns (*Fig.* 2.) bemerkt man von einem Ende desselben zum andern, wie an der obern, eine starke, bogenförmige, aber convexe (nicht concave) Krümmung, besonders in der Mitte der ganzen Länge, wo überhaupt der Zahn eine gürtelförmige Erhabenheit bildet, die aber ohne die Seiten desselben zu erreichen sich schräg nach den Seitenrändern hin abdacht, so dass zwischen ihr und den sich spitz-dreieckig erhebenden Seitenrändern jederseits eine nach dem spitzern Ende des Zahns sich sehr verbreiternde, furchenähnliche Vertiefung entsteht. Die gürtelförmige Erhabenheit zeigt mehrere spitzwinklig von aussen nach innen convergirende, leistenförmige, fast abgerundet-dreieckige, parallele Erhabenheiten, die der Zahl und Stellung nach ganz den bei der Beschreibung der obern Fläche des Zahns angegebenen, über ihnen liegenden Furchen entsprechen; während, die zwischen ihnen liegenden (sie sondernden) Furchen den Querleisten der Oberseite correspondiren. Die schmutzig-hellgelbe ganze untere Fläche des Zahns lässt eine grosse Menge dicht neben einanderstehender Oeffnungen von verschiedener Grösse, fast nach Art der Durchschnittsfläche eines Schilfstengels oder der Oberfläche mancher Spongien, aber meist mit erhabenen Rändern versehen (*Fig. E.*), wahr-

*) Dieser entsteht wohl durch Abreiben?

nehmen, wodurch sie ganz netzförmig durchbrochen sich darstellt *). Der am spitzern Ende des Zahns (*Fig.* 2. *B.*) liegende Theil der Fläche zeigt entweder nur die Oeffnungen und zwar klein und stets ohne erhabene Seitenränder, oder ist, besonders am äussersten Ende, wie die hornigen Seitensäume ganz glatt.

Die ganze Zahnmasse besteht aus einer grossen Menge von Cylindern, die der Zahl der Vertiefungen der Oberseite und der mit ihr gleichzähligen Löcher der Unterseite gleichkommen, parallel und senkrecht stehen, dicht und innig mit einander verbunden, gerade oder etwas gebogen, aus Hornsubstanz gebildet und ausserhalb gestreift sind (*Fig. A. F. G. H.*) und $\frac{1}{3}-\frac{1}{2}$ Linie im Quer- und $3\frac{1}{2}-5\frac{1}{2}$ Linien im Längendurchmesser haben. Jeder Cylinder (*Fig. G. H.*) ist in der Mitte der Länge nach hohl und zeigt eine obere, kleinere (*a.*), auf der obern Fläche des Zahnes als Vertiefung sichtbare und eine untere grössere (ebd. *c.*), auf der untern Fläche des Zahns als Loch bemerkbare Oeffnung. Der unterste Theil der Höhle der Cylinder (*Fig. H. c.*) ist trichterförmig und leer, der obere (ebd. *aa.*) dagegen ercheint mit einer weissen, matten, mehr bröcklichen Masse dicht angefüllt, welche sich von den hell-bräunlichgelben, schwachglänzenden Wänden (*Fig. H. bb.*) ihres Behälters deutlich absetzt. Am längsten erscheinen die Cylinder, welche die erhabenen Leisten der obern Fläche bilden, am kürzesten, die zu äusserst an den Seitenflächen und Enden stehenden (*Fig. F.*). So eng auch die Cylinder miteinander verbunden sind, so können sie sich doch durch zufällig entstandene Risse von einander trennen, wie es namentlich am stumpferen Ende des vorliegenden Zahnes der Fall ist, wo man eine Sonderung an mehreren Stellen (*Fig.* 3. *A.*) bemerkt. Diese kann aber sogar so weit gehen, dass sich einzelne Cylinder von den übrigen nicht allein ablösen, sondern sogar spalten und krümmen (*Fig. A*); eine Erscheinung, die offenbar an die Wallfischbarten erinnert.

Es haben aber auch die Zahnmassen der *Rytina* mit den Barten der Wallfische selbst in andern Beziehungen grosse Aehnlichkeit. Sie sitzen nämlich nicht in

---

*) Eine grosse Aehnlichkeit damit bietet auch die durchlöcherte Basalfläche der ebenfalls aus Horncylindern gebildeten Rhinoceroshörner und zwar eine täuschende die der Hörner vom Rhinoceros Sumatrensis.

Zahnhöhlen, sondern wie die letztern lose im Zahnfleich *). Ferner bestehen die Barten ebenfalls aus einer Menge von Horncylindern (*Fig. M. N.*), die im Innern (ebd. *a.*) hohl und mit einer weissen Substanz angefüllt sind; aber die einzelnen Cylinder (ebd. *c.*) erscheinen in einer grossen Menge von einzelnen Platten zusammengefügt und sind an ihrem einen Ende (ebd. *d.*), wo sie spitz auslaufen nicht mit einander verbunden, sondern enden frei, fadenähnlich, (wodurch die Platten den sie charakterisirenden Bart bekommen), während die Cylinder, welche die Zähne des Borkenthiers zusammensetzen, alle in eine einzige Masse ihrer ganzen Länge nach vereinigt sind und kein freies Ende haben.

Auch enthält die Zahnmasse des Borkenthiers schon deutlichere Spuren von Kalkerde, was sich Theils schon durch das äussere Ansehen, die stärkere Sprödigkeit und die geringere Flexibilität im Vergleich mit den Barten, theils auch durch die chemische Untersuchung ausspricht. Ein Stückchen des Rytinazahns hinterliess nämlich nach dem Verkohlen mittelst der Löthrohrflamme, nach den Untersuchungen meines gefälligen Collegen Hess, sehr deutliche Spuren verglaster Kalkerde in Form von Körnchen, während ein ähnliches Stückchen einer Wallfischbarte, das demselben Experiment unterworfen wurde, nichts Deutliches von Kalkerde zeigte.

Eine nicht zu übersehende, schon von einigen vermuthete, Analogie mit den Zähnen des Borkenthiers bieten, ausser der unten bereits erwähnten Lage, die hintern Zähne des Schnabelthiers auch durch die Aehnlichkeit der Form und die Biegung ihrer obern und untern Fläche, durch die Menge von Oeffnungen, welche sowohl ihre obere (*Fig. I.*) als untere (*Fig. K.*) Fläche zeigen und die Zusammensetzung aus horniger Masse **), worin aber die Cylinder, die jedoch auch im Innern hohl und mit einer

---

*) Vermuthlich findet sich aber, wie für die Barten, zur Aufnahme der Rytina - Zähne eine, wenn auch nur schwache Vertiefung im Kiefer. Darauf deutet besonders die starke Convexität ihrer untern Fläche und die Analogie mit den hintern Zähnen des Schnabelthiers, die ebenfalls eine untere sehr convexe und ähnlich gebildete Fläche haben und in Vertiefungen der Kiefer sich legen.

**) Vor der Löthrohrflamme blähte sich ein Stückchen des Schnabelthierzahns, nach den Untersuchungen meines geschätzten Collegen *Hess* auf, verkohlte sich und zeigte eine äusserst geringe Spur von

weissen mehr hornigen Masse erfüllt erscheinen, weniger deutlich gesondert und bemerkbar sind. Was aber die Zähne des Schnabelthiers zu charakterisiren scheint, sind zwei deutliche Lagen, von denen die untere (*Fig. L. aa.*) bräunlich und weicher, die obere (ebd. *ccc.*) härter und in der Mitte weiss, an den Seiten aber grau erscheint.

Die ganz aus Knochenmasse gebildeten, in Zahnhöhlen steckenden Zähne des Orycterop, zeigen blos durch ihre röhrige Textur Annäherung an die Zähne der *Rytina.*

Ueber die Lagerung der Zähne im Kiefer vermag ich leider nicht eigene Untersuchungen mitzutheilen. Jedoch bin ich geneigt dieselben in Bezug auf die Stelle, wo sie in den Kiefern (oder besser auf den Kiefern) liegen und hinsichtlich der Function ganz mit den Backenzähnen der Säugthiere zu vergleichen, was auch mit Ausnahme Meckel's alle frühern Schriftsteller, meist freylich nur schweigend, annehmen.

*Meckel* hält es aber, wie schon oben erwähnt wurde, für möglich, dass die Zähne des Borkenthiers, vorn im Kiefer einen Platz einnehmen, so dass einer davon oben, der andere unten liegen würde. Er giebt besonders viel darauf, dass Steller „*ausdrücklich*" von zwei Zahnmassen spricht, von denen die eine am Gaumen, die andere am Unterkiefer befestigt sey. Steller drückt sich allerdings so aus, setzt jedoch noch hinzu „dentium integris massis, womit er auf die Aehnlichkeit seiner „ossa" oder „ossa molaria", wie er sie auch nennt, mit den Backenzähnen hindeutet und bemerkt, dass an den vordern Theil der Zahnmassen sich die mit Warzen besetzte innere Fläche der Oberlippe anlege, was auch an dem nach unten gekehrten Ende der Abbildungen der Zahnmassen, welche die Steller's Beschreibung beigefügte Tafel XIV. dargestellt, nicht aber an dem nach oben gekehrten der Fall ist. Fände nun die von Meckel angenommene Lage Statt, so würde das

---

Kalkerde. Die Zähne des Schnabelthiers würden also in chemischer Hinsicht den Barten noch näher stehen, als die der *Rytina.*

eine von den in der erwähnten Abbildung dargestellten Enden nach rechts, das andere nach links zu liegen kommen; dann könnte aber keins allein das vordere seyn und einen *pars papillaris* haben. Ferner spricht gegen eine quere Lage auf dem vordern Theil der Kiefer, also an der Lagerungsstelle der Schneidezähne, die Angabe *Stellers*, (*a.a.O.* p. 301), dass die Ober- und Unterlippe sehr dicke Borsten tragen, welche beim Abreissen der Seegewächse die Stelle der Zähne vertreten und dass der Oberkiefer länger als der Unterkiefer ist. Ueberhaupt wäre die Lage der Rytinazähne, wie sie *Meckel* anzunehmen geneigt ist, etwas vom Bau aller übrigen Säugethiere so abweichendes, dass der genaue *Steller* diesen Umstand wohl nicht vergessen, sondern sicher ausführlicher erläutert hätte. Bei der Beurtheilung der einzelnen Details und namentlich einzelner Ausdrücke in der Abhandlung *Steller's*: *De bestiis marinis*, dürfte auch wohl zu berücksichtigen seyn, dass sie auf einer mühevollen Reise unter Unbequemlichkeiten aller Art verfasst wurde und nicht unter den Augen des Verfassers, der sonst wohl noch daran gefeilt hätte, sondern einige (gegen 3) Jahre nach seinem Tode erschien *). Man darf daher auf seinen Ausdruck „Duobus ossibus" nicht zu viel Nachdruck legen, da er sehr wohl die Worte „in quovis latere" vergessen konnte. Eher könnte, was *Steller* von der Zunge sagt, für *Meckel's* Idee sprechen **).

Vergleicht man, die sowohl durch ihre Insertion, als auch Form, Textur und chemisches Verhalten so eigenthümliche und charakteristische Bildung der offenbar der Horn- nicht der Knochenformation angehörigen Zähne des Borkenthiers mit denen jener Gattungen, womit man sie bisher so nahe zusammenstellte, wie die *Lamantins* und *Dugong's*, berücksichtigt man ferner, dass der Gattung *Rytina* die Phalangen an allen Fingern fehlen, während die *Lamantins* und *Dugong's* mit Ausnahme des Daumens an allen Fingern Phalangen haben und dass ihr Magen ganz einfach ist,

---

*) *Steller* kam nämlich aus Kamtschatka gar nicht wieder nach Petersburg zurück, sondern starb schon im November 1746, während seine Abhandlung 1749 heraus kam.

**) Ich glaubte über die Vorstellung eines so ausgezeichneten Anatomen wie *Meckel*, auf dessen Meinung man mit Recht grosses Gewicht zu legen gewohnt ist, ausführlicher seyn zu müssen.

höchstens vielleicht, eine leichte Einschnürung hat*), keinesweges aber jene beiden blinddarmähnlichen Anhänge besitzt, die dem Magen der *Dugong's* und *Lamantin's* zukommen, so dürfte man wohl mit mir die Meinung theilen, dass die Familie der Pflanzenfressenden Cetaceen *Cuvier's* in zwei Unterfamilien (*Halicoreae* und *Rytineae*) zu zerfällen sey, um die Verschiedenartigkeit der Bildungen dieser Thiere in ein klareres Licht zu stellen. Ich würde demnach für die Familie *Cetacea herbivora* und die darin zu bildenden Unterfamilien folgende Charaktere vorschlagen:

## CETACEA HERBIVORA. *Cuv.*

Dentes varii inclusi vel appositi. Canini semper nulli. Narium aperturae duplices in apice rostri. Mammae duae pectorales. Stomachus simplex vel in quatuor saccos (quorum duo appendiculati) divisus. Glandula propria magna**) in superiore ventriculi curvatura haud procul ab oesophagi insertione sita, ostiis multis in ventriculum hians.

### TRIBUS I.

### *Halicoreae. Mihi.*

Dentes injuncti, ossei. Incisorii vel supra 2 vel 4, vel abortu decidui. Molares injuncti in utraque maxilla plures vel tuberculati, vel plani. Digiti 5 obvoluti, excepto pollice, omnes phalangibus suffulti. Stomachus in quatuor saccos (quorum duo appendiculati) divisus, superne in fundo in processum conicum, plus minusve distinctum prominens.

---

*) Dies scheint mir nach Analogie mit den Lamantin's und Dugong's nicht ganz unwahrscheinlich, besonders da Steller sagt, er habe den Pförtner sehr weit gefunden und anfänglich für einen zweiten Magen gehalten.

**) Da diese Drüse von *Steller* bei der *Rytina* und von *Home* (*Philos. Transact.* 1820. *p.* 317. *pl.* 27. *fig.* 1.) beim Dugong beobachtet wurde, so findet sie sich wohl auch bei den durch Nahrungs- und Lebensverhältnisse den Dugong's so sehr ähnlichen Lamantin's, wofür besonders spricht, dass *Home* bei den Unterschieden des Lamantinmagens und Dugongmagens (*Philosoph. Transact.* 1821. *pag.* 390.) nicht erwähnt, dass dem Lamantin die Magendrüse fehle.

1. Genus. Manatus. *Cuvier et al.*

Dentes incisorii abortu nulli. Molares tuberculati 24—36. Digiti quinque, quorum quatuor lamnati (pollice scilicet mutico). Cauda integra. Coecum apice bifidum. Ossa pelvis nulla (?) *).

2. Genus. Halicore. *Ill. Dugongus Lac.*

Dentes incisorii supra 2 (in junioribus 4) conici, remoti, infra in adultis nulli, in foetu utrinque 5, obortientes. Molares abrupti, sulco laterali subdidimi, coronide excavata. Digiti quinque mutici. Cauda bifurca. Coecum indivisum. Ossa pelvis obvia **).

## T R I B U S II.

### *Rytineae. Mihi.*

Dentes incisorii nulli. Molaris utrinque utrinsecus unus appositus e tubulis corneis plurimis compositus, supra infraque eminentiis et sulcis pinnatim positis rugosus. Digiti phalangibus destituti ***), obvoluti. Stomachus simplex. Coecum simplex. Ossa pelvis obvia ****).

---

*) Wenigstens sind sie weder bei *Cuvier* (*Recherches sur l. ossem. foss. T. V. P. I. pl. XIX.*) noch bei *Home* (*Philos. Trans.* 1821. *pl.* 27.) abgebildet. Auch fand sie *Cuvier* (*Recherch. a. a. O. p.* 253.) bei einem Fötus und *Meckel* (*Vergl. Anat. II.* 2. *p.* 423.) an drei Skeleten des Münchner Museums nicht.

**) Eine Abbildung des Beckens siehe bei *Home* (*Philos. Trans.* 1820. *p.* 323. *pl. XXXI. fig.* 2. *ib.* 1821. *pl. XX.*

***) Bei dem Borkenthier scheint die Bildung (der Mangel der Phalangen) auf alle Finger ausgedehnt zu seyn, welche bei den *Lamantin*'s und *Dugong*'s nur der Daumen zeigt.

****) Die Beschreibung *Steller*'s des Beckens der *Rytina* und die Darstellungen *Home*'s vom Becken des *Dugong* deuten auf grosse Aehnlichkeit beider mit einander und sprechen auch sehr für die Richtigkeit der Angabe *Delalande*'s bei *Cuvier* (*Recherch. u. a. O. p.* 386.) hinsichtlich des Beckens des *Rörqual* (*ib. pl.* 26. *fig.* 24) und der *grande Baleine du Cap* (*ib. fig.* 25.). Indessen möchte ich doch keinesweges mit *Cuvier* geradezu annehmen, dass die zwei von *Rudolphi* (Abh. der Akad. der Wissenschaften z. Berlin 1820—21. p. 33.) für das vollständige Beckenrudiment einer Seite, bei seiner *Bal. rostrata* genommenen Knochen es nicht seyen, da *B. longimana* (*Brandt* und *Ratzeburg*, Getr. Darstell. der in der Arzneimittell. in Betracht kommenden Thiere. Bd. I. p. 124.) etwas ähnliches zeigte. Könnte bei den beiden letztgenannten Arten das Becken nicht mehr delphinartig gebildet seyn? Eine solche Anomalie liesse sich bei der grossen Menge anderweitiger namhafter Differenzen der Cetaceen im Schädel und Skeletbau wohl als möglich denken und zwar um so mehr, da die Manati's (*Manatus Cuv.*) sogar gar keine Beckenknochen zu haben scheinen.

Genus. *Rytina Ill. Stellerus. Cuv.*

Characterem generis character tribus sistit.

Hinsichtlich der Verwandtschaft nähern sich die *Rytineae* durch den Zahnbau (und die Hauttextur?) den Barten tragenden Cetaceen, während sie die Organisation des Schwanzes (*Cauda bifurca*), den sie aber mit *Halicore* gemein haben, den eigentlichen Cetaceen überhaupt anschliesst. Dagegen entfernt sie davon der einfacher gebildete Magen und der Mangel der Phalangen, in welcher Beziehung die *Halicoreen* den eigentlichen Cetaceen verwandter erscheinen. Man bemerkt also selbst in den kleinen Gruppen der *Halicoreen* und *Rytineen* keine stufenweise Entwickelung der Systeme, wodurch eine Kette zu den eigentlichen Cetaceen vermittelt würde, obgleich die *Rytineae* und *Halicoreae* in der Bildung mancher Organe eine gewisse Stufenfolge zeigen, so in der Entwickelung der Finger, die bei *Manatus* noch Nägel tragen, bei *Halicore* nicht mehr und bei *Rytina* sogar alle ohne Phalangen sind. Auch die Backenzähne lassen in gewisser Beziehung eine stufenweise Ausbildung wahrnehmen, indem sie bei *Manatus* der Form der am vollkommensten (wenn wir die Bildungsstufe, die sie bei höher organisirten Säugethieren einnehmen für bestimmend halten) entwickelten Backenzähne analog, höckerkronig erscheinen, während sie bei *Halicore* flache Kronen haben und dadurch sich wenigstens etwas den eigenthümlichen Zahnmassen der *Rytineen* nähern; obgleich sie in der Textur und chemischen Composition sich sehr davon unterscheiden.

Merkwürdig ist es, dass sowohl bei den pflanzenfressenden (*Herbivora*) als fleischfressenden Cetaceen (*Carnivora*) die Substanz der Kauorgane nach einem ganz ähnlichen, doppelten Typus sich entwickelt zeigt, indem bei beiden der genannten Familien die eine Gruppe Kauorgane besitzt, die aus Knochensubstanz bestehen, während die der Andern aus Hornmasse gebildet sind. Die Gruppe der Halicoceen lässt sich nämlich mit den Delphinen, Pottfischen und Narwals, die der Rytineen aber mit den Balaenen parallelisiren.

## ERKLÆRUNG DER ABBILDUNGEN.

*Fig.* 1. Der Zahn des Borkenthiers von der obern Seite gesehen, in natürlicher Grösse *). Daran das stumpfere Ende *A* und das spitzere *B.*

*Fig.* 2. Derselbe von der Unterseite gesehen mit dem stumpfen Ende *A* und dem spitzen *B.*, ebenfalls in natürlicher Grösse.

*Fig.* 3. Derselbe von der Seite gesehen (profil) gleichfalls in natürlicher Grösse. Davon *c* der Saum, *add* der Seitenrand, und *dd* der vor dem spitzen Zahnende liegende als Leiste abgeschnürte Theil des Seitenrandes.

*Fig. A.* Ein Stückchen des Zahns vom stumpfern Ende, um die Sonderung der Cylinder, von denen sich einige getrennt und gespalten und dann nachher umgebogen haben, darzustellen.

*Fig. B. C. D.* Einzelne, etwas vergrösserte Stücke des Zahn's, die punctirte obere Fläche vorstellend, und von verschiedenen Stellen derselben genommen, vergrössert.

*Fig. E.* Ein einzelnes Stückchen des Zahns, die durchlöcherte untere Fläche zeigend, vergrössert.

*Fig. F.* Ein vergrösserter Abschnitt des Zahns, theils um das Ansehn seiner Durchschnittsfläche, theils die verschiedene Länge der einzelnen ihn zusammensetzenden Cylinder nachzuweisen.

*Fig. G.* Ein einzelner sehr vergrösserter Horncylinder mit seiner obern *a*, und untern Oeffnung *c*.

*Fig. H.* Ein noch stärker vergrösserter und perpendiculär durchschnittener Horncylinder. Daran *aa* die innere, mit weisser Substanz erfüllte Röhre, *b* die gelblichen Wände, und *c* die trichterförmige nach unten liegende Höhle.

*Fig. I.* Die Oberseite des Zahns des Schnabelthiers vergrössert.

---

*) Da der Zahn in den nöthigen drei Hauptansichten in natürlicher Grösse dargestellt ist, so kann die Angabe von Dimensionen wohl füglich wegfallen.

*Fig. K.* Die untere Fläche des Zahns des Schnabelthiers vergrössert.

*Fig. L.* Ein perpendiculärer, vergrösserter Durchschnitt des Zahns des Schnabelthiers, woran *a* die untere und *c* die obere Schicht.

*Fig. M.* Drei Cylinder (*ccc*) mit ihren Spitzen (*ddd*) einer Wallfischbarte, perpendiculär durchschnitten und ihre innern mit weisser Masse erfüllte Höhlen *aaa* zeigend.

*Fig. N.* Dasselbe Object, nur mehr vergrössert, und oben rechts und unten abgestutzt, so dass nur eine Bartenspitze *d* geblieben ist.

*Fig. O.* Querdurchschnitt eines Theils einer Wallfischbarte mit den daran sichtbaren Oeffnungen der Cylinder, die ihn bilden.

# OBSERVATIONS

SUR LA

# VÉGÉTATION DE L'ILE DE SITCHA,

PAR

M. BONGARD.

(Lu le 4 Mai 1831.)

Parmi les plantes que feu le Dr. *Mertens* a rapportées de son voyage autour du monde, celles qu'il avait cueillies à l'île de Sitcha, m'ont paru offrir un intérêt particulier, parce qu'elles viennent d'une contrée qui fait partie des possessions Russes et dont la végétation est encore peu connue.

Le mémoire que j'ai l'honneur de présenter aujourd'hui à l'Académie, contient les observations que ces plantes m'ont donné lieu à faire. Les Graminées ont été examinées par M. *Trinius*, qui a bien voulu s'en charger, et M. *Prescott* a pris la peine de s'occuper des Cypéracées.

Mais avant de donner ici l'énumération des végétaux cueillis dans cette île, il ne sera pas superflu d'offrir une petite esquisse sur sa situation géographique, son climat et sur la nature de son sol. *)

*) Je dois ces notions à la complaisance de M. *Postels*, Professeur-Adjoint de minéralogie à l'Université de St.-Pétersbourg. Il a fait le voyage autour du monde en société avec le Dr. Mertens.

L'île de Sitcha est située près de la côte occidentale de l'Amérique, sous le 57° de latitude septentrionale, dans un golfe que les Anglais appellent le Norfolk-sound. Un canal étroit la sépare du continent. L'entrée du golfe est marquée par un volcan éteint, nommé *Edgecumbe*, qui forme le promontoire de ce nom. En temps serein on apperçoit cette montagne déjà à une distance de 10 milles italiens.

Sitcha qui, pour ainsi dire, est formée de trois îles, séparées seulement par des canaux étroits, a une étendue de 3 degrès et demi de latitude; ses côtes sont bordées d'une chaine de hautes montagnes qui, pour la plupart en forme de cônes, se prolongent aussi loin que l'oeil peut les suivre.

La Compagnie Russe-américaine a dans cette île son établissement principal, nommé *Nowoï Archangelsk* (Nouvel-Archangel). Là les côtes offrent une infinité de sinuosités parsemées de petites îles rocailleuses, couvertes toutes de forêts épaisses. Parmi les montagnes qui se trouvent auprès de l'établissement russe, celle que l'on désigne par le nom de *Werstowoï*, est la plus remarquable par sa hauteur, qui est de 3000 pieds environ, mesure de Paris. Elle est jusqu'au sommet couverte de forêts épaisses, où les pins et sapins, qui y regnent seuls, atteignent par fois la hauteur prodigieuse de 160 pieds, avec un diamètre de 7 à 10 pieds. Un seul tronc de ces arbres suffit aux indigènes pour creuser un canot qui peut contenir jusqu'à 30 hommes avec tous leurs utensiles.

Toutes les montagnes aux environs de l'établissement sont composées de traumate schisteux, de schiste argilleux et d'un conglomérat formé de quartz, de pierre lidienne et de syenit, cimentés par une masse quartzeuse. La première des ces roches prédomine. M. Langsdorff était donc dans l'erreur, lorsqu'il les a prises pour du granit. On ne rencontre des productions volcaniques que sur le mont Edgecumbe. Elles consistent en porphyre basaltique poreux, en basalte compact avec olivine et en diffèrentes espèces de laves.

Le climat de Sitcha est incomparablement plus doux que celui des endroits de l'Europe situés sous le même degré de latitude. Pendant l'hiver le froid n'y atteint que peu de degrés et ne dure jamais long-temps. Mais l'atmosphère y est continuellement chargée de vapeurs qui, en se condensant, occasionnent des pluies presque continuelles. Pendant tout le mois de Juillet il y eut à peine 3 ou 4 jours, où le soleil parut sur l'horizont et cela pour peu d'instants. L'humidité continuelle qui y règne, influe prodigieusement sur la végétation, et toutes les plantes, pleines de vigueur, y croissent avec une rapidité étonnante. Le bled cependant n'y vient pas et le sol n'est guère propre à l'agriculture: car il n'y a pas de plaines; mais partout des montagnes et des gorges profondes et humides, couvertes de forêts épaisses.

Les excursions botaniques ont été faites pendant le mois de Juin et dans la première moitié de Juillet; mais elles se bornaient pour la plupart aux environs de l'établissement et à quelques promenades le long de la côte. On visita le Werstowoï. La conduite hostile des indigènes, et une nature extrêmement sauvage rendaient les herborisations dangereuses et très-difficiles. Qu'on se représente des montagnes élevées et inaccessibles, des rochers escarpés, des gorges étroites, des marais, des forêts épaisses et impénétrables, le sol couvert et encombré partout de gros arbres qui, à demi pourris et décomposés, mais recouverts d'un tapis de mousses fragile et trompeur, cachent souvent des abîmes, dans lesquelles on risque de se précipiter, et on concevra une idée des difficultés qui doivent arrêter le naturaliste même le plus entreprenant.

Cependant le nombre de plantes recueillies dans l'espace de six semaines, se trouve être de 222 espèces, dont 35 nouvelles. Dans ce nombre il en est deux qui forment de nouveaux genres; outre cela cette collection offre beaucoup de plantes très-rares et à peine connues des botanistes.

Je regrette seulement de n'avoir trouvé parmi les papiers du Dr. *Mertens* aucunes observations sur ces plantes; mon travail aurait été alors plus parfait et

*

moins difficile. En compensation l'herbier de M. *Prescott* m'a fourni de grandes ressources. Riche en plantes de l'Amérique septentrionale, cueillies par MM. *Douglas*, *Nuttall* et *Scouler*, il m'a procuré le moyen de comparer les plantes de Sitcha avec les échantillons originaux de ces botanistes, et de cette manière j'ai pu m'assurer de l'identité des espèces.

## I. RANUNCULACEAE.

1. *Anemone narcissiflora L.* De Cand. Syst. nat. I. p. 212. — Ejusd. Prod. I. p. 22. — Hook. Flor. bor. amer. I. p. 8.

Specimina Sitchensia pertinent ad varietatem γ. *villosissimam* De Cand. l. c. quam ex insula Unalaschka etiam habemus.

2. *Hepatica triloba Chaix.* De Cand. Syst. I. p. 216. — Ejusd. Prod. I. p. 22 (sub Hep. americana). — Hook. l. c. p. 8.

Planta, cujus tantum folia possidemus, nullo modo ab europaea diversa videtur.

3. *Ranunculus recurvatus Poir.* De Cand. Prod. I. p. 39. — Deless. Ic. I. t. 41. — Hook. l. c. p. 20.

*Radix* fasciculata, fibrillosa. *Caulis* erectus, ramosus, striatus, glabriusculus. *Folia* radicalia longe petiolata, tripartita; partitionibus incisis, lobulis obtusis cum cuspide brevi mucroniformi. Petioli pilis tenuibus longis patentibus albis, praesertim inferius, obsiti. Folia caulina profundius quam radicalia partita; partitionibus angustioribus, longioribus et acutioribus; suprema sessilia. *Pedicelli* parum strigosi. *Sepala* ovato-lanceolata, obtusiuscula, striata, pilosa, reflexa. *Petala* (quae observante cl. Hookero saepius abortiva), in plurimis floribus adsunt obovata, integerrima, sepalis duplo longiora, pallide-flava, lineis nigricantibus dichotomis. *Carpella* compressa, marginata, glabra, apice stylo uncinato terminata.

4. *Coptis trifolia Salisb.* De Cand. Syst. I. p. 322. — Ejusd. Prod. I. p. 47. — Hook. l. c. p. 23. — *Helleborus trifolius.* Pallas Fl. Ross. t. 101.

*Folia* trisecta; segmenta lateralia obliqua, medium subcuneiforme, subtrifidum; omnia dentata; dentibus rotundatis, mucronulatis. *Bractea* minuta, lanceolata, versus medium scapi. *Sepala* plerumque 5, petaloidea, elliptica, basi attenuata, striata. *Petala* cucullata, parva, sepalis triplo minora. *Capsulae* in umbellam dispositae, longe pedicellatae.

5. *Coptis asplenifolia Salisb.* De Cand. Syst. l. c. p. 322. — Ejusd. Prod. I. p. 47. — Hook. Fl. bor. amer. I. p. 23. tab. XI. (ic. optima.)

Descriptioni cel. Hookeri citatae, quod addam, vix habeo.

Nostra specimina omnia fructifera. — Folia radicalia saepe caespitosa, biternatim secta.

6. *Aquilegia Canadensis L.* De Cand. Prod. I. p. 50. — Hook. l. c. p. 24. — *A. formosa Fisch.* De Cand. l. c.

Planta, quam amiciss. Fischer pro specie distincta habet, potius varietatem A. Canadensis sistit, a qua tantum sepalis longioribus lanceolatis, pistilla omnino tegentibus recedit. Habitus ceterum, statura, et florum coloratio Aq. Canadensis.

Nostra specimina glabra, vel tenuissime pubescentia. *Folia* radicalia longissime petiolata, glauca, biternatim-secta; segmentis inciso-dentatis; dentibus obtusis. *Flores* simul cum pedunculis pubescentes. *Sepala* lanceolata, acuta, limbo petalorum triplo fere longiora. *Cornua* recta. *Stamina* sepalis breviora. *Styli* filiformes, sepala subaequantes. *Ovaria* pubescentia.

7. *Aconitum Napellus L. var. delphinifolium.* De Cand. Prod. I. p. 63. — Hook. l. c. p. 25.

Specimina Sitchensia exacte conveniunt cum eis quae ex insula Unalaschka allata sunt.

## II. NYMPHAEACEAE.

8. *Nuphar lutea Smith.* De Cand. Prod. I. p. 116. — Hook. l. c. p. 32.

Folia tantum plantae Sitchensis adsunt, quae autem europaeis simillima.

## III. CRUCIFERAE.

9. *Barbarea arcuata Andrz.* Barbarea vulgaris β. De Cand. Syt. II. p. 207. — Schlecht. et Chamisso in Linnaea I. p. 15.

Planta Sitchensis bipedalis et ultra. *Caulis* erectus, ramosus, striatus, glaber. *Folia* radicalia lyrata, lobo terminali oblongo, obtuso. Caulina radicalibus similia. *Pedicelli* patentes, calycis longitudine. *Sepala* ovata, obtusiuscula, margine albo-membranacea, concaviuscula, glabra. *Petala* oblonga, calyce duplo longiora. *Stamina* majora petala aequantia.

10. *Arabis ambigua. De Caud.* l. c. p. 231. — Cham. et Schlecht. in Linnaea I. p. 16. — Hook. l. c. p. 42.

Nostra specimina glaberrima.

11. *Arabis hirsuta Scop.* De Cand. Prod. I. p. 144. — Cham. et Schlecht. l. c. p. 15. — Hook. l. c. p. 42. — *Arabis borealis Andrz. mspt.*

Planta a cel. Chamisso in insula Unalaschka lecta, exacte eadem. Ab Arabide hirsuta nostrarum regionum recedit: floribus majoribus, petalis obovatis, stigmate bilobo.

Varietas omnino glabra etiam coram est.

12. *Cardamine hirsuta L.* De Cand. l. c. p. 152. — Cham. et Schlecht. l. c. p. 20. — Hook. l. c. p. 45.

13. *Cochlearia oblongifolia L.* De Cand. l. c. p. 173. — Cham. et Schlecht. l. c. p. 26. — Hook. l. c. p. 56.

## IV. VIOLARIEAE.

14. *Viola Canadensis L.* De Cand. Prod. I. p. 301. — Hook. l. c. p. 80. — *Viola Scouleri Dougl.*! mspt. in Herb. Prescott.

Praeeunte cel. Hookero ad V. Canadensem L. adjungimus, cui adeo similis, ut floribus flavis tantum distingui possit.

*Folia* puberula. *Stipulae* lanceolatae. *Pedunculi* foliis subbreviores. *Bracteae* ovato-lanceolatae. *Flores* flavi (ex observatione D. Mertens). *Capsula* trigona, oblonga, acuta, glabra. *Semina* pyriformia, laevia.

Specimen Douglasianum ex ora occidentali Amer. sept. plantam nostram omnino exhibet.

## V. DROSERACEAE.

15. *Drosera rotundifolia L.* De Cand. Prod. I. p. 318. — Hook. l. c. p. 81.
Planta Sitchensis ab europaea non differre videtur.

## VI. CARYOPHYLLACEAE.

16. *Stellaria media Smith.* De Cand. Prod. I. p. 396. — Hook. l. c. p. 94. — *Alsine media L.*
Ab europaea planta nequaquam differt.

17. *Stellaria brachipetala* n. sp.
Caule simplici erecto, foliis lineari-lanceolatis crassiusculis, petalis capsulaque calyce duplo brevioribus.

---

*Caulis* simplex, erectus, tetragonus, glaber, laevis, pedalis et sesquipedalis. *Folia* sessilia, erecta, lineari-lanceolata, acuminata, glaberrima, margine integerrimo, laevi; crassiuscula, 1 — $1\frac{1}{2}$-pollicaria, 4 circiter lineas medio lata, internodiis breviora. *Cyma* dichotoma. *Pedunculi* elongati, fructiferi reflexi. *Sepala* lanceolato-acuminata, margine albo-scariosa, concaviuscula, trinervia, petalis duplo longiora. *Petala* alba, profunde, usque ad basin fere bipartita; laciniis oblongis. *Stamina* petalorum longitudine. *Antherae* ellipticae, flavae. *Styli* 3. *Capsula* ovata, calyce dimidio brevior.
*St. crassifoliae* affinis, a qua distinguitur: foliis lineari-lanceolatis (nec ovato-lanceolatis), calyce petalis duplo longiore (nec breviore).

18. *Stellaria longifolia Mühl.* De Cand. Prod. I. p 400. — Hook. l. c. p. 94. — *Stellaria graminea.* Cham. et Schlecht. l. c. I. p. 49. — *Spergulastrum gramineum.* De Cand. l. c. p. 422. — *Micropetalum gramineum.* Pers. Syn. pl. I. p. 509.
*Caulis* flaccidus, ascendens, acute tetragonus, retrorsum scaber, ramosus. *Folia* sessilia, linearia v. lineari-lanceolata, acuta, sub angulo fere recto

patentia, glabra, margine scabriuscula et subscariosa, uninervia, internodiis breviora, a $1\frac{1}{2}$ — $1\frac{3}{4}$ pollicis longa, 2 — 3 lin. lata. *Pedunculi* filiformes erecti, foliis bracteisque longiores, fructiferi deflexi. *Sepala* acuta, trinervia, margine albo-scariosa. *Petala* alba, usque ad basin bipartita, calyce (imo dimidio) breviora; laciniis linearibus. *Stamina* petalis breviora. Antherae ellipticae, fuscae. *Styli* saepissime 4. *Capsula* calycem vix superans. *Semina* nigro-fusca, rugulosa.

19. *Stellaria calycantha.* — *Arenaria calycantha.* *Ledeb.* in Mém. acad. scienc. St.-Pétersb. T. V. p. 534 (fide amiciss. D. Meyer, qui specimina originalia vidit). — De Cand. Prod. I. p. 412 (ubi stamina calyce longiora perperam dicta).

*Caules* caespitosi, flaccidi, decumbentes, simplices v. parum ramosi, tetragoni, glabriusculi, laeves, 5 — 7 pollices longi. *Folia* ovato-lanceolata v. lanceolato-acuminata, subpatentia, basi connata, pilis albis margine lanuginoso-ciliata, subtus nervo medio sat valido percursa, 5 lineas circiter longa, 2 lin. lata, internodiis multa breviora. *Cyma* dichotoma. *Pedunculi* filiformes. *Sepala* ovato-lanceolata, acutiuscula, concava, margine albo-membranacea, trinervia. *Petala* nulla. *Stamina* calyce breviora. *Styli* 4, rarius 3. *Capsula* ovata, obtusa, subglobosa, calyce paulo longior.

Habitus jam indicat, *Stellariae* potius speciem, quam *Arenariae* esse.

20. *Stellaria crispa.* Cham. et Schlecht. in Linn. I. p. 51.

Descriptioni cl. Chamissonis quod addam, non habeo.

21. *Stellaria humifusa Rottb.* Swarz nov. act. Holm. 1798. p. 125. tab. 6. f. 1! — Fl. Dan. tab. 978. — De Cand. Prod. I. p. 398 (ubi sepala obtusa perperam dicta).

Planta tota glabra, 2 — 3-pollicaris. *Caules* caespitosi, procumbentes, subsimplices, tetragoni, glabri, striati. *Folia* sessilia, connata, ovata v. oblonga, obtusiuscula, trinervia; nervis duobus margini approximatis;

internodiis parum breviora, crassiuscula, 3 — 4 lin. circiter longa, lineamque lata. *Flores* solitarii, axillares v. terminales, erecti, 2 lin. longi. *Pedunculi* filiformes, semunciam circiter longi. *Sepala* ovata, acuta, margine membranacea, obscure trinervia, nervo medio ad apicem tantum conspicuo. *Petala* alba, calycem subaequantia, profunde, ad basin usque, bipartita; laciniis linearibus obtusiusculis. *Stamina* subulata, basi dilatata, petalis paulo breviora. *Styli* 3. *Antherae* ellipticae, fuscae (ex sicco). *Capsula* ovata.

Hanc plantam cel. Wahlenberg in Fl. lap. p. 129 ad *Arenariam humifusam* suam refert, secundum specimen ab ipso Swartzio missum. Videtur autem error in adnexa schaedula fuisse; Wahlenbergius enim pag. seq. addit: „Fig. cel. Swartz in Act. l. c. meam plantam *adeo parum refert*, ut nunquam suspicatus sim, quod haec figura meam A. humifusam repraesentaret, antequam specimen ipsius cel. Swartzii e Jemtia allatum vidi.“ Figura Swartzii citata sicut descriptio exactissime nostram plantam sistit.

22. *Arenaria peploïdes L.* De Cand. l. c. p. 413. — Cham. et Schlecht. l. c. p. 57.

23. *Arenaria rubra L.* De Cand. l. c. p. 401.

24. *Arenaria lateriflora L.* De Cand. l. c. p. 412. — Cham. et Schlecht. l. c. p. 57.

25. *Cerastium alpinum L.* De Cand. Prod. I. p. 419. — *C. Fischerianum.* Cham. et Schlecht. l. c. p. 60?

In Insula Unalaschka etiam frequens. A *C. Fischeriano*, cujus specimina in herb. amiciss. Fischeri vidi, plane diversum nulloque modo confundendum; hujus enim folia lato-ovata, obtusissima etc.

26. *Spergula saginoides L.* De Cand. l. c. p. 394. — Cham. et Schlecht. l. c. p. 46. — Hook. l. c. p. 93.

## VII. GERANIACEAE.

27. *Geranium erianthum.* *De Cand.* Prod. I. p. 641.

Specimina nostra sesquipedalia.

*Caulis* subsimplex, erectus, teretiusculus, basi prope radicem squamis aridis fuscis tectus, ceterum in inferna parte nudus, pilis albis arcte adpressis obsitus. *Folia* radicalia longe petiolata, septemloba; lobis lobulisque trifidis; pilis adpressis albis utrinque vestita. *Petioli* 7 pollices longi. Folia caulina etiam longe-petiolata, suprema subsessilia. *Flores* videntur caerulei. *Calyces* pilis longis patentibus albis villosissimi. *Sepala* oblonga, acuta, aristata, ciliata, trinervia, nervis lateralibus margini approximatis. Petala obovata, apice lata, integerrima, basi pilosa, lineis quinque (purpureis?) picta, quarum 3 mediae fortiores. *Stamina* petalis breviora. *Filamenta* basi dilatata ibique pilosa. *Antherae* oblongae, glabrae. *Pistillum* pilosum, stigmate quinquefido.

E Kamtschatka et ex insula Unalaschka etiam specimina prostant, Sitchensibus simillima.

## VIII. LEGUMINOSAE.

28. *Vicia Sitchensis n. sp.*

Planta plures pedes alta.

*Caulis* subsimplex, teretiusculus, striatus, glabriusculus, hinc inde et praesertim ad petiolorum originem pilosus. *Folia* alterna, sessilia, pinnata: foliolis circiter 24, alternis, oblongis, brevissime petiolulatis, obtusiusculis, mucronulatis, integerrimis, pilis sparsis adpressis albis utrinque pubescentibus, sub lente albo-punctulatis, 10 lineas usque ad pollicem longis, 3 lineas medio latis. *Petiolus* angulosus, supra canaliculatus, pilis sparsis obsitus, apice in cirrhum ramosum desinens. *Stipulae* oppositae, semisagittatae, oblongae, basi inciso-dentatae, pilosiusculae. *Pedunculi* axillares,

pubescentes, folia longitudine aequantes. Flores racemosi, 12 — 18, secundi, breviter pedicellati, 6 lin. circiter longi. *Calyx* 5-dentatus; dentibus inaequalibus, inferioribus majoribus, subulatis, pilosis. *Vexillum* oblongum, apice leviter emarginatum. *Alae* vexillo paulo breviores, lamina oblonga, basi dente recurvo instructa, ungue tenui longa. *Carina* obtusiuscula, organa sexualia includens, biceps. *Stamina* diadelphia, longitudine pistilli. *Ovarium* lineare; stylus filiformis, incurvus, apice stigmate barbato instructus. *Legumen* oblongum, compressum, basi attenuatum et incurvum, apice hamata, sesquipollicem et ultra longum, 5 lin. latum, glaberrimum. *Semina* circiter 6, globulosa, fusca (?), hylo lineari subcirculari.

29. *Pisum maritimum L.* Seringe in De Cand. Prod. II. p. 368.

Legumina pubescentia.

## IX. ROSACEAE.

LÜTKEA.

*Char. gen.* Calyx 5-partitus, lobulis lanceolatis. Petala 5 obovata. Stamina circiter 20, lobulorum calycis longitudine. Carpella 5 libera, stylo filiformi apiculata. Semina 4 pendula.

30. *Lütkea Sibbaldioïdes.* Tab. 2.

*Radix* repens, tenuis, fibrosa, ramulosa, perennis. *Caulis* longe repens, bipedalis et imo ultra, parum angulosus, pilosiusculus, penna corvina tenuior, ramosus. *Rami* sparsi, erecti, foliosi, breves, steriles sesquiunciales, fructiferi duplo longiores. *Folia* alterna, sessilia, in ramis sterilibus dense congesta, in fertilibus magis remota, bis- (rarius ter-) trifida; lobulis lanceolatis, acutis; a medio ad basin linearia, angustissima, quasi in petiolum attenuata, semunciam longa, exstipulata. *Racemi* congesti, pedunculo pedicellisque brevibus albo-villosis, fructiferi elongati; pedicellis 4 — 5 lin. longis, bracteatis. *Bracteae* foliis conformes, sed

multo minores. *Flores* parvi, (albi?) in sicco lutescentes. *Calyx* 5-partitus; lobulis lanceolatis. *Petala* 5, obovata, cum lobulis calycis alterna, toro calyci adnato inserta, integerrima, sepalis duplo longiora, $1\frac{1}{2}$ lin. circiter longa, $1\frac{1}{2}$ lin. lata. *Torus* basin calycis ambiens eique totus adnatus. *Stamina* circiter 20, brevia, longitudine lobulorum calycis, eique mediante toro inserta. *Filamenta* basi parum dilatata. Antherae globulosae, rima longitudinali dehiscentes. *Ovaria* 5. *Styli* totidem filiformes, stigmate parum incrassato obtuso. *Carpella* 5, libera, oblonga, basi attenuata, parum curva, stylo filiformi incurvo fragili, apiculata, glabra, bivalvia; valvulis apice dehiscentibus. *Semina* 4, subfusiformia, parti superiori suturae internae affixa, pendula, exalbuminosa. Embryo inversus, dicotyledoneus; cotyledonibus crassiusculis.

Genus *Spiraeae* maxime affine et notis characteristicis vix distinguendum, nisi habitus omnino alienus separationem suaderet.

Nomen generis in honorem meritissimi navarchi *Lütke*, itineris circa orbem terrarum ducis, scientiarumque cultoris insignis institutum.

31. *Spiraea Aruncus L.* De Cand. Prod. II. p. 545.

Planta Sitchensis ab europaea nullo modo recedit. Flores in spicis remotiusculi.

32. *Rubus Nutkanus Moc.* De Cand. Prod. l. c. p. 566.

Rubo odorato valde affinis species. Petioli, pedunculi, pedicelli simul cum calyce in Sitchensi planta glanduloso-pilosi, quales in speciminibus a cel. Hookero missis et in herbario cl. Prescott asservatis etiam observantur. Calycis laciniae ovatae, apice longe subulatae, corollam aequantes. Flores albi.

33. *Rubus spectabilis Pursh.* Fl. Amer. sept. I. p. 348 cum icone. — De Cand. Prod. I. p. 559.

Pedunculi saepius bini. Calycis laciniae modo oblongae, longe-acuminatae, modo ovatae, apice subulatae sunt.

R. spectabilis Cham. et Schlecht. in Lin. II. p. 6 (R. stenopetalus Fisch. in Choris voy. pittor. Kamtschatka. p. 10) est species longe alia, nempe *R. stellatus Smith.*

34. *Rubus Chamaemorus L.* De Cand. l. c. p. 565. — Cham. et Schlecht. l. c. p. 7.

35. *Potentilla villosa Pursh.* De Cand. l. c. p. 573. — Cham. et Schlecht. l. c. p, 22. — Lehm. Monograph. pot. p. 166. t. 16.

Nostra specimina spithaminea. *Carpella* parva, ovata, parum obliqua, subrostellata, glabra, subfuscescentia.

36. *Potentilla Norwegica L.* De Cand. l. c. p. 573.

Nullo modo a nostra diversa.

*Calycis* laciniae lanceolatae, acutae. *Petala* obcordata, calyce breviora.

37. *Potentilla anserina L.* De Cand. l. c. p. 582. — Cham. et Schlecht. l. c. p. 7.

Duae allatae sunt hujus vulgatissimae plantae ex insula Sitcha formae, quarum una in nihilo a speciminibus nostrarum regionum differt; altera autem státura gigantea insignis est; folia huic nempe pedalia, imo sesquipedalia. Sed praeter hanc enormem foliorum dimensionem, nullum essentiale adest discrimen, quo ista varietas specifice distingui possit. Foliola superne pilosiuscula, subtus sericeo-incana.

38. *Potentilla Comarum Scop.* De Cand. l. c. p. 583. — Cham. et Schlecht. l. c. p. 22.

39. *Sieversia rotundifolia. Cham. et Schlecht.* l. c. p. 4. — *Geum rotundifolium. Lgsdf.* De Cand. l. c. p. 552.

Descriptio, quam dederunt in Linnaea auctores laudati, optima.

40. *Geum macrophyllum Willd.* De Cand. l. c. p. 550. — Cham. et Schlecht. l. c. p. 4.

41. *Sanguisorba Canadensis L.* De Cand. l. c. p. 594. — Cham. et Schlecht. l. c. p. 32.

*Caulis* simplex, folio uno alterove instructus, basi pilis raris adpressis obsitus, superius glaber. *Folia* sesquipedalia; foliolis ovatis, cordatis, grosse serratis, obtusis, glabris, sesquipollicaribus et ultra, pollicemque latis. *Stipulae* petiolares, inciso-dentatae. *Spicae* cylindricae, bipollicares. *Stamina* longe exserta. *Bracteae* floribus longiores.

Altera coram est forma, quae statura humiliore, spicisque ovatis, semiunciam tantum longis, a priore differt. Stamina brevius exserta et bracteae minores; sed vix specifice diversa videtur. An haec *S. media*?

42. *Pyrus diversifolia n. sp.*

Foliis ovatis serratis integris trilobisve, utrinque pilosis adultis saepius glabriusculis, pedunculis calycibusque albo-tomentosis.

---

Inermis. *Rami* juniores albo-tomentosi, demum senescentes glabri, cinerascentes. *Folia* petiolata, ovata, acuminata, grosse sed acute serrata, interdum biserrata, integra vel triloba; lobis mox acutis, mox obtusis, medio longiore; basi saepissime obliqua, utrinque pilosa, praeprimis juniora, magis autem in pagina inferiori, quae etiam pallidior, demum saepius glabriuscula, eglandulosa, a $1\frac{1}{2}$ pollice ad 3 poll. longa pollicemque lata. *Petioli* plus minus albo-tomentosi, interdum calvescentes, pollicem dimidium circiter longi, eglandulosi. *Stipulae* non observatae. *Flores* corymbosi; pedunculi albo-tomentosi, glandulis 2 — 3 instructi, rarius glabriusculi. *Calyx* urceolatus, utrinque albo-tomentosus, rarius extus calvescens, limbo 5-lobo; lobulis lanceolatis, acutis. *Petala* 5, ovata, obtusa, concaviuscula, breviter unguiculata, venulosa, 5 — 6 lin. longa et 3 lin. lata. Unguis angustissima, 1 lin. longa. *Stamina* circiter 20. *Styli* 3 (rarius 4), mox usque ad medium fere, mox ultra medium coaliti, apice liberi, glabri, stigmate obtuso. *Ovarium* triloculare, loculis dispermis.

Foliorum forma et pilositate valde ludens.

43. *Comaropsis pedata.* De Cand. l. c. p. 555.

*Radix* fibrosa, repens. *Caulis* tenuis, longe repens. *Folia* longe petiolata, glabriuscula, trisecta; segmentis acute serrato-dentatis; lateralibus usque ad basin bipartitis. *Petioli* pollicares et ultra, pubescentes. *Stipulae* ovatae, integrae, concaviusculae, squamaeformes. *Pedunculi* solitarii, simplices, uniflori, foliis longiores, pubescentes, medio bracteis duabus oppositis, oblongis, concaviusculis, integerrimis instructi. *Calycis* laciniae lanceolato-acuminatae, dente uno alterove praeditae, reflexae. *Petala* oblonga, obtusa, exunguiculata, calycis laciniis paulo longiora. *Stamina* multa. *Filamenta* filiformia. *Antherae* ovatae, minutae. *Styli* 3 — 4, staminum longitudine. *Carpella* non visa.

Provenit ad truncos putridos.

44. *Pyrus sambucifolia.* Cham. et Schlecht. in Lin. II. p. 36.

Nostra specimina recedunt a Kamtschaticis: foliis 6-jugis cum impari, foliolis acutis (nec acuminatis) serraturisque subtilioribus. Fructus immaturi ovati. Folia etiam 4-juga in Kamtschaticis speciminibus observantur.

Huic adjungimus varietatem *microphyllam*, foliis quam in praecedente triplo minoribus insignem, quam autem, floribus fructibusque deficientibus definire nequimus.

## X. ONAGRARIAE.

45. *Epilobium angustifolium L.* Cham. et Schlecht. l. c. II. p. 552. — *E. spicatum Lam.* De Cand. Prod. III. p. 40.

46. *Epilobium latifolium L.* De Cand. l. c. p. 40. — Cham. et Schlecht. l. c. p. 552.

47. *Epilobium luteum Pursh.* Fl. Amer. sept. p. 259. — Cham. et Schlecht. l. c. p. 553.

Vidi specimen a b. Eschscholtzio in insula Sitcha lectum, in herb. cl. D. Fischeri. A Mertensio nostro tantum in Unalaschka repertum fuit.

48. *Epilobium roseum Schreb.* Reichb. icon. t. 190.

*Radix* valde fibrosa; fibrillis tenuissimis. *Caules* caespitosi, erecti, parce ramosi, teretiusculi, lineis a foliorum basi decurentibus et tenuissime pubescentibus su ban u losi, glabriusculi, versus apicem tantum puberuli, pedales et ultra. *Folia* inferiora opposita, oblonga, basi attenuata, caulem amplectentia, subconnata, linea pubescente decurrentia; superiora sparsa, ovato-lanceolata, basi attenuata quasi petiolata, glabriuscula, margine tantum tenuissime puberula, usque ad 2 pollices longa et 6 — 8 lin. lata. *Flores* parvi, sessiles. *Petala* rosea, calyce duplo fere longiora basi attenuata, usque ad ⅓ limbi bifida; lobulis obtusis. *Stylus* simplex, clavatus. *Capsula* bipollicaris et ultra.

49. *Epilobium affine n. sp.*

Foliis oppositis sessilibus ovato-lanceolatis irregulariter serrulato-dentatis pubescentibus, petalis bifidis obcordatis calyce vix longioribus, stigmate clavato indiviso.

---

Planta 1½ — 2-pedalis.

*Radix* fibrosa. *Caulis* erectus, parce ramosus; ramis brevibus; teres, glaber, apice tantum pubescens, pennae anserinae crassitie. *Folia* opposita, sessilia, ovato-lanceolata, irregulariter serrulato-dentata, subtus pallidiora, nervosa, 2 — 3 poll. longa, pollicem fere lata, basi linea prominente, vix pubescente, utrinque in caule decurrentia. *Flores* sessiles, exigui. *Calycis* laciniae lanceolatae, nervo medio instructae, venulosae, margine pubescentes. *Petala* obovata, calycis laciniis vix longiora, usque ⅓ limbi bifida; lobulis obtusis; 2 lin. circiter longa, lineam et quod excedit, lata. *Stamina* petalis breviora. *Stylus* simplex, stigmate indiviso, clavato. *Ovarium* sicut capsula pubescens.

Differt a praecedente, cui affine: foliis sessilibus, ovato-lanceolatis (nec in petiolum attenuatis, oblongis); petalis calycem vix superantibus (nec multo longioribus).

Ab *E. montano* differt: foliis ovato-lanceolatis (nec lanceolatis); petalis calycem subaequantibus (nec longioribus); pistillo simplici (nec 4-fido).

50. *Epilobium Hornemanni.* Reichb. icon. pl. rar. t. 180. — De Cand. l. c. p. 42. — Fl. Danic. t. 1387.

Planta nostra optime cum iconibus citatis convenit; differt tantum petalis parum profundius divisis.

*Caules* spithaminei, subascendentes, teretiusculi, bifarie pubescentes, simplices, versus apicem tenuissime albo-pubescentes. *Folia* inferiora opposita, oblonga, obtusiuscula, superiora sparsa, sessilia, ovato-lanceolata, irregulariter dentato-serrata, glabriuscula, semunciam et ultra longa, 3 lin. lata, basi linea prominente, tenuissime albo-pubescente utrinque in caule decurrentia. *Flores* parvi, sub anthesi nutantes. *Sepala* lanceolata, acuta. *Petala* calyce plus duplo longiora, usque ad $\frac{1}{3}$ limbi bifida; lobulis obtusis; lin. $3\frac{1}{2}$ longa, $1\frac{1}{2}$ lin. lata. *Stamina* petalis duplo breviora. *Stylus* simplex, stigmate clavato. *Capsulae* puberulae, unciales.

51. *Circaea alpina L.* De Cand. l. c. p. 63.

## XI. HALORAGEAE.

52. *Hippuris vulgaris L.* De Cand. l. c. p. 71.

Sitchensis planta ab europaea nequaquam diversa.

## XII. PORTULACEAE.

53. *Claytonia alsinoïdes Sims.* De Cand. Prod. III. p. 360.

Planta pedalis s. sesquipedalis.

*Radix* tenuis, fibrosa, annua. *Caules* caespitosi, erecti, glabri, inferne nudi, superne foliis oppositis instructi. *Folia* radicalia longe petiolata, oblonga v. ovata; caulina opposita, sessilia, lato-ovata, vix mucronulata, nervosa. *Flores* racemosi, albi; pedicelli saepissime solitarii, bracteati. *Sepala* brevia, ovata. *Petala* calyce triplo longiora, bifida. *Capsula* trivalvis. *Se-*

*mina* rotunda, compressa, lentiformia, rostellata, nigerrima, splendentia, quasi vernicosa.

54. *Claytonia asarifolia n. sp.*

Foliis nervosis, radicalibus petiolatis subreniformibus, caulinis oppositis sessilibus lato-ovatis, petalis bifidis rubris.

---

Planta pedalis et ultra, tota glabra.

*Caules* caespitosi, teretiusculi, basi nudi, superne foliis instructi. *Folia* radicalia longe petiolata, subreniformia, 4 fere pollices lata, nervosa; nervis 5 principalibus e petiolo orientibus. Caulina opposita, sessilia, lato-ovata, obtusa, absque mucrone, nervosa, pollicem fere longa lataque. *Flores* racemosi, rubri. *Bracteae* lineares. *Pedicelli* saepius solitarii, interdum terni. *Sepala* lato-ovata, acuta. *Petala* calyce duplo longiora, bifida, lobulis obtusis. *Semina* praecedentis.

55. *Claytonia flagellaris n. sp.*

Caulibus caespitosis flagelliformibus, foliis ovalibus in petiolum attenuatis nervosis.

---

*Radix* fibrosa, tenuis, annua. *Caules* caespitosi, decumbentes, flagelliformes, hinc inde foliorum fasciculos radiculasque protrudentes, tenues, glabri, pedales. *Folia* caespitosa, breviter petiolata, lato-ovalia (juniora oblonga) acutiuscula, basi in petiolum attenuata, integerrima, nervosa, limbo semunciam fere longo latoque. *Flores* racemosi, albi. *Sepala* ovata, obtusa. *Petala* calyce plus triplo longiora, bifida; lobulis obtusis.

56. *Montia fontana L.* De Cand. l. c. p. 362.

Collectio duas hujus plantae ex insula Sitcha offert formas, quibus et apud nos venire solet. Altera varietas caule instructa est erectiusculo, foliis subconnatis, floribus majoribus; altera caule debili decumbente, foliis sessilibus, et floribus multo minoribus.

## XIII. GROSSULARIEAE.

57. *Ribes bracteosum Douglas* mspt.

Foliis cordatis 5 — 7-lobis, grosse biserratis pilosiusculis, racemis longissimis laxis puberulis, bracteis linearibus pedicellorum longitudine.

---

*Rami* inermes, vetustiores cinerascentes. *Folia* sparsa, longe petiolata, 5 — 7-loba, basi cordata; lobulis ovato-lanceolatis, grosse biserratis; utrinque pilis brevibus, raris, albis, adpressis vestita, 2 — 3 pollices longa lataque. *Petioli* 2 — 4-pollicares, supra canaliculati, basi parum dilatati, setisque nonnullis rigidiusculis, plumosis obsiti, ceterum pilis brevissimis albis puberuli. *Racemi* axillares, simplices, longissimi, 6 — 9 pollices metientes, erectiusculi, flores circiter 50 gerentes. *Pedicelli* 4 — 6 lin. longi, puberuli, bractea lineari basi instructi, eaque vix longiores, pilis albis subpubescentes. *Petala* subobovata, staminibus triplo longiora. *Ovarium* ovatum.

Specimina hujus speciei, a cl. Douglasio in ora occidentali Americae septentrionalis lecta et in herbario ditissimo cl. Prescott asservata, cum Sitchensibus nostris exacte conveniunt.

58. *Ribes affine Douglas* mspt.

Foliis 5-lobis grosse sub-biserratis superne glabriusculis, subtus in nervis margineque pubescentibus, racemis glanduloso-hispidulis, bracteis lineari-lanceolatis pedicello brevioribus, fructu hispidulo.

---

*Rami* praecedentis. *Folia* sparsa, petiolata, 5-loba; lobis ovatis acutiusculis, grosse subbiserratis; superne glabriuscula, subtus in nervis margineque pubescentia, a $1\frac{1}{2}$ — 2 pollices longa lataque. *Petioli* $1\frac{1}{2}$ — 2 pollices longi, limbum foliorum subaequantes, supra canaliculati, basi parum dilatati et glanduloso-ciliati, puberuli. *Racemi* erecti, simplices,

glanduloso-hispiduli, 2 pollices longi, flores circiter 12 gerentes. *Pedicelli* bracteati, 4 lineas longi. *Bracteae* pedicello dimidio breviores, lineari-lanceolatae, ciliatae, pubescentes. *Ovarium* glanduloso-hispidulum, globosum. *Fructus* globosi, hispiduli.

Specimina a cl. Scoulero et Douglasio ad flumen Columbiam lecta nostris simillima.

## XIV. SAXIFRAGEAE.

59. *Tellima grandiflora Lindl.* De Cand. Prod. IV. p. 49. — *Tiarella alternifolia Fisch.* De Cand. l. c. p. 50 (ex autopsia herb. Fisch.).

Specimina Sitchensia exacte conveniunt cum Scoulerianis in America septentrionali lectis.

60. *Tiarella trifoliata L.* De Cand. l. c. p. 50.

Folia trisecta!

Vidimus specimina a cl. Scoulero ad ostia fluminis Columbiae lecta, aliaque Americana a cl. Douglasio missa; habemus denique alia e Sibiria orientali, quae cuncta inter se et cum Sitchensi planta conveniunt.

*Obs.* 1. Cel. Seringe l. c. de hac planta monet: „*habitu, racemo et capsula omnino Mitellam diphyllam referre*;" sed habitus longe alius et racemus insuper compositus est, qui in M. diphylla simplex.

*Obs.* 2. *Leptarrhena pyrolifolia et amplexifolia* a cl. Seringe in De Cand. Prod. IV. p. 48) perperam ut species distinctae proponuntur.

61. *Heuchera divaricata Fisch.* De Cand. l. c. p. 51.

Planta pedalis v. sesquipedalis.

*Radix* fibrosa, perennis. *Caules* caespitosi, erecti, simplices, teretes, glabri, lineam in diametro crassi, folio uno alterove instructi. *Folia* radicalia longe petiolata, suborbiculata, basi cordata, 5 — 7-loba; lobis acutis, inciso-dentatis, dentibus mucronulatis; glabra, $1\frac{1}{2}$ — 2 pollices longa lataque. *Petioli* limbo triplo longiores, supra leviter canaliculati, glabriusculi.

*Folia* caulina alterna, brevius petiolata, ceterum radicalibus conformia. *Stipulae* basi petioli adnatae, apice liberae, lanceolatae, fimbriatae. *Flores* paniculati (cyma paniculaeformis): ramis alternis pedicellisque divaricatis, dichotomis, cum flore saepissime in angulo medio, glanduloso - puberulis, bracteatis. *Bracteae* inferiores ovato-lanceolatae, inciso-dentatae; superiores lineares; omnes apice mucronulatae. *Calyx* campanulatus, 5-lobus; lobulis aequalibus, lanceolatis, obtusiusculis; extus pilis albis adpressis obsitus. *Petala* minuta, ovata, basi in unguem filiformem, laminam longitudine adaequantem attenuata, integerrima. *Stamina* 5, summitati tubi calycis inserta, lobulis ejusdem opposita. *Filamenta* filiformia, glabra, calycis lobulos aequantia. *Antherae* parvae, ovatae, longitudinaliter dehiscentes. *Ovarium* calyci dimidium adnatum. *Styli* duo, staminum longitudine, glabri, stigmate punctiformi. *Capsula* non visa.

Crescit etiam in Kamtschatka et in aleutica insula Kadiak.

*Obs.* In phrasi caracteristica Prodromi l. c. „*scapus nudus*" male huic speciei adscribitur.

62. *Saxifraga stellaris L.* De Cand. l. c. p. 40.

*β. Brunoniana.*

Planta habitum *S. stellaris* ex toto exprimit; sed recedit *petalis basi semper hastulatis*, quod nunquam, neque in europaeis, neque in Sibiricis speciminibus, observatur.

Sitchensia specimina pedalia, valde ramosa; caulibus, foliis pedicellisque pubescentibus.

*S. foliolosa R. Br.*, quae in insula Melville lecta est, nostrae plantae varietatem offert, cujus exempla etiam ex insula Sitcha habemus.

63. *Saxifraga punctata L.* S. hirsuta *β* punctata Seringe in De Cand. Prod. l. c. p. 42. — Sternberg revis. Saxif. p. 18.

Specimina ex insula Unalaschka, e Kamtschatka, et ex toto tractu boreali omnino cum Sitchensibus eadem.

64. *Saxifraga Mertensiana n. sp.*

Scapo subnudo, foliis subrotundis inciso - lobulatis, lobulis subtridentatis, pedunculis glanduloso pubescentibus, sepalis ovatis acutiusculis, petalis ovatis acutis brevissime unguiculatis trinerviis.

---

*Folia* radicalia suborbiculata, inciso - lobata; lobulis subtridentatis; glabriuscula, hinc inde pilis nonnullis albis instructa, basi cordata, cuneatimque in petiolum decurrentia, $1\frac{1}{2}$ — 2 pollices longa lataque. Petioli elongati, 3 — 4-pollicares, pilis raris albis pubescentes. *Scapus* ascendens, erectus, simplex, subnudus, folio unico prope basin instructus, teres, pilis brevibus albis pubescens, pedem circiter altus. *Flores* paniculati; ramis alternis, pedicellisque filiformibus glanduloso - pubescentibus. *Bracteae* lanceolatae, minutae. *Calyx* basi vix gamosepalus; sepalis oblongis, acutiusculis, reflexis. *Petala* subaequalia, ovata, acutiuscula, basi in unguem attenuata, integerrima, triplinervia; nervis lateralibus parum supra basin ex medio orientibus; sepalis duplo longiora, bilinearia, lineaque paulo angustiora. *Stamina* 10, petala subaequantia; filamentis clavatis, apice acutis. *Antherae* minutae, subglobosae. *Ovarium* ovatum, stylorum longitudine.

Differt a S. punctata, cui affinis:

1) Statura robustiore; 2) foliorum lobulis s. crenis tridentatis (nec integris); 3) petalis acutis trinerveis (nec obtusis, uninerveis).

## XV. UMBELLIFERAE.

65. *Pleurospermum Gmelini.* — Archangelica Gmelini De Cand. Prod. IV. p. 170. Habitus Angelicae, sed fructus Pleurospermi!

66. *Ligusticum Scoticum L.* De Cand. l. c. p. 157. — Cham. et Schlecht. in Lin. I. p. 390.

67. *Conioselinum Fischeri W. et Gr.* De Cand. l. c. p. 164. — *Selinum Gmelini de Bray.* Ledeb. Fl. Alt. I. p. 318. — *Ligusticum Gmelini.* Cham. et Schlecht. l. c. p. 391.

68. *Heracleum lanatum Michx.* Flor. bor. am. I. p. 166. — De Cand. l. c. p. 192. *Caulis* sulcatus, pilis albis tenuibus villosus, ad internodia lanatus. *Folia* trisecta; segmentis magnis, petiolatis, cordatis, 3 — 5-lobis, dentato-serratis, acutis v. acuminatis; utrinque pilosa, subtus ad nervos lana subtili albida obtecta, scabriuscula. *Petioli* pilosi, scabriusculi. *Vaginae* magnae, 2 — 3-pollicares, laxae, membranaceae, striatae, pilosae, ad summitatem lanatae. *Involucrum* et *involucella* polyphylla; foliolis lanceolatis, apice in filum longum productis, pubescentibus. *Umbella* multiradiata; radiis circiter 30, striatis, pubescentibus, 3 pollices et ultra longis. *Calyx* 5-dentatus. *Petala* 5, obovata, integra, cum lacinula inflexa, venoso-striata, lineam circiter longa, exteriora radiantia, biloba, 2 — 3 lin. longa. *Stamina* 2 lin. longa. *Antherae* oscillantes. *Ovarium* pubescens. *Styli* 2, divaricati, stigmate globoso. *Fructus* obovatus (apud Michx. orbiculatus), plano-compressus, margine membranaceo cinctus, 5 lin. longus, 3 lin. latus. *Mericarpia* jugis tenuissimis, dorsalibus 3 aequidistantibus, lateralibus 2 margini contiguis, remotis. *Vittae* dorsales 4, clavulatae; commissurales 2 dorsalibus conformes. *Carpophorum* usque ad basin bipartitum.

Nuttalliana specimina nostris ex toto similia.

69. *Osmorhiza brevistylis.* De Cand. Prod. IV. p. 232.

Planta bipedalis. *Radix* perennis, teretiuscula, ramosa, fibrosa, pennae anserinae crassitie, extus subfusca, intus alba, in statu sicco odoris saporisque expers, mucilaginosa. *Caulis* teres, totus glaber, striatus, ramosus. *Folia* biternatisecta, pubescentia; segmentis petiolatis, ovato-lanceolatis, inciso-dentatis, dentibus acutis, mucronulatis; segmento medio lateralibus majori, saepius usque ad basin fere tripartito. *Vaginae* breves, membranaceae, lineis distantibus, prominulis striatae. *Involucrum* nullum.

*Radii* umbellae circiter 6, glabri, fructiferi 3-pollicares. *Involucella* nulla. *Umbellulae* 4—6-radiatae; radio uno alterove flore abortivo, involluccellum aemulante. *Calycis* margo obsoletus. *Petala* 5, aequalia, obovata, apice minuta acutaque inflexa, nervo medio percursa, alba, lineam longa. *Stamina* petalorum longitudine. *Styli* 2, breves, vix ½ lin. longi, divaricato-recurvi, rarius paralelli, erecti. *Ovarium* pilis albis, erectis, adpressis hispidum. *Fructus* elongatus, basi in caudam attenuatus, ibique pilis rigidis erectis adpressis praeprimis hispidus, angulatus, cum cauda 5 lin. longus, vix lineam latus. *Mericarpia* angulis hispida, sulcata; valleculis planis, evittatis, jugis 5 acutis; commissura sulcata. *Carpopodium* semibifidum. *Semen* teres, arcte inclusum.

Specimen a cl. Oakes in Amer. sept. lectum, quod in herb. Fischeriano vidi, nostrae plantae simillimum. Et in hoc involucrum et involucella nulla!

In insula Unalaschka etiam lecta est.

## XVI. ARALIACEAE.

70. *Panax horridum Smith.* De Cand. Prod. IV. p. 252.

*Caulis* fruticosus, aculeis horridus. *Folia* petiolata, simplicia, palmatiloba, cordata; lobis 7, inciso-dentatis; dentibus acutis mucronatis; supra glabra, subtus ad nervos venasque villosa et parce aculeis obsita, spithaminea. *Petioli* longi, 7-pollicares, sulcati, pilis longis albis intertextis villosi, aculeis sub angulo recto patentibus et valde acutis muniti, praesertim ad basin horridi. *Flores* polygami, racemosi; racemis villosis, basi aculeatis. *Rami* inferiores longiores; floribus ad apicem sessilibus. *Calycis* margo brevis; lobulis 5 obsoletis, obtusis. *Petala* 5, lanceolata, cum lobulis calycis alterna. *Stamina* 5, petalorum longitudine. *Styli* 2, breves.

## XVII. CAPRIFOLIACEAE.

71. *Viburnum acerifolium L.* De Cand. Prod. IV. p. 337.

Folia quoad formam valde inconstantia; suprema interdum ovato-lanceolata; lobi modo 3, acuti, modo obtusi, interdum fere nulli. Dentes etiam variabiles.

Specimina Nuttalliana Sitchensibus similia.

72. *Sambucus pubescens Michx.* Flor. bor. amer. I. p. 181. — De Cand. l. c. p. 323.

Folia pinnatisecta; segmentis 5 — 7, ovato-lanceolatis, subsessilibus, serratis, basi obliquis; superne glabriuscula v. in nervis tantum pilis brevissimis albis vestita, subtus margineque pilis sparsis, rigidulis, adpressis, albis pubescentia.

Nostra specimina exacte cum Nutallianis conveniunt.

73. *Cornus Canadensis L.* De Cand. l. c. p. 274. — Cham. et Schlecht. in Linnaea III. p. 139.

74. *Linnaea borealis L.* De Cand. l. c. p. 340.

## XVIII. RUBIACEAE.

75. *Galium triflorum.* Michx. l. c. I. p. 80. — De Cand. Prod. IV. p. 601. — Cham. et Schlecht. in Linn. III. p. 222.

Planta nostrarum quoque regionum incola; circa Petropolin ab amiciss. Prescott primum lecta, et in agro Mosquensi a defuncto Goldbachio observata fuit.

76. *Galium trifidum L.* De Cand. l. c. p. 597. — Cham. et Schlecht. l. c. p. 221.

Specimina Sitchensia 3 — 4-pollicaria; foliis 4 — 5, oblongis, obtusis, subemarginatis, 4 lin. longis et 2 lin. latis. Pedunculi breves. Corollae trifidae.

77. *Galium Aparine L.*

Nostra specimina pertinent ad var. quae *G. Vaillantii* De Cand. est.

Caulis retrorsum hispidus, ad nodos non pilosus. Folia saepissime $6^{na}$, rarius $8^{na}$, linearia, mucronata, margine aculeis mox retrorsis, mox antrorsis munita, nervo dorsali aculeato. Fructus globoso-didymi, setis apice uncinatis hispidi.

## XIX. VALERIANEAE.

78. *Valeriana Sitchensis n. sp.*

Caule erecto glabro ad internodia piloso, foliis inferioribus trisectis, superioribus pinnatisectis bijugis, segmentis ovatis acuminatis grosse dentatis, corymbo dense contracto.

---

*Radix* fibrosa, ramosa, pennae anserinae crassitie, perennis, graveolens, odore quam in V. officinali fortiore. *Caulis* subascendens, erectus, simplex, teres, tenuiter striatus, glaber, ad internodia tantum pilosus alboque lanatus, fistulosus. *Folia* radicalia nulla; caulina inferiora longe petiolata, trisecta; segmentis ovatis, obtusis, hinc inde obsolete dentatis, dentibus apiculatis; subtus margineque tenuissime pubescentibus, in petiolum parum decurrentibus. Superiora petiolata, pinnatisecta; segmentis 5; lateralibus subalternis, ovatis, acuminatis, grosse dentatis, subsessilibus, extremo paulo majore obtusioreque, 2 — 2½ pollices longis, sesqui-pollicem latis. Suprema subsessilia, modo corymbum involucrantia, modo magis remota, inferioribus similia, sed angustiora minoraque. *Petioli* basi dilatata caulem amplectentes et connati. *Racemi* coarctati. *Bracteae* lineares, angustissimae, acuminatae, nervo valido percursae, 4 lin. longae, corollam subaequantes. *Flores* 4 lin. longi. *Calyx* obsoletus. *Corolla* infundibuliformis, basi gibba, limbo 5-lobo; lobulis oblongis obtusis, nervo medio instructis. Tubus striis 10 notatus, quarum 5 ad lobos se dirigunt nervumque illorum formant; 5 autem in angulis inter lobos desinunt.

*Stamina* exserta. *Stylus* indivisus, apice obtusus, exsertus. *Fructus* non observatus.

Affinis videtur *V. sambucifoliae Mik.*, a qua autem differt: foliis infer. 3-sectis, superioribus 2-jugis (nec 4 — 5-jugis) racemo denique contracto. *V. capitata Pall.* in herb. *Willd.*, quae in insula Unalaschka et in regionibus Americae maxime borealibus provenit, differt tam foliorum forma, quam toto habitu.

Radix Caloschis (Sitchae incolis) praetioso medicamini est.

Habitat in montanis.

## XX. COMPOSITAE.

79. *Apargia borealis n. sp.*

Scapo nudo unifloro glabro, foliis angustis lineari-acuminatis subdenticulatis glabris.

---

Planta pedalis et ultra.

*Radix* fasciculata, tuberoso-fibrosa. Tubera parva, ovalia, e collo enata, in fibram crassiusculam, rigidam, simplicem, plus minus longam attenuata. *Folia* lineari-acuminata, basi in petiolum attenuata, valde angusta, 3 — 4 lin. lata et usque ad 6 poll. longa, scapo semper breviora, hinc inde denticulo parvo acuto, nonnunquam deorsum spectante instructa, glabra, nervo dorsali percursa. *Scapus* ascendens, nudus, teres, glaber, uniflorus. *Involucri* squamae lanceolatae, acuminatae, margine membranaceae, nervo medio excurrente, 4 — 5 lin. longae lineamque latae. *Corollae* flavae, lingulatae, squamis duplo longiores, nervis 4 percursae, apice 5-dentatae; dentibus longiusculis, acutis; lineas 10 longae lineaque paulo latiores. *Stamina* generis. *Stylus* exsertus; stigmate bifido, parum incrassato. *Pappus* sessilis, plumosus, albus. *Achaenia* non suppetunt.

80. *Sonchus hastatus.* Lessg. in Linnaea VII. p. 99.

Nobis potius Prenanthis quam Sonchi species videtur. Habitus Cacaliae.

Limbus folii in petiolum longe decurrens. Corollae carneae (D. Mertens). Planta per borealem regionem longe lateque dispersa. Lecta quoque est prope Ochotsk, in Kamtschatka et in aleuticis insulis Kadiak et Unalaschka. Vidi praeterea hujus plantae specimen in herb. Prescottiano a cl. Scoulero in Observatory Inlet lectum.

81. *Cotula matricarioïdes.* — Artemisia matricarioïdes Lessg. l. c. p. 210.

Sitchensia specimina, ut Kamtschatica, 4 — 7-pollicaria; pedalem plantam ex Unalaschka habemus.

Glaberrima. Corollulae quadrifidae, utrinque appendice aliformi, a limbo ad basin tubi usque, instructae. Pappus nullus.

Male inter Artemisias hospitat, habitu omnino alieno; *Cotulae aureae* magis affinis.

An *Tanacetum pauciflorum Richards.*, cui insuper folia adscribuntur *villosa*, ad hanc plantam spectet, ut cl. Lessing l. c. existimat, valde dubitandum.

82. *Artemisia arctica.* Lessg. l. c. p. 213.

B. Mertens hanc plantam in insulis Sitcha, Unalaschka et Koraginsk legit.

83. *Arnica latifolia n. sp.*

*Radix* simplex, obliqua, fusca, pennae corvinae crassitie, fibrosa; fibris simplicibus longis. *Caulis* simplicissimus, rectus, teres, striatus, pilis tenuibus pubescens, inanis, crassitie pennae gallinaceae, apice in corymbum 3- (vel rarius 5-) florum divisus. *Folia* opposita, decussata, remota (paria 3 in toto caule), sessilia, semiamplexicaulia, subconnata, rarius in petiolum attenuata, ovata, obtusa, suprema acutiuscula, irregulariter dentato-serrata, supra pilis brevissimis pubescentia, subtus glabra, pallidiora, in sicco glaucescentia, 2 pollices longa, 1 pollicem lata, suprema minora. *Pedunculi* graciles, recti, puberuli, foliis multo longiores, 4 pollices circiter metientes. *Capitula* magnitudine A. montanae. *Involucrum* discum aequans, campanulatum, 1-seriale, squamis 8

subaequalibus lancealatis v. ovalibus, utrinque attenuatis, acuminatis, integerrimis, planis, tenuissime ciliatis, virentibus, lineisque approximatis striatis, 5 lin. longis, lineam et quod excedit latis. *Pappus* sessilis, albus, plumoso-serratus, corollas disci aequans, 1-serialis. *Flosculi* lutei, tubo piloso; disci hermaphroditi, 2 lin. (sine achaenio) longi; limbo turbinato, 5-dentato, dentibus brevibus, lanceolatis, subciliatis; radii pauci, 8, lingulati, feminei, sine antherarum vestigio, squamis involucri duplo longiores, oblongi, apice obtusi, vix denticulati, 8—9-nerveis, 7—9 lin. cum tubo longis. *Achaenia* (nondum matura) linearia, angulata, striata, glabra, 2 lin. longa.

Differt ab *A. Chamissonis Lessg.* praeprimis: 1) foliorum forma et dimensione relativa; 2) involucro 1-seriali (nec 2-seriali) squamisque paucis (nec numerosis); 3) achaeniis glabris (nec pilosis).

Ab *A. obtusifolia Lessg.* et ab *A. Unalaschcensi Lessg.* recedit praeter alias notas: foliis subtus glabris (nec hirsutis).

84. *Aster Unalaschcensis.* Lessg. l. c. p. 122.

Folia in Sitchensibus speciminibus sicut in Unalaschcensibus per distantiam 1—3 pollicum ab invicem remota, integerrima v. remote serrato-denticulata; denticulis acutis.

85. *Aster peregrinus Pursh?* Lessing l. c. p. 123.

Cum cl. Lessing pro A. peregrino habuimus; sed ex sola eaque brevi diagnosi auctoris species non cognoscitur. Ex insula Unalaschka etiam habemus. Folia per spatia pollicaria inter se distant, plerumque integerrima, rarius denticulo uno alterove subtilissimo instructa. Radix horizontalis, repens, praelonga, fibrillis simpliciusculis.

86. *Achillea Millefolium L.* Lessg. l. c. p. 167.

Tota villosa; ceterum ab europaea planta non diversa. Planta procul dubio in America spontanea, contra cl. Nuttallii sententiam, qui eam ibi introductam credit.

. *Achillea borealis n. sp.*

*Caulis* teretiusculus, sulcatus, striatus, pilis albis mollibus villosus, ultra lineam diametro crassus. *Folia* sessilia, pinnatisecta; segmentis bipinnatifidis, laciniis linearibus, acutis, mucronulatis, pubescentibus. *Flores* corymbosi, albi, magnitudine A. atratae. *Pedunculi* ramosi, villoso-pubescentes. *Squamae* involucri imbricatae, inaequales, extimae ovatae obtusiusculae, interiores ovato-oblongae, magis acutae, hinc convexae, illinc concavae, nervo medio valido instructae, flosculis disci breviores. *Flosculi* radii lingulati; limbo obovato, integro, nervis 4 notato, tubo duplo longiore, lin. 2 longo, lineamque lato. *Flores* disci tubulosi, subinfundibuliformes, 5-fidi; lobulis lanceolatis, tubo elongato, achaenii fere longitudine. *Achaenium* basi attenuatum, glabrum, 3 lin. fere longum. *Pappus* nullus.

Planta a cl. Kastalsky in insula Sitcha lecta est; ubi autem a b. Mertensio non observata fuit.

## XXI. CAMPANULACEAE.

88. *Campanula heterodoxa Vest.?* Roem. et Schult. Syst. veg. V. p. 98.

*Radix* perennis, repens, fibrosa, albida, pennae gallinaceae crassitie. *Caules* caespitosi, simplices, ascendentes v. erecti, angulosi, glabri, pedales sesquipedalesque. *Folia* radicalia petiolata, suborbiculata, basi obtusa, grosse crenata, 3—5 lin. lata. Caulina oblonga, basi in petiolum attenuata, obtusiuscula, parce dentata v. crenata, glabra, 1 — 1½ poll. longa, 3 circiter lineas lata, suprema acutiora, integerrima et saepius tenuissime pubescentia. *Pedunculi* axillares v. terminales, filiformes, simplices, solitarii, uniflori, modo in racemum pauciflorum dispositi, modo flos terminalis, solitarius. *Bracteae* duae, lineares, oppositae, in medio pedunculo. *Flores* nunquam evolutione coaetanei; extremus semper primum apertus. *Calycis* tubus brevis, laciniis linearibus. *Corolla* magna, calyce triplo

longior, campanulata, uncialis circiter, caerulea, quinquefida; lobis erectis obtusis. *Stamina* brevia. Filamentorum pars dilatata ovata, ciliata. Antherae lineares. *Stylus* inclusus, rectus, staminibus duplo longior, sinus limbi attingens, stigmate clavato trilobo.

Habitat ad littus maris inter saxa.

## XXII. VACCINEAE.

89. *Vaccinium Myrtillus L.*

Europaea nostra omnino planta; a nemine, praeter Stellerum, ut videtur, in America observata.

90. *Vaccinium uliginosum L.* Cham. et Schlecht. in Linn. I. p. 526. — Pursh Fl. bor. amer. p. 288.

91. *Vaccinium ovalifolium Smith* in Rees cyclop. T. 36. art. Vaccin.

Frutex ramosus, glaberrimus. *Rami* erecti, juniores angulosi, tetragoni; vetustiores teretiusculi, pallidi. *Folia* breviter petiolata, elliptica, obsolete denticulata, subintegra (rarius ad basin denticulato-serrata), apice obtusiuscula cum mucrone parvo, glaberrima, subtus pallidiora, venosa, $1\frac{1}{2}$ pollicem et ultra longa, 8 circiter lineas lata. *Pedunculi* solitarii, uniflori; fructiferi 4—5-lineares, erecti. *Flores* non visi. *Baccae* nigrae, globosae, calyce brevi, subintegro s. obsolete denticulato coronatae.

Nostra specimina omnia fructifera, fructibus immaturis; sed ad amussim cum Douglasianis in America boreali lectis conveniunt. Specimina a Smithio l. c. descripta etiam in ora Americae septentrionalis occidentali a Menziesio lecta erant.

92. *Vaccinium caespitosum Michx.* Flor. amer. I. p. 234. — Pursh l. c. p. 289. — V. membranaceum Dougl. mspt.!

Frutex humilis, spithamineus. *Radix* longe repens, lignosa, pennae columbinae crassitie. *Rami* teretiusculi, juniores paulum angulati. *Folia* subsessilia, cuneato-obovata, rotundato-obtusa, vix mucronulata, acute ser-

rata, glaberrima, subtus venoso-reticulata, 6—10 lin. longa et 4 lin. circiter lata, membranacea. *Pedunculi* solitarii, uniflori, nutantes; fructiferi breves, 2—3-lineares. *Fructus* globosi.

Specimen Douglasianum in herbario amiciss. Prescott, ex ora occidentali Americae septentrionalis, exacte cum nostra planta convenit. Specimina a Menziesio in eadem regione lecta, in nihilo (teste Purshio) a V. caespitoso Michx. differunt.

93. *Vaccinium parvifolium Smith* l. c.

*Frutex* ramosissimus; ramis divaricatis, angulosis, junioribus tetragonis. *Folia* breviter petiolata, elliptica v. ovata, integra, rarius denticulo uno alterove instructa, mucronulata, glabra, subtus glauca, semunciam circiter longa et 4—5 lineas lata. *Pedunculi* solitarii, uniflori, ad apicem parum incrassati, inde clavati; fructiferi modo erecti, modo deflexi, 4—5 lin. longi. *Flores* non visi. *Baccae* globosae, calyce latiusculo subintegro coronatae (rubrae ex Smith), quam in V. ovalifolio minores.

94. *Vaccinium Chamissonis n. sp.*

V. Myrtillus?? Cham. et Schlecht. l. c. p. 525.

Foliis deciduis ellipticis obtusis tenuissime mucronulatis subintegris, subtus glaucis, calyce sub-5-dentato, pedunculis solitariis aequalibus, fructiferis deflexis.

---

*Fruticulus* ramosus; ramis erectis, angulatis. *Folia* breviter petiolata, elliptica, subintegra, sive denticulo hinc inde instructa, obtusa cum mucrone minimo, glabra, subtus glauca. *Pedunculi* solitarii, uniflori, fructiferi deflexi. *Calyx* superus, limbo brevi, subquinquelobo; lobulis rotundatis, obtusis. *Corolla* urceolata, 5-loba; lobulis brevibus, obtusis, revolutis. *Genitalia* inclusa. *Stamina* 10. *Filamenta* brevia, antherarum longitudine, basi dilatata. *Antherae* biloculares, dorso bicornes, apice poro dehiscentes. *Stylus* simplex, teres; *stigmate* parum incrassato. *Baccae*

parvae, calyce latiusculo, subquinque-dentato coronatae, nigrae (teste Kastalsky).

Differt a *V. parvifolio*: 1) habitu diverso; ramis erectis (nec divaricatis) magisque angulosis; 2) foliis brevioribus, latioribus magisque obtusis; 3) pedunculis brevibus, non clavatis; 4) baccis nigris.

95. *Vaccinium Vitis Idaea L.* Cham. et Schlecht. l. c. p. 526.

Foliorum parvitate ab europaea planta recedens. Per totum tractum borealem divulgatum.

96. *Oxycoccos vulgaris Pers.* Cham. et Schlecht. l. c. p. 527. — Pursh. l. c. p. 263.

97. *Empetrum nigrum L.* Cham. et Schlecht. l. c. p. 538.

Flores Sitchensis plantae hermaphroditi, quales et apud nos haud raro venire solent. Baccae nigrae, uniloculares, enneaspermae. Semina subtriquetra, hinc convexa, illinc compressa, pallida.

## XXIII. ERICACEAE.

98. *Andromeda Mertensiana n. sp.* Tab. 5.

Foliis quadrifariam imbricatis obtu iusculis glabris, ramis virgatis tetragonis, pedunculis axillaribus pubescentibus.

---

*Caules* lignosi, ramosissimi. *Rami* virgati, foliis dense imbricatis tetragoni, glabriusculi. *Folia* sessilia, quadrifariam imbricata, cauli ramisque arcte adpressa, oblongo-ovata, obtusiuscula, concava, extus (pag. infer.) subtriquetra, sine sulco longitudinali, glabra, $1\frac{1}{2}$ lin. longa. *Pedunculi* axillares, solitarii, uniflori, filiformes, glabri, 2 — 3 lin. longi, erecti, flore nutante, fructu erecto. *Calyx* 5-partitus, glaber; partitionibus ovatis obtusis. *Corolla* campanulata, usque ad medium 5-fida; lobis obtussissimis; calyce plus triplo major, 3 lin. et ultra longa. *Stamina* 10, longitudine pistilli. *Filamenta* basi paulum dilatata. *Antherae* biloculares,

biaristatae, apice poro dehiscentes. *Ovarium* ovatum, glabrum, stylo longiusculo, rigido superatum. *Capsula* parva, ovalis, 5-valvis; valvulis oblongis, obtusis, dorso sulco longitudinali notatis, medio septiferis.

Habitus *A. tetragonae*, sed tota glabra.

*Andromeda tetragona* a nostra planta differt: foliis majoribus, crassioribus, pubescentibus ciliatisque (nec glabris), intus (pag. super.) magis concavis, subcarinatis, extus (pag. infer.) convexiusculis cum sulco dorsali; ramis denique pubescentibus (nec glabris).

Habitat simul cum sequente in alpinis, ubi confertim terram tegunt.

99. *Andromeda Stelleriana Pall.* Flor. Ross. I. p. 58. tab. 74. f. 2.

*Folia* sessilia, 4-faria, sub angulo recto patentia, oblonga, basi attenuata, obtusa, tenuissime serrulata, nervo medio crassiusculo, glabra. *Pedunculi* pubescentes. *Calyx* profunde 5-partitus; partitiones ovatae, obtusae, concaviusculae. *Stamina* 10, pistillum vix aequantia. *Filamenta* brevia lataque. *Antherae* biaristatae.

Planta habitu Empetri, et a nostro Mertensio non male *empetrifolia* nominata.

100. *Andromeda polifolia L.* Cham. et Schlecht. l. c. I. p. 518.

Nostrate humilior, foliisque angustioribus praedita, qualem formam ex diversis regionibus arcticis habemus.

101. *Kalmia glauca L.* Pursch. l. c. p. 296.

Specimina tantum fructifera nobis allata sunt.

102. *Menziesia ferruginea Smith.* Pursh. l. c. p. 264.

*Frutex* ramosus; rami teretes, patentes, epidermide albicante et secedente vestiti; ramuli juniores pubescentes. *Folia* petiolata, elliptica, pilis adpressis albis superne pilosa, subtus praeter nervos glabra, nervo medio setis rigidis adpressis albis basi rubentibus munita, reticulato-venosa, ferruginea, margine tenuiter ciliata, obsolete serrulata, apice glandula obtusa terminata, pollicem et ultra longa, lin. 5 lata, in apice ramulorum saepius fasciculata. *Pedunculi* terminales, aggregati, glanduloso-pubescentes,

uniflori, 5 lin. circiter longi. *Calyx* gamosepalus, brevissimus, lobatus; lobulis numero inconstantibus, inaequalibus, saepius obsoletis, obtusis, pilis rigidis glanduliferis ciliatis. *Corolla* ovata, subcampanulata, limbo 4 — 5-fido; lobulis valde obtusis; intus pubescens, 3 lin. circiter longa. *Stamina* 8 — 10, longitudine fere corollae. *Filamenta* inferne latiora, nervo medio instructa. *Antherae* biloculares, apice truncatae, rimisque duabus brevibus (poris) dehiscentes. *Ovarium* ovatum, superum. *Stylus* erectus, corollam subaequans, tetragonus, stigmate infundibuliformi. *Capsula* ovalis, basi calyce cincta, glabra, 4 lin. longa, 4-locularis, 4-valvis; valvulis oblongis, margine septiferis; columella tetragona. *Semina* multa, parva, oblonga.

103. *Menziesia aleutica Spr.* Syst. II. p. 202. — Cham. et Schlecht. l. c. p. 515. — Tab. 3.

Sitchensis planta circiter pedalis, Unalaschcensis multo humilior.

*Caulis* lignosus, repens, radiculas emittens fibrosas, tenues; demum ascendens, ramósus, spithamineus, pennae anserinae crassitie. *Rami* erecti, simplices, in summitate caulis quasi verticillati, numero saepius quinario, basi lapsis foliis denudati. *Folia* sessilia, linearia, obtusa, denticulata, ciliata, juniora pulverulenta, demum glabra, subtus glauca, nervo medio crasso albo-pulverulento instructa, 5 lin. longa, vix lineam lata. *Flores* virescentes (D. Mertens). *Pedunculi* terminales, 3 — 7, elongati, erecti, simplices, floccoso-tomentosi, uniflori, 1 — 1½ poll. longi. *Calyx* 5-partitus, floccoso-hirsutus; partitiones ovato-acuminatae, intus, ad basin praesertim, pubescentes. *Corolla* urceolata, calyce ⅓ longior; lobulis 5, brevibus, reflexis. *Stamina* 10, corolla paulo breviora. *Filamenta* pubescentia. *Antherae* oblongae, apice obtusae rimaque brevi dehiscentes. *Ovarium* subglobosum. *Stylus* strictus, apice parum incrassatus, *stigmate* punctiformi. *Capsula* calyce brevior, stylo elongato duploque longiore terminata, 5-locularis.

104. *Azalea procumbens L.* Pursh. l. c. p. 154. — Cham. et Schlecht. l. c. p. 513.

105. *Ledum latifolium Ait.* Pursh. l. c. p. 296.

CLADOTHAMNUS *nov. gen.*

*Calyx* subgamosepalus, 5-partitus, persistens. *Petala* 5. *Capsula* 5- (rarius 6-) locularis; valvulis margine septiferis.

106. *Cladothamnus pyroliflorus.* Tab. 1.

*Frutex* saepe orygalis, ramosissimus. *Rami* teretes, foliosi, juniores albicantes, glabri. *Folia* sparsa, sessilia, elliptica v. oblonga, basi magis attenuata, obtusiuscula cum cuspide brevi, integerrima, glabra, juniora margine tenuissime ciliata, demum nuda, subtus glaucescentia, nervosa: nervis prominulis: pollicaria v. sesqui-pollicaria, medio 5 lin. circiter lata. *Flores* axillares, solitarii. *Calyx* persistens, viridis, basi vix gamosepalus, 5-partitus; partitiones ellipticae, parum inaequales, basi nonnihil dilatatae, obtusiusculae, tenuiter ciliatae, nervo medio instructae. *Petala* 5, cum sepalis alterna, paulum inaequalia, elliptica, obtusa, calyce duplo longiora, lineis longitudinalibus 3 — 5 notata, venulosa, glabra, semunciam longa. *Stamina* 10, brevia. *Filamenta* basi dilatata, lineamque fere lata. *Antherae* totae adnatae, biloculares, apice obtusae, ibique rima brevi (poro) dehiscentes. *Ovarium* globosum, 5- (rarius 6-) sulcatum, glabrum. *Stylus* elongatus, apice incurvus, petala adaequans; *stigmate* globoso, sub-5-lobo. *Capsula* subglobosa, glabra, 5-valvis (rarius 6-valvis), 5- (rarius 6-) locularis; valvulis ovatis, obtusis, convexis, nervo dorsali notatis, margine septiferis. Placenta centralis, stellaris, 5-loba: lobulis rotundatis. *Semina* multa, parva, ovata, arillo membranaceo tenuissimo. reticulato involuta.

Flores et semina Pyrolae; fructus Kalmiae.

107. *Pyrola secunda L.* Pursh. l. c. p. 299.

108. *Pyrola uniflora L.* Pursh. l. c.

## XXIV. GENTIANEAE.

109. *Gentiana Douglasiana n. sp.* Tab. 6.

Caule ramoso, foliis caulinis sessilibus lato-ovatis subcordatis; floribus pedicellatis albis, corollis campanulatis 5-fidis, laciniis intercalaribus bifidis.

---

Plantula 6 — 9-pollicaris. *Radix* perpendiculariter descendens, simplex, tenuis, fibrosa. *Caulis* erectus, angulosus, glaber, a basi saepissime ramosus; ramis simplicibus, oppositis, patulis. *Folia* radicalia ovato-lanceolata v. oblonga, basi parum attenuata, acutiuscula, glabra, integerrima, nervo medio instructa, 4—6 lin. longa et 3 lin. circiter lata. *Caulina* sessilia, opposita, remota, infima oblonga v. ovata, superiora semper lato-ovata, 3 lin. lata. *Pedunculi* plerumque terni in apice caulis ramulorumque. *Bracteae* duae, oppositae, subcordatae, foliis conformes. *Calyx* campanulatus, 5-fidus, glaber; laciniis lanceolatis, acutis, subaequalibus. *Corolla* alba (D. Mertens), calyce duplo longior, campanulata, 5-fida, glabra; laciniis lanceolatis, obtusiusculis, lacinulis intercalaribus bifidis. Tubus corollae brevis. *Stamina* 5, cum laciniis corollae alterna, faucem adaequantia. *Filamenta* tubo adnata. *Antherae* oblongae. *Ovarium* sessile, oblongum, compressum. *Stigma* sessile, bilobum. *Capsula* matura non visa.

Specimen hujus plantae a cl. Douglasio in ora occidentali Amer. septentrionalis lectum, sed indeterminatum, vidi quoque in herbario amic. Prescott.

110. *Gentiana Amarella L*, Cham. et Schlecht. l. c. I. p. 178 et 180.

Sitchensis planta ab Unalaschcensi recedit: calycis laciniis magis inaequalibus; corollae laciniis lanceolatis acutis.

111. *Menyanthes Crista galli Menz.* Hook. Bot. miscell. I. p. 45. c. icone!

Rarissima planta a Menziesio primum in ipsa insula Sitcha lecta, a nostro Mertensio etiam illinc allata est.

Provenit tam in summis alpinis quam in demissioribus, in paludibus semi-exsiccatis.

Descriptioni cl. Hookeri l. c. quod addam, non habeo.

112. *Menyanthes trifoliata L.* Pursh. I. p. 139.

A nostra europaea planta nequaquam diversa.

## XXV. SCROPHULARINEAE.

113. *Veronica serpyllifolia L.* Cham. et Schlecht. l. c. II. p. 558.

114. *Veronica Anagallis L.* Cham. et Schlecht. l. c. p. 559.

115. *Veronica nutans n. sp.*

(Corymbo terminali) caule simplissimo nutante, foliis sessilibus ovatis serratis acutiusculis; capsula subglabra calycem subaequante.

---

Plantula humilis, digitalis s. parum altior.

*Radix* perennis, oblique horizontalis, teres, geniculata, fibrillas emittens filiformes, sat longas, subsimplices. *Caulis* ascendens, simplicissimus, teres, pilis tenuibus albis pubescens, apice semper nutans. *Folia* opposita, decussata, paria communiter in caule 4, sessilia, semiamplexicaulia, ovata, acute serrata, acutiuscula, pubescentia, 5 — 6 lin. longa, 4 lin. lata. *Flores* corymbosi, pauci, 4 — 6. Pedicelli breves, vix linea longiores: fructiferi demum magis elongati, circiter 3-lineares. *Bracteae* lanceolatae, acutae, pilosae. *Calyx* pilosus, 4 — 5-partitus; laciniis subaequalibus, oblongis acutis, nervo medio percursis. *Corolla* caerulea, parva, rotata, tubo brevissimo, limbo 4 — 5-lobo; lobulis inaequalibus. Faux glabra. *Stamina* 2. *Ovarium* ovale; stylus unicus, indivisus. *Capsula* ovata, subglabra, calyce vix longior, leviter emarginata, stylo calyce 4-plo breviore terminata.

*Veronicae Stelleri* maxime affinis; sed ab illa distincta: caule semper nutante (ut ex magna speciminum copia videndum), corymbo paucifloro;

floribus triplo minoribus, corolla intus glabra, capsula subglabra (nec pilosa), calycem vix superante (nec sesqui longiore), stylo calyce multo breviore terminata.

116. *Castilleja pallida Kunth.*

*β. Unalaschcensis.* Cham. et Schlecht. l. c. p. 581. — *C. acuminata Spr.* Specimina ex insula Unalaschka exacte cum Sitchensibus conveniunt.

117. *Castilleja parviflora n. sp.*

Planta spithaminea. *Caulis* simplex, ascendens, parum angulosus, basi squamis ovatis integris incisisve, acutis, 3—4 lin. longis tectus, superne villosus, penna corvina paulo tenuior. *Folia* sparsa, sessilia, ovato-lanceolata, regulariter laciniata; laciniis saepissime utrinque tribus, oppositis, divaricatis, infimis lanceolato-acuminatis, supremis linearibus acutis; inferiora ad nervos pubescentia, suprema magis villosa, pollicem et ultra longa. *Flores* in apice caulis dense racemosi, sessiles, rubri. *Bracteae* foliis conformes, villosae. *Calyx* tubulosus, 4-fidus: lobulis linearibus. *Corolla* tubulosa, bilabiata, venis numerosis pulchre picta. Labium superius lineare, apice tricrenatum; inferius brevissimum, tridentatum; dentibus acutis. *Stylus* longitudine corollae, labio superiore inclusus, parum exsertus, filiformis. *Stigma* capitatum, subbilobulatum. *Ovarium* oblongum, glabrum. *Stamina* 4, imo tubo adnata. *Filamenta* linearia, nervo longitudinali percursa. *Antherae* sagittatae, acutae, biloculares, flavae. *Fructus* haud visus.

Valde affinis *C. coccineae*, a qua autem tam habitu quam floribus duplo minoribus differt.

118. *Romanzowia Sitchensis n. sp.* — Cham. et Schlecht. in Linn. II. p. 609. Tab. 4.

Herba spithaminea. *Radix* perennis, fibrosa; fibrillis copiosis tenuibus ramosis. *Folia* radicalia longe petiolata, subrotundo-reniformia, grosse dentata, illis R. Unalaschcensis simillima, paulo profundius tantum dentata, glabriuscula,

rarius pilis parcis pubescentia. *Petioli* glabri, rarius pilis paucis vestita, basi dilatata, 2 — 4-pollicares. *Caules* caespitosi, erecti, glabri, simplices s. dichotomi, folio uno alterove petiolato, radicalibus simili instructi. *Flores* racemosi, majusculi. *Pedicelli* alterni, simplices, uniflori, glabri, a $\frac{1}{2}$ — 1 pollicem longi, fructiferi magis elongati. *Calyx* gamosepalus, 5-partitus; laciniis lanceolatis. *Corolla* 5-fida (rarius 4-fida); laciniis obtusis; calyce triplo fere longior. *Stamina* 4, imo tubo inserta, cum lobulis corollae alternantia. *Antherae* oblongae, biloculares, flavae. *Ovarium* ovatum. *Stylus* 1, *stigmate* bilobo. *Capsula* ovata, calyce duplo fere longior, glabra, bivalvis. Placenta parietalis, in utriusque valvulae medio. *Semina* subovata, angulosa.

119. *Pedicularis verticillata L.* Stev. Monogr. p. 24. — Cham. et Schlecht. l. c. II. p. 582.

120. *Pedicularis nasuta M. B.*! Stev. l. c. p. 43. t. XV.

Specimina originalia in herb. Biebersteiniano omnino eadem.

121. *Boschniakia glabra C. A. Meyer mspt.* — Orobanche Rossica Cham. et Schlecht. l. c. III. p. 132. — Orobanche racemosa. Herb. Steph.

Planta, observante amiciss. Meyer, sui generis; ad Orobanchem capsula lateraliter dehiscente accedens; at stylo apice tubuloso, subbilabiato, margine stigmatoso terminato, placentaque in utraque valvula solitaria valde distans.

Genus in memoriam cl. *Boschniak*, botanici rossici indefessi, morte praematura abrepti, nominatum.

122. *Mimulus guttatus De Cand.* Cham. et Schlecht. II. p. 586.

## XXVI. LABIATAE.

123. *Prunella vulgaris L.* Bentham in Linnaea VI. p. 81.

## XXVII. LENTIBULARIAE.

124. ***Pinguicula vulgaris L.*** Richardson Flor. arct. in Rob. Brown verm. Schrift. edent. Nees. I. p. 470.

## XXVIII. PRIMULACEAE.

125. *Dodecatheon integrifolium Michx.* Fl. am. I. p. 123.

Duas haec planta offert formas, quarum una vegetior, pedalis v. sesquipedalis, ad littora maris crescit; altera, humilior, vix 5 pollices attingens, in alpina regione, nivi perpetuae proxima, lecta est, floribus paucis, 2—3, *semper tetrandris* distincta; ceterum priori ex toto simillima. Mera varietas videtur. Proxime accedit ad *D. frigidum Cham. et Schlecht.* cujus specimina e freto Senjawin nobis allata sunt, quae autem omnia pentandra. Sed et hanc pro specie vix agnoscere possumus.

126. *Trientalis europaea L.* Cham. et Schlecht. l. c. p. 224.

Sitchensis planta, sicut Unalaschcensis, nequaquam ab europaea diversa est.

127. *Glaux maritima L.* Nuttal. gen. of N. Amer. Il. I. p. 160.

## XXIX. PLANTAGINEAE.

128. *Plantago major L.* Nuttal. l. c. I. p. 100.

129. *Plantago macrocarpa.* Cham. et Schlecht. l. c. p. 166.

Capsula magna, non circumcissa, sed integra decidente, insignis.
Unalaschcensia specimina exacte eadem.

130. *Plantago maritima L.* Cham. et Schlecht. l. c. p. 167.

## XXX. CHENOPODIACEAE.

131. *Atriplex Gmelini Meyer mscpt.* Gmel. Fl. Sib. III. p. 72. N. 55. tab. XIV. f. 2.

A. annuum erectum viride; foliis oblongo - linearibus subintegerrimis; ca-

lycibus femineis herbaceis bipartitis ovato-rhombeis acutis integerrimis disco laevibus.

Provenit etiam in Kamtschatka et ad fretum Kotzebuci. Specimina Kamtschatica multo vegetiora.

## XXXI. POLYGONEAE.

132. *Polygonum viviparum L.* Cham. et Schlecht. l. c. III. p. 38.

133. *Polygonum buxifolium Nutt.!* P. aviculare β latifolium Michx. Fl. Bor. am. I. p. 237.

Polygono aviculari simillimum; sed floribus semper *pentandris* distinctum. Specimina Nuttalliana exacte cum Sitchensibus conveniunt.

134. *Oxyria reniformis Hook.* Cham. et Schlecht. l. c. p. 58.

Specimina Sitchensia valde vegeta; maxima inter omnia a nobis ex diversissimis regionibus borealibus visa; pedalia et sesquipedalia.

135. *Rumex domesticus Hartm.* Cham. et Schlecht. l. c. p. 59.

Valvulae integerrimae, egranulosae.

136. *Rumex salicifolius Weinm.* Cham. et Schlecht. l. c. p. 60.

A Californica planta nequaquam diversus.

## XXXII. URTICEAE.

137. *Urtica dioïca L.* — Urtica procera Mühlenberg?

Varietas potius U. dioïcae, polymorphae et apud nos plantae, quam distincta species videtur.

*Caulis* glabriusculus, pilis parcis rigidis hinc inde munitus. *Folia* opposita, ovato-acuminata, grosse serrata, basi subcordata. *Petioli* pilis rigidis crebris patentibus ciliati. *Flores* dioïci, paniculati; pedunculis subsimplicibus, petiolos vix aequantibus.

In insula Koraginsk quoque a b. Mertensio lecta est.

## XXXIII. AMENTACEAE.

138. *Myrica Gale L.* Pursh l. c. II. p. 618.

139. *Alnus viridis De Cand.* — *Betula ovata Schrank.*

Specimina Sitchensia ab Helveticis non differre videntur.

*Pedunculi* feminei ramosi; *squamae* strobilorum subcuneiformes, truncatae, nervoso-striatae, apice vix incrassatae, illis Alni viridis nostrae similes, apice paulo tantum crassiores. *Semen* margine utrinque alatum, obovatum, stylis duobus terminatum.

Kamtschatkae quoque incola.

140. *Alnus rubra n. sp.*

Foliis lato-ovalibus obtusis dentato-crenatis, dentibus crenulisve serratis, supra subglabris, subtus ad venas pilosis, in axillis nudis.

---

*Rami* teretes, juniores glaucescentes, vetustiores rubentes, lenticellis albis obsiti, glabri. *Folia* petiolata, late-ovalia, obtusa, grosse dentato-crenata; dentibus s. crenulis serratis, serraturis obtusiusculis; supra glabra, in nervis tantum pilis vestita, subtus (in sicco) subferruginea, ad nervos venasque pilosa, in axillis nuda, $2\frac{1}{2}$ pollic. longa, 2 pollic. lata. Petioli semunciam circiter longi, pubescentes, juniores pilosi. *Pedunculi* feminei ramosi, glabri; strobuli ovati.

Nomen specificum a vulgari denominatione, qua Rossi Sitcham inhabitantes, hanc alnum designant, desumptum.

141. *Salix Sitchensis n. sp.* Sanson mspt.

Amentis fructiferis breviter pedunculatis, pedunculo subfoliato; capsulis ovato-lanceolatis tomentosis pedicellatis, pedicello nectarium 2—3 superante, stylo elongato, stigmatibus bifidis (?); foliis oblongo-obovatis obsolete crenulatis, supra pubescentibus, subtus cano-tomentosis.

---

A Salicibus capraeis longius pedicellatis, nempe a *S. cinerea*, *grandifolia*, *capraea* et *livida* differt: amentis longioribus, pedicellis capsularum brevioribus, et stylo elongato; a ceteris praesertim foliis obovatis subtus cano-tomentosis.

## XXXIV. CONIFERAE.

142. *Juniperus nana Willd.*

Speciminia Sitchensia bene conveniunt cum Carinthiacis nostris; Sibirica parum recedunt: foliis densius approximatis et paulo minoribus.

*Caules* ramique semper prostrati. *Folia* terna, falcata, patentia, linearia, acuta, mucronata, pungentia, supra sulco longitudinali saepius glauco, praesertim in junioribus, subtus nervo medio valde prominulo, lin. 4 et quod excedit longa, ½ lin. lata. *Baccae* globosae, nigrae, v. glauco-pruinosae, laeves, foliis breviores.

143. *Pinus inops Ait.* Lambert. Monogr. t. 13.

Folia 1½-pollicaria. Spinae squamarum parum breviores, quam in icone Lamberti laudata.

144. *Pinus Canadensis.* Lamb. l. c. t. 12.

Folia solitaria, subdisticha, obtusa, tenuissime denticulata, subtus glauca, praeprimis juniora, basi in petiolum brevem attenuata.

Rami juniores pilosi.

145. *Pinus Mertensiana n. sp.*

Foliis (solitariis) linearibus obtusiusculis, basi in petiolum attenuatis, integerrimis; squamis coni reniformibus integris.

---

Ramosissima; rami ramulique, delapsis foliis, valde tuberculosi. *Folia* solitaria, approximata, linearia, basi in petiolum minutum attenuata, obtusiuscula, supra plana, subtus nervo medio prominulo, integerrima, 5-lin. longa, lineaque paulo angustiora. *Strobili* solitarii, sessiles, ob-

longi, obtusi, $1\frac{1}{2}$-pollicares pl. min. *Squamae* reniformes, integrae, 5 lin. et quod excedit, lata.

146. *Pinus Sitchensis s. sp.*

Foliis (solitariis) linearibus subtetragonis acuminatis mucronatis; squamis coni oblongis obtusis tenuissime denticulatis.

---

*Rami* teretes, lapsis foliis valde tuberculosi. *Folia* solitaria, linearia, nervo medio utrinque prominulo subtetragona, acuminata, mucronata, basi truncata, 7 — 8 lin. longa, linea paulo angustiora. *Strobili* aggregati, ovati vel oblongi, pollicem vel sesquipollicem longi. *Squamae* oblongae, obtusae, apice subemarginatae, undulatae s. tenuissime et irregulariter denticulatae, 5 lin. longae, 3 lin. latae. *Bracteolae* ovato-lanceolatae, acutae, squama duplo breviores.

In herbario amiciss. Fischer asservatur varietas, foliis minoribus, latioribus, paulo crassioribus minusque acuminatis; squamis evidentius emarginatis magisque denticulatis, quam in ora occidentali Amer. septent. (Sandwich-Sund) cl. Merkius legit.

147. *Thuja excelsa n. sp.*

Arbor excelsa, ramis divaricatis pendulis. *Folia* decussato-opposita (vel, si mavis, quadriafaria) imbricata, arcte adpressa, ovata, acuta, glaberrima, tota laevia, ramulos juniores omnino tegentia, quae inde subtetragoni; in vestutioribus ramulis apice distantia, basi lata amplexicaulia. *Strobilus* globosus, e squamis 4 obovatis, obtusis, medio uncinulo modo rectiusculo, modo recurvo armatis. *Nuculae* osseae, triangulares, oblongae, utrinque ala membranacea lata integra cinctae.

Differt a Th. occidentali: 1) ramis junioribus minus compressis; 2) foliis laevibus (nec tuberculato-glandulosis); 3) ala nuculae multo latiore.

## XXXV. ALISMACEAE.

148. *Potamogeton natans L.* Michx. l. c. I. p. 101.
Specimina floribus fructuque carent.

149. *Triglochin maritimum L.* Michx. l. c. p. 208.

## XXXVI. ORCHIDEAE.

150. *Listera cordata R. Br.* Cham. et Schlecht. l. c. III. p. 33.

151. *Habenaria borealis Cham.* l. c. p. 28.
   α. *albiflora Cham.* (foliis angustioribus).
   β. *viridiflora Cham.* (foliis latioribus).
Descriptio cl. Chamissonis optima.

152. *Corallorhiza Mertensiana n. sp.*
Labello ovato-oblongo obtuso subemarginato, prope basin dente incurvo utrinqne instructo; calcare libero.

---

*Radix* ramosa, flexuosa; ramulis dentibus brevibus obtusis instructis. *Scapus* erectus, vaginatus, aphyllus, glaberrimus, cum inflorescentia 8 — 11 pollices longus. *Vaginae* in scapo communiter duae, longae; ad basin scapi squamae plures vaginantes. *Spica* 4 pollices circiter longa, e floribus 20 et pluribus conformata. *Flores* rubri, 8 lin. circiter longi. *Perigonii* series exterior laciniis lanceolatis, acutis, basi attenuatis; interior series laciniis consimilibus duabus cum impari exterioris conniventibus; omnibus trinerviis, subaequalibus, 4 lin. circiter longis. *Labellum* ovato-oblongum, obtusum, subemarginatum, trinervium, prope basin dente acuto incurvo utrinque instructum, calcaratum; *calcare* libero, obtuso, dependente, germine labelloque duplo breviore. *Gynostemium* sublineare, rectum, 3 lin. longum.

## XXXVII. IRIDEAE.

153. *Sisyrinchium anceps Lam.* Roem. et Schult. syst. veget. T. I. p. 493.
Ad littora maris.

## XXXVIII. SMILACEAE.

154. *Strepthopus roseus Michx.* Fl. bor. Am. I. p. 201. t. 8!

155. *Strepthopus amplexifolius De Cand. β. americanus* Roem. et Schult. l. c. p. 311.
Vix ab europaea planta distinguendus.

156. *Smilacina Canadensis Desf.* Nuttall. l. c. I. p. 225.
Varietas potius S. bifoliae quam species distincta videtur.
Frequens quoque in regionibus trans-baïcalensibus, per omnem orientalem Asiae angulum et in Kamtschatka. In insulis, Americam inter et Asiam sitis, etiam obvia.
A S. bifolia recedit praeprimis, statura gigantea et foliis saepius tribus. Sitchensia specimina omnia hermaphrodita, tetrandra; Sibirica saepius, observante b. Pallasio, monoïca.

157. *Veratrum parviflorum Michx.* l. c. II. p. 250. — *V. Lobelianum β. Eschscholtzianum* Roem. et Schult. Syst. veg. VII. p. 1555.
Specimen Eschscholtzianum apud Roem. et Schult. l. c. descriptum, ex ipsa insula Sitcha est.

## XXXIX. LILIACEAE.

158. *Lilium Kamtschatcense L.* Lambert in Trans. of Linn. Soc. X. p. 265. t. 12. — Roem. et Schult. l. c. VII. p. 399.
Planta, quoad foliorum florumque numerum, valde varians.
Duae e Sitcha prostant formae, quarum una humilior, foliis praedita est angustioribus et plerumque quinis. Florem fert saepissime unicum, rarius

duos. Specimina floribus binis exacte cum icone cl. Lamberti laudata conveniunt.

Altera varietas vegetior, sesquipedalis, verticillos e foliis 5 ad 10 (saepissime tamen ex 5 — 6) formatos floresque racemosos offert. Racemi saepissime 4 - flori, rarius 3 — 2 - flori.

*Lilium affine Roem. et Schult.* l. c. p. 400 et *L. quadrifoliatum Meyer* in Reliq. Haenk. II. p. 126. — Roem. et Schult. l. c. p. 401. potius varietates *L. Kamtschatcensis*, quam species videntur.

## XL. JUNCACEAE.

159. *Tofielda glutinosa Pursh.* Fl. amer. sept. I. p. 246. — Smith in Trans. of Linn. Soc. XII. p. 246. t. 8. f. 2! — Presl in Reliq. Haenk. Fasc. II. p. 129.

160. *Juncus arcticus Willd.* Roem. et Schult. l. c. VII. p. 175.

161. *Juncus paradoxus Meyer.* Roem. et Schult. VII. p. 211.

Specimina ex America septentrionali a cl. Nuttallio missa, bene cum Sitchensibus congruunt.

---

162. *Juncus Mertensianus n. sp.*

Culmo erecto basi vaginato, folio uno alterove plano lineari basi vaginante; floribus capitatis, triandris, perigonii exterioris partibus carinatis subulatis interioribus paulo longioribus; capsula .....

---

Planta caepitosa, spithamaea. *Culmi* basi vaginati, applanati, striati, glabri. Vaginae membranaceae, basi laxae, aphyllae. *Folia* caulina 1 — 2, plana, linearia, acuta, glabra, striata, 1 — 2 - pollicaria, basi vaginata; vaginis laxis, margine membranaceis, striatis. *Involucrum* foliis simile. *Flores* capitati, atro - purpurei. Capitula saepissime duo.

163. *Luzula campestris Desv.* Roem. et Schult. VII. p. 268.

164. *Luzula parviflora Desv.* Roem. et Schult. l. c. p. 257.

## XLI. AROIDEAE.

165. *Symplocarpus Kamtschaticus.*

Dracontium Kamtschaticum L.

*Folia* sesquipedalia et ultra. *Spatha* radicalis. *Spadix* pedunculatus, cylindricus, 4 — 4½ pollices sine pedunculo longus. *Perigonium* simplex, 4-partitum; partitionibus obovatis, concavis, obtusis. *Stamina* 4, ante perigonii partes posita, imaeque earum basi adnata, exserta. *Filamenta* basi dilatata. *Antherae* erectae, adnatae, subcordatae, obtusae, biloculares. *Stylus* 4-angularis, exsertus. *Stigma* simplex.

Genuina Symplocarpi *Nutt.* species!

## XLII. CYPERACEAE.

166. *Carex leiocarpa Meyer* in Mém. de l'Acad. d. Sc. de St.-Pétersb., Sav. étrang. T. I. p. 14. tab. 5.

167. *Carex circinnata Meyer* l. c. p. 15. t. 6.

168. *Carex pauciflora Lightf.* Willd. sp. pl. IV. p. 211. — Schk. Car. tab. A. f. 4.

169. *Carex elongata L.* Willd. l. c. p. 240. — Schk. l. c. tab. E. fig. 25.

170. *Carex canescens L.* — C. curta Good. — Willd. l. c. p. 241. — Schk. l. c. tab. C. fig. 13.

171. *Carex stellulata Good.* Willd. l. c. p. 236. — Schk. tab. C. fig. 14.

172. *Carex Mertensii Prescott n. sp.*

Spicis 4 — 7, androgynis inferne masculis approximatis linearibus pendulis; stigmatibus 2; periginiis ovato-lanceolatis compressis membranaceis ore integerrimo, squama lanceolata latioribus longioribusque.

---

Proxima *C. atratae*, a qua differt: statura majore, 3 — 4-pedali; spicis linearibus; textura perigyniorum tenuissima, fere hyalina et ore eorum integro, nec bidentato.

173. *Carex Buxbaumii Wahlenberg.* Willd. l. c. p. 252. — Schk. tab. X. fig. 76.

174. *Carex livida Willd.* l. c. p. 284. — Schk. tab. Ssss. fig. 211.

175. *Carex cryptocarpa Meyer* l. c. p. 32. tab. 14.

176. *Carex stylosa Meyer* l. c. p. 28. tab. 12.

177. *Carex macrochaeta Meyer* l. c. p. 25. tab. 13.

178. *Carex caespitosa L.* Willd. l. c. p. 287.

Vulgatissima in arena crescens forma.

179. *Carex Sitchensis Prescott n. sp.*

Spicis masculis pluribus linearibus erectis, femineis pedunculatis, fructiferis nutantibus; stigmatibus 2; perigyniis obovatis compressis rostellatis ore integro, squama lanceolata superne attenuata involuta apice sphacelata brevioribus.

Habitus partim C. acutae, partim C. paludosae; ab omnibus affinibus differt: squamis fructus involutis, apice sphacelatis.

180. *Carex vesicaria L.* Willd. l. c. p. 309. — Schk. tab. Tt. fig. 107.

181. *Carex limosa L.* Willd. l. c. p. 293. — Schk. tab. X. fig. 78.

182. *Eriophorum vaginatum L.* Roem. et Schult. II. p. 157.

183. *Eriophorum angustifolium Roth.* Roem. et Schult. l. c. p. 158.

184. *Eriophorum triquetrum Hoppe.* Roem. et Schult. l. c. p. 157.

185. *Rynchospora alba Vahl.* Roem. et Schult. II. p. 87.

186. *Scirpus caespitosus L.* Roem. et Schult. II. p. 123.

187. *Scirpus sylvaticus L.* Roem. et Schult. II. p. 142.

## XLIII. GRAMINEAE.

188. *Phleum alpinum L.* Roem. et Schult. II. p. 379. — Tr. Diss. de Gr. uni- et sesquifl. p. 148.

Cornua, ut in planta aleutica, nuda.

*

189. *Agrostis Michauxii.* Tr. l. c. p. 206. var. b, *β.* — *Agr.* (*Trichod.*) *clavata* Tr. in Spreng. n. Entd. II. p. 55.

Spiculae quam in gramine Kamtschatico paulo majores.

190. *Agrostis exarata.* Tr. Gr. uni- et sesquifl. p. 207. — Ic. gram. III. 27.

Perianthii valvula inferior supra medium setulam emittit.

191. *Agrostis canina L.* Tr. l. c. p. 208. — *Trichodium caninum Schrad.* Roem. et Schult. II. p. 277.

Planta nostrati ex toto simillima, praeterquam quod spiculas nonnihil majores habeat. Sed in regionibus illis boreali-orientalibus et aliae Agrostidis formae inveniuntur, quae, etsi partium floralium evolutione singulae varient, tamen altera in alteram adeo transeunt, ut, quantumcunque extremae tandem a primitivo *caninae* typo recedant, nihilominus ejusdem varietates potius, quam totidem species peculiares constituere nobis videantur. In eo enim cunctae conveniunt, quod folia radicalia angustissima, plerumque pl. min. capillaria, culmea latiora, plana, callum, ut in genuina *canina*, subepilem s. obsolete barbatum, radicem denique pl. min. repentem habeant; tametsi et *Agr. canina* nostras minime raro radice mere fibrosa inveniatur. Harum varietatum Sitchensium altera, genuinae proxima, quam ob florum colorem

*α*) *aeneam* vocabimus, *caninae* quidem floris structura, h. e. perianthio glumis paulo breviori, valvula superiori subobsoleta, saepissimeque arista longa et geniculata gaudens, tamen in aliis speciminibus hac aut penitus caret, aut illius loco setulam perbrevem tantum emittit, floresque adeo magnos (genuina *canina* fere duplo majores) habet, ut eam primo intuitu cum var. *γ.* confunderes.

Alia est varietas, quae, ob glumas purpurascendo-atras et valvulas albas

*β*) *melaleuca* dici poterit. Radix huic distinctius repens quam in *α*, et *γ*. Perianthium, in aliis ejusdem speciminibus, glumis paulo brevius, in aliis easdem aequans: in *illis* valvula inferior paulo supra medium emittit

aristulam glumas vix excedentem, valvula superior autem, ut solet, minima est; in *his* valvula inferior mutica, superior adeo evoluta, ut inferiorem fere aequet. Utramque autem rem, aristam nimirum aut abbreviatam aut nullam, et in *Agr. canina* nostrate inveniri, valvulam superiorem vero etiam in *Agr. alpina, exarata* aliisque Trichodiis non raro fere in longitudinem valvulae inferioris protractam esse, plurimae observationes nos edocuerunt. Tertiam denique,

γ) *aequivalvem* dicendam, reapse, qualis pro se exstat, speciem propriam sistere quis non dixerit? Huic enim, praeterquam quod culmum cum foliis robustiorem et paniculae radios glumasque prorsus laeves habeat, perianthium est in floribus genuina *canina* fere duplo majoribus aequivalve, glumas aequans et muticum.

192. *Calamagrostis strigosa.*

C. glumis aequalibus lineari-lanceolatis acuminatis perianthio $\frac{1}{6}$ longioribus; valvula superiori inferiore $\frac{1}{3}$ breviori; pilis perianthio paulo minoribus (interdum longitudine valvulae superioris); seta infra medium (aut medio) exserta valvulam inferiorem aequante; processu barbato.

*Arundo strigosa Wahlenb.!* Roem. et Schult. p. 505.

*Obs.* Cl. Wahlenbergii figura valvulam superiorem depingit inferiore dimidio minorem pilosque ejusdem longitudinis; quod vero in specimine a cel. auctore nobiscum communicato non ita se habet. Pili enim et seta longe infra medium exserta valvulam inferiorem fere aequant. Ceterum gramen Sitchense habitu exacte convenit cum Lapponico.

193. *Calamagrostis aleutica.*

C. glumis subaequalibus lanceolatis acutis perianthium aequantibus; valvulis aequalibus; pilis perianthio $\frac{3}{4}$ et ultra brevioribus; seta pl. min. medio exserta valvula breviori; processu barbato pilis perianthio 2—3—4-plo. brevioribus.

Species distinctissima, primum nobis a cll. viris *de Chamisso* et *Eschscholtz* ex insula Unalaschka allata. *Culmus* simplex, bipedalis et ultra. *Folia*

culmea plana, interdum lineas 3 — 4 lata, fasciculorum involuta. *Panicula* spithamaea, laxiuscula, apice nutans. *Spiculae* angustae, sat longae, glumis saepe fuscescentibus.

194. *Mühlenbergia pendula.*

M. panicula laxa pendula; glumis lineari-lanceolatis acuminatis subaequalibus perianthium obtusiusculum subaequantibus.

An *Agrostis latifolia Trevir?* Göppert Beschreib. d. Bresl. bot. Gart. p. 82. — *Generis characterem cf.* in Tr. Gr. uni- et sesquifl. p. 130. — Gramen (abscissum) videtur orgyale. *Culmus* compressus, crassitie pennae anserinae. *Folia* plana, lineari-lanceolata, fere pollicem dimidium lata, pede parum breviora. *Panicula* pedalis, interrupta, radiis tenuissimis, semiverticillatis, heteromallis, pendulis, inferne nudis, superne dense floriferis. *Spiculae* angustae, sesquilineales, virides.

195. *Trisetum cernuum.* Tr. in act. Petrop. nov. ser. I. p. 61.

Bipedale, foliis planis. Paniculae spithamaeae radii subcapillares. Arista tenuissima, supra medium valvulae enata, perianthio fere triplo longior et hanc ob rem longe exserta. Ovarium barbatum (ut etiam in *Tr. alpestri* invenitur).

196. *Aira atropurpurea Wahlenb.* Roem. et Schult. II. p. 680. — Tr. in act. Petrop. nov. ser. I. p. 59.

197. *Glyceria spectabilis.* M. et K. Fl. Germ. I. p. 586. var. δ. — Tr. in act. Petrop. nov. ser. I. p. 365.

Poa arundinacea M. Bieb.!

198. *Poa annua L.* Roem. et Schult. II. p. 535. — Tr. in act. Petrop. nov. ser. I. p. 373.

Fere pedalis.

β. Panicula angustata, pauciflora. *Tr. ibid.*

199. *Poa leptocoma.* Tr. ib. p. 374. var. α.

Panicula capillari, flaccida, ligulis productioribus.

200. *Poa stenantha.* Tr. ibid. p. 376. — Et eadem vivipara.

201. *Poa flexuosa Wahlenb.* M. et K. Fl. Germ. I. p. 604.

Var. a, *α.* Tr. l. l. p. 377.

* Sesqui-bipedalis et ultra. Folia breviuscula. Panicula palmaris, pyramidato-ovata, patens l. patula tantum. Spiculae e viridi et albo variae.

** Subpedalis, foliis longioribus, panicula laxiori, spiculis paulo majoribus, e fusco et viridi variis.

202. *Poa glumaris.* Tr. l. l. p. 379. ubi vid. descript.

203. *Poa arenaria Retz.* Tr. l. l. p. 390.

Var. *β.* ***Poa festucaeformis Host.*** Pedalis, dense caespitosa, culmo ad paniculam usque folioso, foliis supremis paniculam aequantibus.

Var. *γ.* ***Poa maritima Huds.***

204. *Festuca rubra L.* Roem. et Schult. II. p. 724.

Semper nostrate magis vegeta, panicula contractiori, qualis etiam in Kamtschatka et in insulis Aleuticis occurrit.

205. *Festuca subulata.*

F. flosculis lanceolato-linearibus (angustissimis) subobsolete nervosis subulatis: subula iisdem aequilonga vel longiori; foliis omnibus planis; radice fibrosa vel subrepente.

Orgyalis. Folia sublanceolato-linearia, lineas 2—3 lata. Ligula brevis, aurita. Panicula circiter pedalis, valde laxa, flaccida et rara. Spiculae fuscescendo-virides, sub-5-florae, flosculis quadrantem lineae latis, lineas 3 longis, longe et tenui-subulatis. — *F. gigantea Vill.* (quae ceterum habitu prorsus aliena) distinguitur flosculis lanceolatis, superne pl. min. distincte nervosis.

206. *Bromus Sitchensis.*

B. panicula patula (demum patente?) nutante; spiculis 5—7-floris; flosculis lanceolatis: setis terminalibus rectis valvula paulo brevioribus; ligula oblonga, producta.

Maxime affinis *Br. pendulino Sessé.* Roem. et Schult. II. p. 644, cui et habitu simillimus (nam radii inferiores longi, in speciminibus junioribus nostris patuli tantum,

demum fortasse patentes), differt potissimum setis flosculorum longioribus, ligula magna rotundata (nec brevi, truncata, ut in *Br. pendulino*), et foliis latioribus.

207. *Elymus mollis.* Tr. in Spreng. n. Entd. II. p. 72.

E. caduceo erecto, lineari, arcto; spiculis binis 5 — 7-floris; flosculis acutis totis pubescentibus involucello toto pubescente lanceolato distincte 5-nervi sublongioribus; foliis planis.

An *El. mollis* Br. in Frankl. Journ. of the Pol. Sea No. 39.

Ab *Elymo arenario* forsan non nisi foliis planis distinctus.

208. *Elymus sibiricus L.* Roem. et Schult. II. p. 775.

Flosculi et involucella in gramine harum regionum superne ciliatuli.

209. *Hordeum secalinum Schreb.* Tr. gr. uni- et sesquifl. p. 244.

Ob folia quam in nostrate latiora, habitus quodammodo alieni, sed quoad flores exacte idem.

## XLIV. EQUISETACEAE.

210. *Equisetum boreale n. sp.*

Fronde sterili simpliciter ramosa, ramis triquetris laevibus, dentibus vaginarum acutis nigris.

---

*Caulis* erectus, angulosus, laevis, simpliciter ramosus, pedem circiter altus. *Rami* triquetri, laeves, 3 pollices circiter longi. *Vaginae* glaucescentes, dentibus adpressis acuminatis, longiusculis, nigris, margine albo-membranaceis, dorso sulco longitudinali notatis.

E. arvensi L. proximum, a quo differt: ramis triquetris (nec tetragonis), laevibus (nec scabriusculis) dentibus denique vaginarum longioribus, firmioribus, totis nigris.

Ex Aliaschka insula quoque allatum est; sed semper sterile.

## XLV. LYCOPODIACEAE

211. *Lycopodium annotinum L.* Nuttal l. c. II. p. 247. — Richardson in R. Brown op. ed. Nees. I. p. 520.

212 *Lycopodium aristatum Wild.* Hook. Enumerat. filicum p. 17. var. γ. *robustius.* — *L. clavatum* Michx. (ex Hook.)

Habitus *L. clavati*, a quo autem, observante cl. Hookero, differt: foliis angustioribus, magis distantibus et patentibus, rarius et tantum in parte inferiore caulium aetate provectorum denticulato-ciliatis; pedunculis longioribus spicisque majoribus, communiter 3, raro 2 — 4.

Bracteae spicarum ut in L. clavato.

213. *Lycopodium alpinum L.* Spreng. syst. veg. 4. p. 14.

Folia quam in Europaeis speciminibus angustiora magisque acuminata.

214. *Lycopodium Selago L.* Spreng. l. c. p. 21.

Duae prostant formae, quarum una minor, compactior, magis ad nostram europaeam plantam accedit; altera autem habitu laxiore, foliis angustioribus, capsulisque numerosis semper onusta differt.

Specimina a *Scoulero* in Observatory Inlet lecta exacte alteram hanc formam exhibent.

## XLVI. FILICES.

215. *Polypodium vulgare L. var.* Spreng. l. c. p. 52. — *P. virginianum L.*

Specimen a cl. Douglasio in ora occidentali Amer. sept. lectum et sub nomine *P. Californici* Cham. communicatum, nostram plantam exacte refert. Sed a *P. Californico* frondis laciniis acuminatis (nec obtusis) sorisque biserialibus recedit.

216. *Polypodium calcareum Smith.* Spreng. l. c. p. 60.

217. *Aspidium spinulosum Sw.* Spreng. l. c. p. 106.

218. *Aspidium dilatatum Sw.* Spreng. l. c. p. 106.

Specimina a cl. Torrey communicata Sitchensibus simillima.

219. *Aspidium vestitum Sw.* Spreng. l. c. p. 105. — *Nephrodium setigerum Presl.* in Reliq. Haenk. I. p. 37.

Specimina nostra non solum cum descriptione a cl. Presl. l. c. data exacte

conveniunt, sed et ab *A. vestito. Sw.*, cujus specimen in herb. Acad. conservatur, nullo modo recedunt.

220. *Pteris aquilina L.* Spreng. l. c. p. 78. var. *lanuginosa.*

Frons speciminum subtus lanuginosa; ceterum planta a *P. aquilina* non diversa. In Europaea planta frons etiam plus minus subtus pubescens saepius observatur, quod transitum ad lanuginosum statum evidenter demonstrat.

Specimen a cl. Douglasio in ora occidentali Amer. bor. lectum nomineque *P. lanuginosae* Kaulf. designatum, quod in herb. Prescottiano asservatur, Sitchensi plantae omnino simile.

*Pteris lanuginosa Bory* longe alia planta est.

221. *Blechnum boreale Sm.* Nuttall. l. c. p. 252.

222. *Cryptogramme acrostichoïdes R. Br.* in op. ed. Nees I. p. 549.

---

Erratum: *Ubi* spithamineus, *lege*: spithamaeus.

## *Explicatio tabularum.*

Tab. 1. Cladothamnus pyroliflorus.

1. Calyx cum pistillo. 2. Petalum. 3. Stamen. 4. Capsula aperta. 5. Eadem transverse secta. 6. Semen. — Omnia aucta.

Tab. 2. Lütkea sibbaldioïdes.

1. Flos. 2. Idem, demptis petalis. 3. Stamen. 4. Fructus. 5. Carpellum apertum. 6. Semen. 7. Idem transverse sectum. 8. Embryo. — Omnia pl. min. amplificata.

Tab. 3. Menziesia aleutica.

1. Corolla dissecta. 2. Stamen. 3. Calyx et pistillum. 4. Capsula immatura horizontaliter secta. — Omnia magnitudine aucta.

Tab. 4. Romanzowia Sitchensis.

1. Calyx cum pistillo, dempta corolla; parum auctus. 2. Corolla perscissa; magis aucta. 3. Capsula; magnitud. natural. 4. Eadem aucta. 5. Praecedens aperta. 6. Semen.

Tab. 5. Andromeda Mertensiana.

1. Folium a dorso visum. 2. Idem, a parte antica. 3. Corolla dissecta. 4. Semen. 5. Pistillum. 6. Capsula. 7. Eadem transverse secta. — Omnia amplificata.

Tab. 6. Gentiana Douglasiana.

1. Calyx dissectus. 2. Corolla perscissa. 3. Pistillum. — Singula aucta.

# DU MOUVEMENT

## DANS LA

# MACHINE D'ATWOOD

## EN AYANT ÉGARD A L'ÉLASTICITÉ DU FIL;

PAR

M. BOUNIAKOWSKY.

---

(Lu le 23 Novembre 1831.)

Nous considérons dans ce mémoire l'instrument très simple, connu sous le nom de *machine d'Atwood;* mais nous supposons que le fil qui attache les deux poids de la machine est élastique, par conséquent susceptible d'extension et de contraction. On trouve facilement les équations différentielles du mouvement; mais ces équations, en donnant toute la généralité au problème, ne sont intégrables qu'au moyen des quadratures. En supposant le fil peu extensible, on résoud ces équations par approximation, et l'on parvient à des résultats assez remarquables, que je vais exposer.

On pourrait considérer le mouvement de chaque poids comme composé de deux mouvements différents: l'un qui aurait lieu si le fil était inextensible, l'autre, entièrement dû à l'élasticité du fil. Concevons à un instant quelconque l'allongement du fil entier. En décomposant cet allongement en parties proportionnelles aux masses des deux poids, on trouvera les espaces qu'il faut ajouter aux espaces parcourus dans le cas du fil inextensible, pour avoir les véritables espaces dans le cas que nous considérons.

Le fil entier s'allonge ou se raccourcit continuellement; il revient alternativement dans son état primitif de longueur; il ne se raccourcit jamais davantage: c'est son *minimum* de longueur. L'intervalle de temps entre deux états naturels consécutifs, est double de celui de l'oscillation entière d'un pendule qui aurait pour longueur le double de l'élasticité du fil. Mais entre deux états naturels se trouve un *maximum* de l'allongement, et juste au milieu de l'intervalle de temps qui les sépare. La longueur du fil est alors égale à sa longueur primitive, plus le double de son élasticité.

Tels sont les résultats de l'analyse appliquée à la machine d'Atwood. Je pense que par leur simplicité ils méritent quelque attention. Au reste, je considère, dans ce mémoire, un cas plus général que celui que présente la machine d'Atwood. J'ai supposé, qu'au lieu de se mouvoir verticalement, les poids glissaient sur deux plans différemment inclinés sur l'horison.

Soient, à l'instant quelconque $t$, $m'$ et $m$ les positions de deux corps pesants sur deux plans inclinés, $AC$ et $BC$ (fig. 1.); supposons $mC = x$, $m'C = x'$, $mC + m'C = x + x' = r$; l'angle $ABC = \vartheta$ et $BAC = \vartheta'$. Représentons par $m$ la masse du corps $m$, par $m'$ celle du corps $m'$, et désignons par $\varphi(r)$ la force élastique tendant à raccourcir le fil $r$; de plus, soit $g$ la gravité.

La force $gm$ sin. $\vartheta$ sollicitera le corps $m$ vers $B$, la force $\varphi(r)$ le sollicitera vers $C$; donc

$$m \frac{d^2x}{dt^2} = gm \sin. \vartheta - \varphi(r);$$

l'on aura de la même manière :

$$m' \frac{d^2x'}{dt^2} = gm' \sin. \vartheta' - \varphi(r);$$

la différence de ces équations donne

$$\frac{d^2(mx - m'x')}{dt^2} = g(m \sin. \vartheta - m' \sin. \vartheta'),$$

de là, en supposant que les corps partent du repos

$$\frac{d(mx - m'x')}{dt} = (m \sin. \vartheta - m' \sin. \vartheta')\, gt$$

et

$$mx - m'x' = (m \sin.\vartheta - m' \sin.\vartheta')\frac{gt^2}{2} + mx_0 - m'x'_0$$

$x_0$ et $x'_0$ étant les valeurs de $x$ et de $x'$ quand $t = o$.

Cette valeur de $mx - m'x'$ est la même que si le fil n'était pas élastique; ensorte que l'élasticité du fil n'influe pas sur la valeur de $mx - m'x'$. Si l'on désigne par $X$ la valeur de $x$ dans le cas du fil non élastique, par $X'$ celle de $x'$ dans le même cas, on aura

$$mx - m'x' = mX - m'X'.$$

Soit $x = X + y$ et $x' = X' + y'$; nous aurons:

$$my - m'y' = o;$$

ensorte que la force élastique du fil fait parcourir aux corps des espaces qui sont en raison directe des masses; ce qui doit être, en vertu de la loi fondamentale de la mécanique, celle des vîtesses en raison directes des forces et en raison inverse des masses. On trouvera facilement:

$$X = x_0 + \frac{m \sin.\vartheta - m' \sin.\vartheta'}{2(m+m')} gt^2$$

$$X' = x'_0 - \frac{m \sin.\vartheta - m' \sin.\vartheta'}{2(m+m')} gt^2.$$

Reste à trouver les petites quantités $y$ et $y'$, lesquelles doivent déjà satisfaire à l'équation

$$my = m'y'.$$

Pour cela, j'ajoute ensemble les équations

$$\frac{d^2x}{dt^2} = g \sin.\vartheta - \frac{\varphi(r)}{m}$$

$$\frac{d^2x'}{dt^2} = g \sin.\vartheta' - \frac{\varphi(r)}{m'}$$

ce qui donne

$$\frac{d^2r}{dt^2} = (\sin.\vartheta + \sin.\vartheta')\, g - \frac{m+m}{mm'} \cdot \varphi(r).$$

Désignons par $l$ la longueur du fil élastique dans son état naturel, savoir, avant qu'il eût subi une extension quelconque; on aura $\varphi(l) = o$. Supposons que l'on

fixe le fil par l'une de ses extrémités, et que l'on attache un poids $gM$ à l'autre. Désignant par $\alpha$ l'allongement du fil, l'on aura

$$\varphi\,(l+\alpha)=gM.$$

On pourra donc supposer généralement

$$\varphi(r)=gM,$$

mais la masse $M$ sera variable.

Désignons par $r_0$ la valeur de $r$ qui répond à une masse

$$M=\frac{(\sin.\vartheta+\sin.\vartheta')\,mm'}{m+m'},$$

nous aurons

$$\varphi(r_0)=\frac{g\,(\sin.\vartheta+\sin.\vartheta')\,mm'}{m+m'}.$$

Supposons actuellement $r=r_0+\varepsilon z$, et considérons $\varepsilon$ comme une petite quantité; on trouvera, en négligeant $\varepsilon^2$

$$\varphi(r)=\varphi(r_0)+\varphi'(r_0)\,\varepsilon z,$$

ce qui donnera

$$\frac{d^2z}{dt^2}+\frac{m+m'}{mm'}\,\varphi'(r_0)\,z=o.$$

Le fil étant très peu extensible, $r_0$ différera peu de $l$; donc, on aura à peu près

$$o=\varphi(l)=\varphi\,[r_0-(r_0-l)]=\varphi(r_0)-\varphi'(r_0)\,(r_0-l),$$

et par conséquent

$$\varphi'(r_0)=\frac{\varphi(r_0)}{r_0-l}=\frac{g\,(\sin.\vartheta+\sin.\vartheta')\,mm'}{(m+m')\,(r_0-l)}$$

ce qui réduit l'équation différentielle en $z$ à la suivante:

$$\frac{d^2z}{dt^2}+\frac{g\,(\sin.\vartheta+\sin.\vartheta')}{r_0-l}\cdot z=o.$$

Désignons par $\varrho$ le petit allongement $r_0-l$ dû au poids de la masse $\frac{(\sin.\vartheta+\sin.\vartheta')mm'}{m+m'}$; l'équation précédente deviendra

$$\frac{d^2z}{dt^2}+\frac{g\,(\sin.\vartheta+\sin.\vartheta')}{\varrho}\cdot z=o$$

de là, en supposant pour abrégér:

$$n^2=\frac{g\,(\sin.\vartheta+\sin.\vartheta')}{\varrho}$$

on aura pour l'intégrale de l'équation précédente

$$z = A \cos. nt + B \sin. nt,$$

donc

$$r = r_0 + A \cos. nt + B \sin. nt,$$

où l'on a mis $A$ et $B$ respectivement pour $\varepsilon A$ et $\varepsilon B$. On trouve :

$$\frac{dr}{dt} = - nA \sin. nt + nB \cos. nt$$

En faisant $t = o$, et en observant que $\frac{dr}{dt}$ est nul dans ce cas, on trouve $B = o$. Donc

$$r = r_0 + A \cos. nt.$$

Quand $t$ est nul, $r$ est dans son état naturel; par conséquent

$$l = r_0 + A,$$

de là

$$A = - (r_0 - l) = - \varrho.$$

Donc

$$r = r_0 - \varrho \cos. nt,$$

ou bien

$$r = l + \varrho (1 - \cos. nt),$$

ou bien encore

$$r = l + 2\varrho \sin.^2 \frac{nt}{2}.$$

Le fil aura la plus grande longueur quand $\sin. \frac{nt}{2} = \pm 1$; quant à la plus petite, qui ne sera jamais moindre que la longueur primitive $l$, elle aura lieu lorsque $\sin. \frac{nt}{2} = o$. Les racines de la première équation sont comprises dans la formule

$$\frac{nt}{2} = (2i + 1) \frac{\pi}{2},$$

$i$ étant un nombre entier; celles de la seconde, seront déterminées par la formule

$$\frac{nt}{2} = i\pi.$$

Donc on aura pour les instants des maximas de longueur

$$t = \frac{(2i + 1) \pi}{n}$$

et pour ceux des minima

$$t = \frac{2i\pi}{n}.$$

De là on voit que le fil aura sa longueur primitive au bout des temps

$$\frac{2\pi}{n}, \quad 2 \cdot \frac{2\pi}{n}, \quad 3 \cdot \frac{2\pi}{n} \cdots\cdots i \cdot \frac{2\pi}{n},$$

qu'il parviendra à son maximum de longueur au bout des temps

$$\frac{\pi}{n}, \quad 3\frac{\pi}{n}, \quad 5 \cdot \frac{\pi}{n}, \cdots\cdots (2i+1) \cdot \frac{\pi}{n},$$

ensorte que, pour passer du maximum au minimum prochain, ou du minimum au maximum prochain, il faut un temps $\frac{\pi}{n}$, et un temps $\frac{2\pi}{n}$ entre deux maxima ou deux minima consécutifs.

Tous les temps précédents sont proportionnels à la racine carrée de $\varrho$, qui mesure l'extension du fil. On pourrait donc aussi mesurer l'extensibilité du fil, en connaissant le temps qui s'écoule, soit entre deux maxima ou minima consécutifs, soit entre un maximum et un minimum, ou un minimum et un maximum consécutifs. On trouvera que l'allongement $\varrho$ du fil est proportionnel au carré de ce temps.

Pour passer au cas que presente la machine d'Atwood, il suffit de supposer

$$\vartheta = \vartheta' = \frac{\pi}{2}.$$

On aura

$$n = \sqrt{\left(\frac{2g}{\varrho}\right)}$$

par conséquent le temps qui s'écoule entre un maximum et le minimum consécutif, ou bien, entre un minimum et le maximum consécutif est exprimé par

$$\pi \sqrt{\left(\frac{2\varrho}{g}\right)},$$

et le temps qui s'écoule entre deux maxima ou deux minima, est le double du temps précédent, savoir

$$2\pi \sqrt{\left(\frac{2\varrho}{g}\right)},$$

ensorte que l'allongement ou raccourcissement entier du fil, se fait dans un temps égal à celui de l'oscillation d'un pendule, dont la longueur est double de l'allongement du fil.

Il est facile de trouver les valeurs de $x$ et $x'$ d'après les équations:

$$mx - m'x' = mx_0 - m'x'_0 + (m \sin. \vartheta - m' \sin. \vartheta') \frac{gt^2}{2},$$

$$x + x' = x_0 + x'_0 + 2\varrho \sin.^2 \frac{nt}{2}.$$

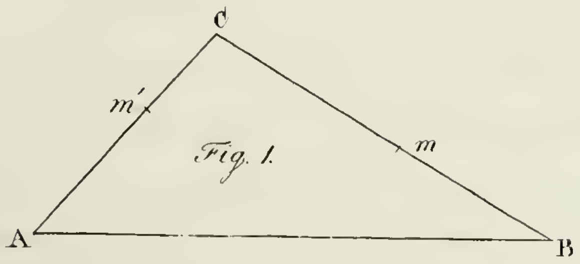
En résolvant ces équations, on trouvera:

$$x = x_0 + \frac{m \sin. \vartheta - m' \sin. \vartheta'}{m + m'} \cdot \frac{gt^2}{2} + \frac{2m}{m+m'} \cdot \varrho \cdot \sin.^2 \frac{nt}{2}$$

$$x' = x'_0 - \frac{m \sin. \vartheta - m' \sin. \vartheta'}{m + m'} \cdot \frac{gt^2}{2} + \frac{2m'}{m+m'} \cdot \varrho \cdot \sin.^2 \frac{nt}{2}.$$

D'où l'on voit que les allongements des lignes $x_0$ et $x'_0$ sont effectivement en raison directe des masses $m$ et $m'$, ce qui déjà a été dit plus haut.

Si le fil était inextensible, et qu'on eut: $m \sin. \vartheta - m' \sin. \vartheta' = o$, le système serait en équilibre; mais le fil étant élastique, le mouvement aurait lieu dans le système à cause des allongements et raccourcissements continuels du fil. Ils suivront la loi que nous avons exposée plus haut; il ne restera qu'à partager l'allongement de $r$ en parties proportionnelles à $m$ et $m'$ pour avoir les allongements de $x$ et $x'$.



# FOETUS HUMANI MONSTROSI,

## ALII BENE FORMATO FOETUI ADNATI DESCRIPTIO.

EXHIBUIT

P. ZAGORSKY.

(Lu le 1 Juin 1831.)

Sisto nunc portentuosi monstri descriptionem, quam die 20 Octobris anni elapsi Conventui annunciavi, sed huc usque elaborare et presentare non potui, impeditus gravi affectione visus, quae ab eo inde tempore per totam hyemem omnem mihi occupationem interdixerat, et adhuc nonnisi parum et aegre occupari permittit. Sub finem tamen hyemis, auxiliante medicina, tantum levaminis in morbo obtinui, ut, cum veris adventu, me sensim interruptis occupationibus applicare inceperim; et hoc tempore, annotationes meas circa singulares monstri abnormitates tam externas, quam per sectionem detectas et delineatas, in hac commentatione descriptas, in ordinem redigere potuerim.

### Monstri historia.

Rustica faemina in Cassimoviensi districtu gubernii Riasanensis, in vico Iberdus nominato, die 17 Martii anni 1827, enixa est prolem monstrosam, compositam ex duobus, sibi invicem coalitis foetibus, quorum alter est puella, ad normam naturae in omnibus punctis constituta, praeter haud insignem tegumentorum communium et exiguae portionis musculorum rectorum abdominis, in medio regionis umbilicalis et hypogastricae defectum, et inde ortum in hoc loco tumorem. Alter, puel-

lae anterius adnatus foetus, est prodigilialiter abnormis, acephalus, collo orbus, trunco parum et male evoluto, artubus vitiosis, absque ano et sexus distinctione.

Clarissimus collega noster Dr. Hamel, qui eo tempore per gubernium Riasanense, propter commissa sibi a Magistratu negotia, iter faciebat et in districtu Cassimoviensi commorabatur, informatus de prodigiosi subjecti partu, delineationem ejus procurare, ipsumque subjectum, vita defunctum comparare studuit, quod post finitam in gubernio illo commissionem, Petropolin redux, secum adportavit, et Academiae nostrae ad Musaei ejus collectionem monstrorum locupletandam, tam rarum specimen dono obtulit, adnexa simulter relatione, subjectum hoc, post natum sacro baptismate confirmatum, per dies 12 vixisse et jam 29 die ejusdem mensis obiisse.

## Lustratio externa.

Monstrosa proles haec nondum plenam maturitatis assecuta est periodum; id, praeter brevitatem capillorum, mollitiem cartilaginum nasi et auricularum teneritatemque unguiculorum puellae, probatur etiam minore, quam quae maturo infanti convenit, corporis ejus mole: longitudo enim puellae, quamvis bene formatae et non male nutritae, ut ex plenitudine et rotunditate trunci et artuum concludere licet, non excedit 17 pollices: pondus vero totius subjecti, puellae nimirum et ipsi adnati foetus abnormis, qui illa minor est et macer, tantum ad libras IV et uncias VIII exagii pharmaceutici ascendit. Unde supponi potest, prolem monstrosam attigisse septimum et dimidium vel octavum circiter gestationis mensem. Immaturum partum, praeter signa supra allata, demonstrat quoque membrana pupillaris, quae adhuc integra est et pupillam perfecte claudit.

Partes externae puellae omnes nullatenus a statu normali discrepant, si excipias tantum tegumentorum defectum, cujus mentio supra facta est, et tumorem in medio regionis umbilicalis et hypogastricae, paulo dexterius. Tumor erat sat prominens, rotundus, tangenti digito non facile cedens, spatium circulare pollicum duorum cum dimidio in ambitu suo occupans, pellicula tenui, fusca constans vel potius obtectus. Sine ulteriore examine apparuit sub contemplatione, pelliculam illam esse peritonaeum,

a liquoris in quo subjectum servatur actione, et aëris atmospherici sub delineatione subjecti, adtactu, siccum et fuscum redditum: tumorem autem provenisse a protrusione puellae hepatis, quod, deficiente in hoc loco cute, peritonaeum pondere suo distendit, tumoremque illum, ut saepius in casu talis defectus observatum est, produxit. Producendo tumori inservisse etiam videntur foetus abnormis intestina, quae, ut post sectionem innotuit, in fossa, convexae superficiei hepatis puellae insculpta, situm habebant et hepar deorsum urgebant.

Pectori et epigastrio puellae adsidet abnormis foetus, anteriore sua parte illi accretus, cujus enormes monstrositates, superius generaliter memoratae, nunc speciatim recensentur. 1) Artus superiores, qui tertia circiter parte minores sunt illis artubus puellae, super armos hujus et circa collum ad dorsum ejus protensi, quasi amplecti illam videntur, et manus extremae, quarum dextra cum antibrachio extrorsum versa est, quaternos tantum digitos habent; pollex uterque deest, et auricularis digitus sinister ultima phalange caret. 2) Extremitates inferiores in coxendicum et genuum juncturis adeo flexae sunt, ut pes dexter calce, sinister margine interno plantae suae, quae inversa est, ad nates ipsius foetus abnormis, genua autem ad partem anteriorem brachiorum puellae spectent et adcumbent. Sinistra extremitas est paulo minor socia sua; et ambae extremitates inferiores, in longitudine et volumine, eadem ratione cedunt superioribus, ac de his dictum est. Omnes hae partes macrae et exiles sunt, quod, procul dubio, minus sufficienti nutritioni foetus acephali tribui debet. 3) Scapulae, marginibus suis posterioribus inter se coalitae cernuntur, et ex hac coalitione provenit linea eminens, quae sursum in apicem rotundo-acuminatum terminatur, deorsum autem confluit cum simili ossium innominatorum mutua inter se coalitione, ut post separationem foetus abnormis a puella constitit. Pars inferior lineae absconditur sub plica insigni cutis, quae a postica regione pelvis forma semicirculi elevatur. 4) Constitit etiam per sectionem, nullos foetui spondylos adesse et os sacrum deficere; et ex hac ratione desideratur specus vertebralis, ossa innominata posteriore sua parte, qua in normali statu ossi sacro jungi solent, inter se, simili modo ac homoplatae, coaluerunt, et inde podex nullam in medio fossam, quae

illum in nates devidere deberet, nullumque vestigium ani habet, sed non interruptam rotunditatem et aequalem superficiem sistit. 5) In parte etiam anteriore foetus acephali regio tantum hypogastrica evoluta est, quae tamen, ante sectionem, non facile, et nisi dimota inferne a puella et elevata foetus inferiore parte, conspici poluerat. 6) Ad symphysin pubis loco partium genitalium cernebantur tria tubercula, inaequalia, verrucarum similia, quorum duo lateralia multo minora medio erant.

## ANATOMIA.

Post externam utriusque foetus lustrationem, ad sectionem monstri et disquisitionem organorum internorum accessimus; proposuimusque nobis in hac re ita procedere, ut et organa rite perspici, et forma externa, propter raritatem subjecti, quantum possibile erit, conservari possent.

Hunc in finem, detractis prius a puella extremitatibus superioribus foetus abnormis et inferiore illius extremitate dextra dimota, facta erat, a latere sinistra puellae, tegumentorum communium sectio, in illa thoracis et abdominis ejus parte, ubi sternum cum costis unitur, et ubi foetus abnormis puellae accretus videbatur. Post haec, sterno puellae cum cartilaginibus ab utroque latere rescisso et ad latus dextrum reclinato, simulque dextra inferiore extremitate foetus abnormis reclinata, sic ut nunc pars ejus anterior inferior, scilicet regio hypogastrii et pubis, sterni autem interna superficies et cavitates trunci puellae apertae, in conspectum venerint, apparuit: 1) Omnia viscera puellae tam pectoris, quam abdominis esse in statu et situ naturali, excepto hepate solo, quod, normali longe brevius, sed latius, magis versus anteriora et inferiora extendebatur et formam irregularem habebat. 2) Superior hepatis superficies erat inaequalis, per sulcos non profundos in plures, majores, minores eminentias divisa; et praeterea haec superficies duas notabiles excavationes habebat, alteram, ad latus sinistrum, oblongam, profundam, in quam vena umbilicalis sese immittebat, alteram, in media sui parte et non procul margine anteriore, non tam profundam, sed sat amplam, in qua convolutiones tubi intestinalis foetus abnormis, non puellae, situm occupabant. His convolutionibus hepar pressum magis descen-

dere urgebatur, et nullam in loco, ubi deficiunt integumenta, resistentiam inveniens produxit illum, qui supra descriptus est, tumorem. 3) In umbilicali et hypogastrica foetus abnormis regione, quae cum cavo abdominis puellae communicabat, vel potius commune cavum constituebat, visus est ventriculus foetus cum portione oesophagi, abrupta quasi et extremo conico, coeco terminata. Visa est et pars canalis intestinalis, quae partim in his cavis, partim in cavo puellae super hepate ejus convolvebantur. Directio situs ventriculi inversa erat, nam fundus ejus sursum et dextrorsum, pylorus autem, a quo duodenum incipiens sub et pone illum tendebat, deorsum et sinistrorsum spectabant. Praeterea 4) in extremo dextro ventriculi, ante pylorum, animadvertebatur externe sulcus s. strictura circularis, interne autem prominentia similis, quae speciem diverticuli, cum cavo ventriculi et duodeni communicantis, constituebat. Ventriculus juxta curvaturam sui majorem, pylorus et initium duodeni longitudinaliter secta erant, ad cavum eorum visendum. 5) Palam se visui stiterant regio pubis foetus et ipsi adsidentia tria tubercula, quorum mentio superius facta, et quorum basis erat tenuis et lata. Medium et majus tuberculum, penem, lateralia scrotum mentiebantur: re autem ipsa erant nihil aliud, quam productio cutis, intus cava et in tres sacculos divisa. In delineatione dextrum tantum tuberculum et medium sistuntur, sinistrum vero pone ventriculi extremum dextrum, quod hic est inferius, latere supponitur. 6) Amoto et elevato ventriculo, conspiciebatur cavitas supra et intra pelvim; in cavo superiori et ampliori, ut supra indicatum, ventriculus et tubi intestinalis pars superior situm occupabant, in inferiori autem, angustiori, praeter massam deformem, fibroso-cellulosam, quae hoc cavum implebat, nil magis dignoscere licuit. Denique 7) prosequendo foetus abnormis canalem intestinalem, ab initio ejus, invenimus illum non continuum, nec juxta normam partitum, sed ruptum in duas peculiares partes, quarum superior, in proprio foetus cavo sita, post factas ad initium suum a pyloro convolutiones, terminabatur fine coeco in cavo abdominis puellae, inferior autem in fossa hepatis puellae collocata, incipiebat hic extremo coeco superiore, et factis in fossa convolutionibus desinebat alio extremo inferiore, itidem coeco, sursum directo, conico et libero. —

Dolendum est, quod momenta, quae gestationem comitabantur et partum monstri praecedebant, nobis ignota sunt; nec constant circumstantiae speciales, quo ad aetatem et conditionem in organisatione patris et matris monstri, eandemque rationem eorum ab utraque parte consanguineorum; num scilicet exstat vel antea extiterat aliqua in familiis monstrositas, num monstrosa haec proles primigena, an jam ex conjugio parentum ejus alii, iique ad naturalem normam vel contra eam formati, ipsis sunt prognati, numque foetus abnormis exseruit vel non exseruit motum? Tales, si adessent, circumstantiae, ad educendam probabilem saltem tantae monstrositatis rationem facere, et physiologiae aliquid luminis adferre possent.

Omnes recensitae abnormitates, ut melius concipi possint, expressae sunt in adnexis descriptioni tabulis, quarum explicatio sequitur.

---

## TABULARUM EXPLICATIO.

### T a b u l a I.

Repraesentat puellam, octavo circiter graviditatis mense natam, cui in medio regionis umbilicalis et hypogastricae tegumenta communia deficiunt, et inde ab hepate protruso ortus est tumor, solo peritonaeo tectus.

Praeterea puellae adnatus est alter foetus, abnormis, acephalus et atrachelus, visui inspicientis tergo obversus.

1. 1. 1. 1. Spatium circulare in abdomine puellae, quod limites deficientis cutis et tumoris circumscribit.

2. Pars intestinorum, situm occupans in fossa, convexae hepatis superficiei insculpta, et per foramen, in peritonaeo incisum, gyris suis apparens.

3. In dorso foetus acephali linea longitudinalis eminens, paulo sinisterius ex coalitione marginum posteriorum scapularum orta.

4. Eadem linea in apicem rotundo-acuminatum desinens.

5. 5. Artus superiores in articulationibus cubitorum super armos puellae ad dorsum ejus flexi.

6. 6. Inferiores extremitates nimis inflexae; crus sinistrum brevius et plantam inversam habet.

7. Podex absque ulla in medio sui fossa et orificio ani.

8. Notabilis cutis plica, quae sursum prominentiam facit semicircularem et partem inferiorem coalitionis scapularum velat.

### Tabula II.

Sistit corporis puellae partem superiorem a tergo, et in hoc artuum superiorum foetus abnormis a cubitis protensionem.

Antibrachium et manus extrema dextri lateris, margine interno extra versa sunt. Pollex utrique manui deest, et digitus auricularis manus sinistrae ultima phalange caret.

### Tabula III.

Ostendit cavitates puellae pectoris et abdominis, simulque exhibet trunci foetus abnormis partem anteriorem inferiorem, quae, per reclinationem dextrae inferioris extremitatis ipsius et sterni puellae ad latus hujus dextrum, in conspectum prodit.

1. Sternum puellae cum cartilaginibus, a costis utriusque lateris rescissum et reclinatum, ut superficies ejus interna et quae in cavitatibus continentur, conspici queant.

2. 2. 2. 2. Costae.

3. Atrium dextrum cordis.

4. Ventriculus ejus dexter.

5. Diaphragma.

6. Pericardii resecti portio.

7. Pulmo dexter.

8. Hepar puellae formae irregularis, in varias eminentias per sulcos divisum.

9. Pars dextra et inferior spatii tegumentorum deficientium, solo peritonaeo, quod hepati adhaesit et nigrum evasit, tecti.

10. 10. Intestina tenuïa puellae.

11. Portio parietis abdominis puellae, quae cum foetu abnormi dextrorsum reclinata est.
12. Arcus arteriae aortae.
13. 13. Arteriae mammariae internae.
14. 14. Venae ejusdem nominis.
15. Vena umbilicalis.
16. Glandula thymus.
17. Ventriculus foetus abnormis, in longitudinem discissus.
18. Diverticulum ejus.
19. 19. 19. Pars tenuis intestinorum foetus abnormis.
20. 20. Pars crassa intestinorum ejusdem.
21. 21. Extremum partis tenuis oblongum, coecum, et initium partis crassae, itidem coecum et obtusum.
22. Finis partis crassae, pari modo coecus.
23 et 24. Tubercula cutanea ad regionem pubis.
25. 25. Artus superiores foetus abnormis.
26. Ejus genu sinistrum.

DU

# DÉVELOPPEMENT D'UNE FONCTION DONNÉE

## SUIVANT LES PUISSANCES D'AUTRES FONCTIONS DONNÉES;

PAR

M. COLLINS.

### PREMIÈRE PARTIE.

(Lu le 5 Octobre 1831.)

### I. *Propositions préliminaires concernant la différentiation de produits et de puissances de fonctions.*

**Problème i.** Trouver la différentielle du $m^{\text{ième}}$ ordre de la fonction $Fx = (x-a)^p fx$, $p$ désignant un nombre entier et positif.

*Solution.* L'équation $Fx = (x-a)^p fx$ devant être identique, on aura également:

$$F(x+h) = (x-a+h)^p f(x+h)$$

et en y appliquant le théorème de Taylor et celui du binome:

$$S\left[\frac{F^{\alpha}x}{\mathfrak{a}!}h^{\mathfrak{a}}\right] = S\left[p_{\mathfrak{b}}(x-a)^{p-\mathfrak{b}}\frac{f^{\delta}x}{\mathfrak{d}!}h^{\mathfrak{b}+\mathfrak{d}}\right]$$

Mais puisque, en vertu de l'identité des deux membres de cette équation, les coëfficiens affectant les mêmes puissances de la quantité $h$ doivent être égaux entr'eux, on obtiendra en faisant $\mathfrak{a} = \mathfrak{b} + \mathfrak{d} = m$:

$$\frac{F^{\mu}x}{m!} = S\left[p_{\mathfrak{b}}(x-a)^{p-\mathfrak{b}}\frac{f^{\delta}x}{\mathfrak{d}!}\right]$$
$$\mathfrak{b} + \mathfrak{d} = m$$

c'est-à-dire:

$$\frac{F^{\mu}x}{m!} = p_m\,(x-a)^{p-m}\,fx + p_{m-1}(x-a)^{p-m+1}\,\frac{f'x}{1} + p_{m-2}(x-a)^{p-m+2}\times$$
$$\frac{f''x}{1\cdot 2} + \cdots\cdots\cdots + p_0\,(x-a)^p\,\frac{f^{\mu}x}{m!}.$$

*Corollaire.* Pour le cas où $x$ serait supposé être $=a$, il ne faudrait garder dans le second membre de l'équation trouvée ci-dessus que le terme qui naît de la supposition $p-\mathfrak{b}=o$ ou $\mathfrak{b}=p$, et l'on aurait alors:

$$\frac{F^{\mu}a}{m!} = \frac{f^{\mu-\pi}a}{(m-p)!}.$$

PROBLÈME 2. Trouver la différentielle de l'ordre $m$ de la fonction $Fx=(fx)^n$, $n$ désignant un nombre entier et positif.

*Solution.* Le théor. de Taylor et celui du polynome donnant:

$$S\left[\frac{F^{\alpha}x}{\mathfrak{a}!}\,h^{\mathfrak{a}}\right] = \left(S\left[\frac{f^{\beta}x}{\mathfrak{b}!}\,h^{\mathfrak{b}}\right]\right)^n =$$

$$S\left[\frac{n!}{\mathfrak{c}!\,\overset{1}{\mathfrak{c}}!\,\overset{2}{\mathfrak{c}}!\cdots}(fx)^{\mathfrak{c}}\left(\frac{f'x}{1!}\right)^{\overset{1}{\mathfrak{c}}}\left(\frac{f''x}{2!}\right)^{\overset{2}{\mathfrak{c}}}\cdots\cdots h^{\mathfrak{b}}\right]$$

$$\overset{1}{\mathfrak{c}} + 2\overset{2}{\mathfrak{c}} + 3\overset{3}{\mathfrak{c}} + \cdots\cdots = \mathfrak{d}$$

$$\mathfrak{c} + \overset{1}{\mathfrak{c}} + \overset{2}{\mathfrak{c}} + \overset{3}{\mathfrak{c}} + \cdots\cdots = n$$

on en tirera, en faisant $\mathfrak{a}=\mathfrak{d}=m$:

$$\frac{F^{\mu}x}{m!} = S\left[\frac{n!}{\mathfrak{c}!\,\overset{1}{\mathfrak{c}}!\,\overset{2}{\mathfrak{c}}!\cdots\cdots}\,(fx)^{\mathfrak{c}}\left(\frac{f'x}{1!}\right)^{\overset{1}{\mathfrak{c}}}\left(\frac{f''x}{2!}\right)^{\overset{2}{\mathfrak{c}}}\cdots\cdots\right]$$

$$\overset{1}{\mathfrak{c}} + 2\overset{2}{\mathfrak{c}} + 3\overset{3}{\mathfrak{c}} + \cdots\cdots = m$$

$$\overset{1}{\mathfrak{c}} + \overset{2}{\mathfrak{c}} + \overset{3}{\mathfrak{c}} + \cdots\cdots = n-\mathfrak{c}$$

*Corollaire.* En désignant par $r$ une racine de l'équation $fx=o$, de sorte qu'il soit $fr=o$ l'on aura pour $x=r$:

$$\frac{F^{\mu}r}{m!} = S\left[\frac{n!}{\overset{1}{\mathfrak{c}}!\,\overset{2}{\mathfrak{c}}!\cdots\cdots}\left(\frac{f'r}{1!}\right)^{\overset{1}{\mathfrak{c}}}\left(\frac{f''r}{2!}\right)^{\overset{2}{\mathfrak{c}}}\cdots\cdots\right]$$

$$\overset{1}{\mathfrak{c}} + 2\overset{2}{\mathfrak{c}} + 3\overset{3}{\mathfrak{c}} + \cdots\cdots = m$$

$$\overset{1}{\mathfrak{c}} + \overset{2}{\mathfrak{c}} + \overset{3}{\mathfrak{c}} + \cdots\cdots = n.$$

PROBLÈME 3. Trouver la différentielle de l'ordre $m$ de la fonction $Fx = (\varphi x)^{-n} fx$, $n$ désignant un nombre entier et positif.

*Solution.* Les théorèmes allégués donnent ici :

$$S\left[\frac{F^{\mathfrak{a}}x}{\mathfrak{a}!}h^{\mathfrak{a}}\right] = S\left[(-n)_{\mathfrak{b}}\frac{\mathfrak{b}!}{\overset{2}{\mathfrak{a}}!\,\overset{3}{\mathfrak{a}}!\cdots\cdots}(\varphi x)^{-n-\mathfrak{b}}\left(\frac{\varphi' x}{1!}\right)^{\overset{2}{\mathfrak{a}}}\left(\frac{\varphi'' x}{2!}\right)^{\overset{3}{\mathfrak{a}}}\cdots\cdots \times \frac{f^{\delta}x}{\mathfrak{d}!} \times h^{\mathfrak{b}+\mathfrak{e}}\right]$$

$$\overset{2}{\mathfrak{a}} + 2\overset{3}{\mathfrak{a}} + \cdots\cdots = \mathfrak{e}$$

$$\overset{2}{\mathfrak{a}} + \overset{3}{\mathfrak{a}} + \cdots\cdots = \mathfrak{b}$$

ce qui, en prenant $\mathfrak{a} = \mathfrak{d} + \mathfrak{e} = m$, fournit :

$$\frac{F^{\mu}x}{m!} = S\left[(-n)_{\mathfrak{b}}\frac{\mathfrak{b}!}{\overset{2}{\mathfrak{a}}!\,\overset{3}{\mathfrak{a}}!\cdots\cdots}(\varphi x)^{-n-\mathfrak{b}}\left(\frac{\varphi' x}{1!}\right)^{\overset{2}{\mathfrak{a}}}\left(\frac{\varphi'' x}{2!}\right)^{\overset{3}{\mathfrak{a}}}\cdots\cdots \times \frac{f^{\delta}x}{\mathfrak{d}!}\right]$$

$$\overset{2}{\mathfrak{a}} + 2\overset{3}{\mathfrak{a}} + \cdots\cdots = \mathfrak{e}$$

$$\overset{2}{\mathfrak{a}} + \overset{3}{\mathfrak{a}} + \cdots\cdots = \mathfrak{b}$$

$$\mathfrak{d} + \mathfrak{e} = m.$$

Mais comme la plus grande valeur qu'on puisse donner à $\mathfrak{e}$ est $m$, et que $\mathfrak{b}$ ne peut jamais excéder $\mathfrak{e}$, il sera permis de faire $\mathfrak{b} = m - \overset{1}{\mathfrak{a}}$. Observant en outre que

$$(-n)_{\mathfrak{b}} = (-1)^{\mathfrak{b}}(n + \mathfrak{b} - 1)_{\mathfrak{b}}$$

$$\text{et } (n + \mathfrak{b} - 1)_{\mathfrak{b}}\,\mathfrak{b}! = \frac{(n + \mathfrak{b} - 1)!}{(n-1)!}$$

la formule que nous venons d'établir prendra la forme suivante :

$$\frac{F^{\mu}x}{m!} = \frac{1}{(\varphi x)^{m+n}} S\left[(-1)^{m-\overset{1}{\mathfrak{a}}}\frac{(m+n-\overset{1}{\mathfrak{a}}-1)!}{(n-1)!\,\overset{2}{\mathfrak{a}}!\,\overset{3}{\mathfrak{a}}!\cdots\cdots}(\varphi x)^{\overset{1}{\mathfrak{a}}}\left(\frac{\varphi' x}{1!}\right)^{\overset{2}{\mathfrak{a}}}\cdots\cdots \times \frac{f^{\mu-\varepsilon}x}{(m-n)!}\right]$$

$$\overset{1}{\mathfrak{a}} + 2\overset{2}{\mathfrak{a}} + 3\overset{3}{\mathfrak{a}} + \cdots\cdots = m + \mathfrak{e}$$

$$\overset{1}{\mathfrak{a}} + \overset{2}{\mathfrak{a}} + \overset{3}{\mathfrak{a}} + \cdots\cdots = m$$

Or il est évident que la plus grande valeur qu'on puisse assigner à $\overset{2}{\mathfrak{a}}$ dans ces deux équations de condition est $\mathfrak{c}$; donc la plus petite valeur que peut y prendre $\overset{1}{\mathfrak{a}}$ sera $m-\mathfrak{c}$. En conséquence $\overset{1}{\mathfrak{a}}$ pourra y être remplacé par $\overset{1}{\mathfrak{a}}+m-\mathfrak{c}$, et l'on obtiendra:

$$\frac{F^{\mu}x}{m!} = S\left[(-1)^{\mathfrak{c}-\overset{1}{\mathfrak{a}}}\,\frac{(n+\mathfrak{c}-\overset{1}{\mathfrak{a}}-1)!}{(n-1)!\,\overset{2}{\mathfrak{a}}!\,\overset{3}{\mathfrak{a}}!\cdots\cdots(\varphi x)^{n+\mathfrak{c}}}\,(\varphi x)^{\overset{1}{\mathfrak{a}}}\left(\frac{\varphi' x}{1!}\right)^{\overset{2}{\mathfrak{a}}}\left(\frac{\varphi'' x}{2!}\right)^{\overset{3}{\mathfrak{a}}}\cdots\cdots\times\frac{f^{\mu-\mathfrak{c}}x}{(m-\mathfrak{c})!}\right]$$

$$\overset{1}{\mathfrak{a}}+2\overset{2}{\mathfrak{a}}+3\overset{3}{\mathfrak{a}}+\cdots\cdots=2\mathfrak{c}$$

$$\overset{1}{\mathfrak{a}}+\overset{2}{\mathfrak{a}}+\overset{3}{\mathfrak{a}}+\cdots\cdots=\mathfrak{c}$$

$$\mathfrak{c}+\mathfrak{b}=m$$

PROBLÈME 4. Trouver la différentielle du $m^{\text{ième}}$ ordre, par rapport à $x$, et du $n^{\text{ième}}$ ordre, par rapport à $y$, de la fonction: $F(x,y)=(\varphi x)^p\,(\psi y)^q$, $p$ et $q$ désignant des nombres entiers et positifs.

*Solution.* On a par les théorèmes de Taylor et du polynome:

$$S\left[\frac{d^{\mathfrak{a},\mathfrak{b}}\,F(x,y)}{\mathfrak{a}!\,\mathfrak{b}!\,dx^{\mathfrak{a}}dy^{\mathfrak{b}}}\,h^{\mathfrak{a}}\,k^{\mathfrak{b}}\right]$$

$$=S\left[\frac{p!}{\mathfrak{c}!\,\overset{1}{\mathfrak{c}}!\,\overset{2}{\mathfrak{c}}!\cdots\cdots}\,(\varphi x)^{\mathfrak{c}}\left(\frac{\varphi' x}{1!}\right)^{\overset{1}{\mathfrak{c}}}\left(\frac{\varphi'' x}{2!}\right)^{\overset{2}{\mathfrak{c}}}\cdots\cdots\times\frac{q!}{\mathfrak{d}!\,\overset{1}{\mathfrak{d}}!\,\overset{2}{\mathfrak{d}}!\cdots}\,(\psi y)^{\mathfrak{d}}\left(\frac{\psi' y}{1!}\right)^{\overset{1}{\mathfrak{d}}}\left(\frac{\psi'' y}{2!}\right)^{\overset{2}{\mathfrak{d}}}\cdots\times h^{\mathfrak{p}}k^{\mathfrak{q}}\right]$$

$$\overset{1}{\mathfrak{c}}+2\overset{2}{\mathfrak{c}}+3\overset{3}{\mathfrak{c}}+\cdots\cdots=\mathfrak{p}$$

$$\mathfrak{c}+\overset{1}{\mathfrak{c}}+\overset{2}{\mathfrak{c}}+\overset{3}{\mathfrak{c}}+\cdots\cdots=p$$

$$\overset{1}{\mathfrak{d}}+2\overset{2}{\mathfrak{d}}+3\overset{3}{\mathfrak{d}}+\cdots\cdots=\mathfrak{q}$$

$$\mathfrak{d}+\overset{1}{\mathfrak{d}}+\overset{2}{\mathfrak{d}}+\overset{3}{\mathfrak{d}}+\cdots\cdots=q$$

donc pour $\mathfrak{a}=\mathfrak{p}=m$ et $\mathfrak{b}=\mathfrak{q}=n$:

$$\frac{d^{m,n}F(x,y)}{m!\,n!\,dx^m dy^n}=S\left[\frac{p!}{\mathfrak{c}!\,\overset{1}{\mathfrak{c}}!\,\overset{2}{\mathfrak{c}}!\cdots}\,(\varphi x)^{\mathfrak{c}}\left(\frac{\varphi' x}{1!}\right)^{\overset{1}{\mathfrak{c}}}\left(\frac{\varphi'' x}{2!}\right)^{\overset{2}{\mathfrak{c}}}\cdots\times\frac{q!}{\mathfrak{d}!\,\overset{1}{\mathfrak{d}}!\,\overset{2}{\mathfrak{d}}!\cdots}\,(\psi y)^{\mathfrak{d}}\left(\frac{\psi' y}{1!}\right)^{\overset{1}{\mathfrak{d}}}\left(\frac{\psi'' y}{2!}\right)^{\overset{2}{\mathfrak{d}}}\cdots\right]$$

$$\overset{1}{\mathfrak{c}}+2\overset{2}{\mathfrak{c}}+3\overset{3}{\mathfrak{c}}+\cdots\cdots=m$$

$$\overset{1}{\mathfrak{c}}+\overset{2}{\mathfrak{c}}+\overset{3}{\mathfrak{c}}+\cdots\cdots=p-\mathfrak{c}$$

$$\overset{1}{\mathfrak{d}}+2\overset{2}{\mathfrak{d}}+3\overset{3}{\mathfrak{d}}+\cdots\cdots=n$$

$$\overset{1}{\mathfrak{d}}+\overset{2}{\mathfrak{d}}+\overset{3}{\mathfrak{d}}+\cdots\cdots=q-\mathfrak{d}$$

*Corollaire.* En désignant par $r$ une racine de l'équation $\varphi x=o$, et par $s$ une racine de l'équation $\psi y=o$, de sorte qu'en faisant $x=r$ et $y=s$ on ait $\varphi r=o$ et $\psi s=o$, l'équation que nous venons de trouver prendra cette forme particulière:

$$\frac{d^{m,n}F(r,s)}{m!\,n!\,dr^m\,ds^n}\;S\left[\frac{p!}{\overset{1}{\mathfrak{c}}!\,\overset{2}{\mathfrak{c}}!\cdots}\left(\frac{\varphi' r}{1!}\right)^{\overset{1}{\mathfrak{c}}}\left(\frac{\varphi'' r}{2!}\right)^{\overset{2}{\mathfrak{c}}}\cdots\cdots\times\frac{q!}{\overset{1}{\mathfrak{d}}!\,\overset{2}{\mathfrak{d}}!\cdots}\left(\frac{\psi' s}{1!}\right)^{\overset{1}{\mathfrak{d}}}\left(\frac{\psi'' s}{2!}\right)^{\overset{2}{\mathfrak{d}}}\cdots\cdots\right]$$

$$\overset{1}{\mathfrak{c}}+2\overset{2}{\mathfrak{c}}+3\overset{3}{\mathfrak{c}}+\cdots\cdots=m$$

$$\overset{1}{\mathfrak{c}}+\overset{2}{\mathfrak{c}}+\overset{3}{\mathfrak{c}}+\cdots\cdots=p$$

$$\overset{1}{\mathfrak{d}}+2\overset{2}{\mathfrak{d}}+3\overset{3}{\mathfrak{d}}+\cdots\cdots=n$$

$$\overset{1}{\mathfrak{d}}+\overset{2}{\mathfrak{d}}+\overset{3}{\mathfrak{d}}+\cdots\cdots=q$$

Problème 5. Trouver la différentielle de l'ordre $m$ par rapport à $x$ et de l'ordre $n$ par rapport à $y$, de la fonction $F(x,y)=(\varphi x)^{-p}(\psi y)^{-q}f(x,y)$, $p$ et $q$ désignant des nombres entiers et positifs.

*Solution.* Les théorèmes employés dans les problèmes précédens donnant pour le cas actuel:

$$S\left[\frac{d^{\mathfrak{a},\mathfrak{b}}F(x,y)}{\mathfrak{a}!\,\mathfrak{b}!\,dx^{\mathfrak{a}}\,dy^{\mathfrak{b}}}\,h^{\mathfrak{a}}\,k^{\mathfrak{b}}\right]=$$

$$S\left[(-p)_{\mathfrak{c}}\frac{\mathfrak{c}!}{\overset{2}{\mathfrak{a}}!\,\overset{3}{\mathfrak{a}}!\cdots}(\varphi x)^{-p-\mathfrak{c}}\left(\frac{\varphi' x}{1!}\right)^{\overset{2}{\mathfrak{a}}}\left(\frac{\varphi'' x}{2!}\right)^{\overset{3}{\mathfrak{a}}}\cdots\times(-q)_{\mathfrak{d}}\frac{\mathfrak{d}!}{\overset{2}{\mathfrak{b}}!\,\overset{3}{\mathfrak{b}}!\cdots}(\psi y)^{-q-\mathfrak{d}}\left(\frac{\psi' y}{1!}\right)^{\overset{2}{\mathfrak{b}}}\left(\frac{\psi'' y}{2!}\right)^{\overset{3}{\mathfrak{b}}}\cdots\times\right.$$

$$\left.\frac{d^{\mathfrak{p},\mathfrak{q}}f(x,y)}{\mathfrak{p}!\,\mathfrak{q}!\,dx^{\mathfrak{p}}\,dy^{\mathfrak{q}}}\,h^{\mathfrak{m}+\mathfrak{p}}\,k^{\mathfrak{n}+\mathfrak{q}}\right]$$

$$\overset{2}{\mathfrak{a}}+2\overset{3}{\mathfrak{a}}+\cdots\cdots=\mathfrak{m}$$

$$\overset{2}{\mathfrak{a}}+\overset{3}{\mathfrak{a}}+\cdots\cdots=\mathfrak{c}$$

$$\overset{2}{\mathfrak{b}}+2\overset{3}{\mathfrak{b}}+\cdots\cdots=\mathfrak{n}$$

$$\overset{2}{\mathfrak{b}}+\overset{3}{\mathfrak{b}}+\cdots\cdots=\mathfrak{d}$$

on en tirera, par des suppositions et des réductions semblables à celles du $3^{\text{ième}}$ problème:

$$\frac{d^{m,\,n}\,F(x,y)}{m!\;n!\;dx^m\,dy^n} = \frac{1}{(\varphi x)^{m+p}\,(\psi y)^{n+q}} \times$$

$$S\left[(-1)^{m-\overset{1}{\mathfrak{a}}+n-\overset{1}{\mathfrak{b}}}\frac{(m+p-\overset{1}{\mathfrak{a}}-1)!}{(p-1)!\,\overset{2}{\mathfrak{a}}!\,\overset{3}{\mathfrak{a}}!\cdots}(\varphi x)^{\overset{1}{\mathfrak{a}}}\left(\frac{\varphi' x}{1!}\right)^{\overset{2}{\mathfrak{a}}}\left(\frac{\varphi'' x}{2!}\right)^{\overset{3}{\mathfrak{a}}}\cdots\times\frac{(n+q-\overset{1}{\mathfrak{b}}-1)!}{(q-1)!\,\overset{2}{\mathfrak{b}}!\,\overset{3}{\mathfrak{b}}!\cdots}(\psi y)^{\overset{1}{\mathfrak{b}}}\left(\frac{\psi' y}{1!}\right)^{\overset{2}{\mathfrak{b}}}\left(\frac{\psi'' y}{2!}\right)^{\overset{3}{\mathfrak{b}}}\cdots\right.$$

$$\left.\times\frac{d^{m-\mathfrak{m},\,n-\mathfrak{n}}\,f(x,y)}{(m-\mathfrak{m})!\,(n-\mathfrak{n})!\,dx^{m-\mathfrak{m}}\,dy^{n-\mathfrak{n}}}\right]$$

$$\overset{1}{\mathfrak{a}} + 2\overset{2}{\mathfrak{a}} + 3\overset{3}{\mathfrak{a}} + \cdots\cdots = m + \mathfrak{m}$$

$$\overset{1}{\mathfrak{a}} + \overset{2}{\mathfrak{a}} + \overset{3}{\mathfrak{a}} + \cdots\cdots = m$$

$$\overset{1}{\mathfrak{b}} + 2\overset{2}{\mathfrak{b}} + 3\overset{3}{\mathfrak{b}} + \cdots\cdots = n + \mathfrak{n}$$

$$\overset{1}{\mathfrak{b}} + \overset{2}{\mathfrak{b}} + \overset{3}{\mathfrak{b}} + \cdots\cdots = n$$

Les plus petites valeurs qu'on puisse donner aux variables combinatoires $\overset{1}{\mathfrak{a}}$ et $\overset{1}{\mathfrak{b}}$ étant, respectivement, $m-\mathfrak{m}$ et $n-\mathfrak{n}$, si dans l'aggrégat du second membre on remplace $\overset{1}{\mathfrak{a}}$ par $\overset{1}{\mathfrak{a}}+m-\mathfrak{m}$ et $\overset{1}{\mathfrak{b}}$ par $\overset{1}{\mathfrak{b}}+n-\mathfrak{n}$, on aura:

$$\frac{d^{m,\,n}\,F(x,y)}{m!\;n!\;dx^m\,dy^n} = S\left[(-1)^{\mathfrak{m}-\overset{1}{\mathfrak{a}}+\mathfrak{n}-\overset{1}{\mathfrak{b}}}\frac{(p+\mathfrak{m}-\overset{1}{\mathfrak{a}}-1)!}{(p-1)!\,\overset{2}{\mathfrak{a}}!\,\overset{3}{\mathfrak{a}}!\cdots(\varphi x)^{p+\mathfrak{m}}}(\varphi x)^{\overset{1}{\mathfrak{a}}}\left(\frac{\varphi' x}{1!}\right)^{\overset{2}{\mathfrak{a}}}\left(\frac{\varphi'' x}{2!}\right)^{\overset{3}{\mathfrak{a}}}\cdots\times\right.$$

$$\left.\frac{(q+\mathfrak{n}-\overset{1}{\mathfrak{b}}-1)!}{(q-1)!\,\overset{2}{\mathfrak{b}}!\,\overset{3}{\mathfrak{b}}!\cdots(\psi y)^{q+\mathfrak{n}}}(\psi y)^{\overset{1}{\mathfrak{b}}}\left(\frac{\psi' y}{1!}\right)^{\overset{2}{\mathfrak{b}}}\left(\frac{\psi'' y}{2!}\right)^{\overset{3}{\mathfrak{b}}}\cdots\cdots\times\frac{d^{m-\mathfrak{m},\,n-\mathfrak{n}}\,f(x,y)}{(m-\mathfrak{m})!\,(n-\mathfrak{n})!\,dx^{m-\mathfrak{m}}\,dy^{n-\mathfrak{n}}}\right]$$

$$\overset{1}{\mathfrak{a}} + 2\overset{2}{\mathfrak{a}} + 3\overset{3}{\mathfrak{a}} + \cdots\cdots = 2\mathfrak{m}$$

$$\overset{1}{\mathfrak{a}} + \overset{2}{\mathfrak{a}} + \overset{3}{\mathfrak{a}} + \cdots\cdots = \mathfrak{m}$$

$$\overset{1}{\mathfrak{b}} + 2\overset{2}{\mathfrak{b}} + 3\overset{3}{\mathfrak{b}} + \cdots\cdots = 2\mathfrak{n}$$

$$\overset{1}{\mathfrak{b}} + \overset{2}{\mathfrak{b}} + \overset{3}{\mathfrak{b}} + \cdots\cdots = \mathfrak{n}$$

$$\mathfrak{m} + \mathfrak{c} = m$$

$$\mathfrak{n} + \mathfrak{d} = n$$

*Remarque.* Relativement aux formes, sous lesquelles nous avons, dans les solutions précédentes, présenté le théorème de Taylor, pour une et pour deux va-

riables, et ceux du binome et du polynome, pour des exposans entiers positifs ou négatifs, on pourra consulter l'excellent ouvrage de Mr. *Ohm: Versuch eines vollkommen consequenten Systems der Mathematik. Zweiter Theil; (zweite Ausgabe, Berlin* 1829) pp. 81, 86, 124, 174, 305 et 438.

---

## II. *Développement d'une fonction donnée à une variable suivant les puissances d'une autre fonction donnée de la même variable.*

Soit $Fx$ une fonction donnée qu'il s'agit de développer en une série suivant les puissances, à exposans entiers et positifs, d'une autre fonction également donnée, $fx$, de sorte qu'en désignant par $A$, $\overset{1}{A}$, $\overset{2}{A}$, $\overset{3}{A}$, etc. certaines quantités indépendantes de la variable $x$, on ait:

$$Fx = A + \overset{1}{A}\cdot fx + \overset{2}{A}\,(fx)^2 + \overset{3}{A}\,(fx)^3 + \cdots\cdots$$

ou bien, en supposant $\overset{0}{A} = A$:

$$Fx = S\,[\overset{\mathfrak{a}}{A}\,(fx)^{\mathfrak{a}}] \qquad \text{(a)}$$

Le développement proposé exigeant la détermination des coëfficiens $\overset{\mathfrak{a}}{A}$, supposons que, pour $x = r$, on ait $fr = o$, ce qui nous fournira d'abord:

$$A = Fr \qquad \text{(b)}$$

Puis, différentiant l'équation (a) à l'aide de la proposition (I. probl. 2.), on trouvera:

$$\frac{F^{\mu}x}{m!} = S\left[\overset{\mathfrak{a}}{A}\cdot\frac{\mathfrak{a}\,!}{\mathfrak{b}!\,\overset{1}{\mathfrak{b}}!\,\overset{2}{\mathfrak{b}}!\cdots\cdots}(fx)^{\mathfrak{b}}\left(\frac{f'x}{1!}\right)^{\overset{1}{\mathfrak{b}}}\left(\frac{f''x}{2!}\right)^{\overset{2}{\mathfrak{b}}}\cdots\cdots\right]$$

$$\overset{1}{\mathfrak{b}} + 2\overset{2}{\mathfrak{b}} + 3\overset{3}{\mathfrak{b}} + \cdots\cdots = m$$

$$\overset{1}{\mathfrak{b}} + \overset{2}{\mathfrak{b}} + \overset{3}{\mathfrak{b}} + \cdots\cdots = \mathfrak{a} - \mathfrak{b}$$

d'où, comme dans le corollaire du probl. cité, l'on tirera:

$$\frac{F^{\mu}r}{m!} = S\left[\overset{\mathfrak{a}}{A}\,\frac{\mathfrak{a}!}{\overset{1}{\mathfrak{b}}!\,\overset{2}{\mathfrak{b}}!\cdots\cdots}\left(\frac{f'r}{1!}\right)^{\overset{1}{\mathfrak{b}}}\left(\frac{f''r}{2!}\right)^{\overset{2}{\mathfrak{b}}}\cdots\cdots\right]$$

$$\overset{1}{\mathfrak{b}} + 2\overset{2}{\mathfrak{b}} + 3\overset{3}{\mathfrak{b}} + \cdots\cdots = m$$

$$\overset{1}{\mathfrak{b}} + \overset{2}{\mathfrak{b}} + \overset{3}{\mathfrak{b}} + \cdots\cdots = \mathfrak{a}$$

et, en détachant du second membre le terme résultant de la supposition $\mathfrak{a} = m$:

$$\frac{F^{\mu}r}{m!} = \overset{m}{A}(f'r)^{m} + S\left[\overset{\mathfrak{a}}{A}\,\frac{\mathfrak{a}!}{\overset{1}{\mathfrak{b}}!\,\overset{2}{\mathfrak{b}}!\cdots\cdots}(f'r)^{\overset{1}{\mathfrak{b}}}\left(\frac{f''r}{1!}\right)^{\overset{2}{\mathfrak{b}}}\cdots\cdots\right]$$

$$\overset{1}{\mathfrak{b}} + 2\overset{2}{\mathfrak{b}} + \cdots\cdots = m$$

$$\overset{1}{\mathfrak{b}} + \overset{2}{\mathfrak{b}} + \cdots\cdots = \mathfrak{a}$$

$$\mathfrak{a} + \mathfrak{b} = m - 1$$

ce qui donne:

$$\overset{m}{A} = \frac{F^{\mu}r}{m!\,(f'r)^{m}} - \frac{1}{(f'r)^{m}}\,S\left[\overset{\mathfrak{a}}{A}\,\frac{\mathfrak{a}!}{\overset{1}{\mathfrak{b}}!\,\overset{2}{\mathfrak{b}}!\cdots\cdots}(f'r)^{\overset{1}{\mathfrak{b}}}\left(\frac{f''r}{2!}\right)^{\overset{2}{\mathfrak{b}}}\cdots\cdots\right] \qquad (c)$$

$$\overset{1}{\mathfrak{b}} + 2\overset{2}{\mathfrak{b}} + \cdots\cdots = m$$

$$\overset{1}{\mathfrak{b}} + \overset{2}{\mathfrak{b}} + \cdots\cdots = \mathfrak{a}$$

$$\mathfrak{a} + \mathfrak{b} = m - 1$$

Cette formule rendant la détermination d'un coëfficient quelconque, $\overset{m}{A}$, dépendante de celle de tous les coëfficiens antérieurs, $\overset{m-1}{A}$, $\overset{m-2}{A}$, $\cdots\cdots \overset{1}{A}$, $\overset{0}{A}$, nous allons, afin d'éliminer successivement ces derniers, avoir recours à la méthode employée, pour un pareil but, dans nos recherches sur *le retour des suites* (p. 42. de ce volume). A cet effet nous ferons les suivantes suppositions:

$$S^{m}_{\mathfrak{a}} = \frac{1}{(f'r)^{m}}\,S\left[\frac{\mathfrak{a}!}{\overset{1}{\mathfrak{b}}!\,\overset{2}{\mathfrak{b}}!\cdots\cdots}(f'r)^{\overset{1}{\mathfrak{b}}}\left(\frac{f''r}{2!}\right)^{\overset{2}{\mathfrak{b}}}\cdots\cdots\right] \qquad (d)$$

$$\overset{1}{\mathfrak{b}} + 2\overset{2}{\mathfrak{b}} + \cdots\cdots = m$$

$$\overset{1}{\mathfrak{b}} + \overset{2}{\mathfrak{b}} + \cdots\cdots = \mathfrak{a}$$

et partant: $S^{m}_{m} = 1$; de plus:

$$\overset{m}{S}_{m-1}\ \overset{m-1}{S}_{\mathfrak{a}} - \overset{m}{S}_{\mathfrak{a}} = \overset{1}{S}{}^{m}_{\mathfrak{a}}$$

$$\overset{1}{S}{}^{m}_{m-2}\ \overset{m-2}{S}_{\mathfrak{a}} - \overset{1}{S}{}^{m}_{\mathfrak{a}} = \overset{2}{S}{}^{m}_{\mathfrak{a}}$$

$$\overset{2}{S}{}^{m}_{m-3}\ \overset{m-3}{S}_{\mathfrak{a}} - \overset{2}{S}{}^{m}_{\mathfrak{a}} = \overset{3}{S}{}^{m}_{\mathfrak{a}}$$

etc.

et généralement: $$\overset{n}{S}{}^{m}_{m-n-1}\ \overset{m-n-1}{S}_{\mathfrak{a}} - \overset{n}{S}{}^{m}_{\mathfrak{a}} = \overset{n+1}{S}{}^{m}_{\mathfrak{a}} \qquad (c)$$

Alors des substitutions successives nous fourniront les relations suivantes:

$$\overset{m}{A} = \frac{F^{\mu}r}{m!\,(f'r)^m} - \underset{\mathfrak{a}+\mathfrak{b}=m-1}{S}\left[\overset{m}{S}_{\mathfrak{a}}\ \overset{\mathfrak{a}}{A}\right]$$

$$= \frac{F^{\mu}r}{m!\,(f'r)^m} - \frac{F^{\mu-1}r}{(m-1)!\,(f'r)^{m-1}}\overset{m}{S}_{m-1} + \underset{\mathfrak{a}+\mathfrak{b}=m-2}{S}\left[\overset{1}{S}{}^{m}_{\mathfrak{a}}\ \overset{\mathfrak{a}}{A}\right]$$

$$= \frac{F^{\mu}r}{m!\,(f'r)^m} - \frac{F^{\mu-1}r}{(m-1)!\,(f'r)^{m-1}}\overset{m}{S}_{m-1} + \frac{F^{\mu-2}r}{(m-2)!\,(f'r)^{m-2}}\overset{1}{S}{}^{m}_{m-2} - \underset{\mathfrak{a}+\mathfrak{b}=m-3}{S}\left[\overset{2}{S}{}^{m}_{\mathfrak{a}}\ \overset{\mathfrak{a}}{A}\right]$$

$$= \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$= \frac{F^{\mu}r}{m!\,(f'r)^m} - \frac{F^{\mu-1}r}{(m-1)!\,(f'r)^{m-1}}\overset{m}{S}_{m-1} + \frac{F^{\mu-2}r}{(m-2)!\,(f'r)^{m-2}}\overset{1}{S}{}^{m}_{m-2} -$$

$$\frac{F^{\mu-3}r}{(m-1)!\,(f'r)^{m-3}}\overset{2}{S}{}^{m}_{m-3} + \cdots\cdots + (-1)^{p+1}\frac{F^{\mu-\pi-1}r}{(m-p-1)!\,(f'r)^{m-p-1}}\overset{p}{S}{}^{m}_{m-p-1}$$

$$+ (-1)^p \underset{\mathfrak{a}+\mathfrak{b}=m-p-2}{S}\left[\overset{p+1}{S}{}^{m}_{\mathfrak{a}}\ \overset{\mathfrak{a}}{A}\right]$$

donc, en prenant $p = m-2$, ce qui rend $\underset{\mathfrak{a}+\mathfrak{b}=0}{S}\left[\overset{m-1}{S}{}^{m}_{\mathfrak{a}}\ \overset{\mathfrak{a}}{A}\right] = \overset{m-1}{S}{}^{m}_{0}\ A = 0$, on aura:

$$\overset{m}{A} = \frac{F^{\mu}r}{m!\,(f'r)^m} = \frac{F^{\mu-1}r}{(m-1)!\,(f'r)^{m-1}}\overset{m}{S}_{m-1} + \frac{F^{\mu-2}}{(m-2)!\,(f'r)^{m-2}}\overset{m}{S}_{m-2} - \cdots\cdots$$

$$+ (-1)^{m-1}\frac{F'r}{1!\,(f'r)^1}\overset{m-2}{S}{}^{m}_{1}$$

$$= \frac{F^{\mu} r}{m!\,(f'r)^m} - \underset{\mathfrak{a}+\mathfrak{b}=m-2}{S}\left[(-1)^{\mathfrak{a}} \frac{F^{\mu-\mathfrak{a}-1} r}{(m-\mathfrak{a}-1)!\,(f'r)^{m-\mathfrak{a}-1}}\, \overset{\mathfrak{a}}{S}{}^{m}_{m-\mathfrak{a}-1}\right]$$

ou bien, s'il est permis de supposer $\overset{-1}{S}{}^{m}_{m} = 1$:

$$\overset{m}{A} = \underset{\mathfrak{a}+\mathfrak{b}=m-1}{S}\left[(-1)^{\mathfrak{a}} \frac{F^{\mu-\mathfrak{a}} r}{(m-\mathfrak{a})!\,(f'r)^{m-\mathfrak{a}}}\, \overset{\mathfrak{a}-1}{S}{}^{m}_{m-\mathfrak{a}}\right] \qquad \text{(f)}$$

Or nous avons démontré (p. 62.) que:

$$\overset{\mathfrak{a}-1}{S}{}^{m}_{m-\mathfrak{a}} = \frac{(m-\mathfrak{a})!\,(m+\mathfrak{a}-2)!}{m!\,(f'r)^{m+\mathfrak{a}-1}}\, S\left[\frac{(-1)^{\overset{1}{\mathfrak{a}}}(m-\mathfrak{a}+1+\mathfrak{b})\dfrac{\overset{1}{\mathfrak{c}}_{\overset{1}{\mathfrak{a}}}}{(m+\mathfrak{a}-2)_{\overset{1}{\mathfrak{a}}}}\,\overset{2}{\mathfrak{c}}_{\overset{2}{\mathfrak{a}}}\,\overset{3}{\mathfrak{c}}_{\overset{3}{\mathfrak{a}}}\cdots}{\overset{1}{\mathfrak{c}}!\;\overset{2}{\mathfrak{c}}!\;\overset{3}{\mathfrak{c}}!\cdots\cdots}\left(\frac{f'r}{1!}\right)^{\overset{1}{\mathfrak{c}}}\left(\frac{f''r}{2!}\right)^{\overset{2}{\mathfrak{c}}}\cdots\right]$$

$$\overset{1}{\mathfrak{c}} + 2\overset{2}{\mathfrak{c}} + 3\overset{3}{\mathfrak{c}} + \cdots\cdots = m + \mathfrak{a} - 1$$
$$\overset{1}{\mathfrak{c}} + \overset{2}{\mathfrak{c}} + \overset{3}{\mathfrak{c}} + \cdots\cdots = m - 1$$
$$\overset{1}{\mathfrak{a}} + 2\overset{2}{\mathfrak{a}} + 3\overset{3}{\mathfrak{a}} + \cdots\cdots = 2\mathfrak{a} - 2 - \mathfrak{b}$$
$$\overset{1}{\mathfrak{a}} + \overset{2}{\mathfrak{a}} + \overset{3}{\mathfrak{a}} + \cdots\cdots = \mathfrak{a} - 1$$

formule qu'on pourra, pour la rendre comparable à celle de la proposition VI. du mémoire sur le retour des suites (p. 37), mettre sous cette forme:

$$\overset{\mathfrak{a}-1}{S}{}^{m}_{m-\mathfrak{a}} = \frac{(m-\mathfrak{a})!\,(m+\mathfrak{a}-2)!}{m!\,(f'r)^{m+\mathfrak{a}-1}} \times$$

$$S\left[\frac{(-1)^{\overset{1}{\mathfrak{a}}}(m-(\mathfrak{a}-\mathfrak{b}-1))\,\dfrac{[m-(m-1-\overset{1}{\mathfrak{c}})-1]_{\overset{1}{\mathfrak{a}}}}{[m+(m-1-\overset{1}{\mathfrak{c}})+(\mathfrak{a}+\overset{1}{\mathfrak{c}}-m+1)-2]_{\overset{1}{\mathfrak{a}}}}\,\overset{2}{\mathfrak{c}}_{\overset{2}{\mathfrak{a}}}\,\overset{3}{\mathfrak{c}}_{\overset{3}{\mathfrak{a}}}\cdots}{\overset{1}{\mathfrak{c}}!\;\overset{2}{\mathfrak{c}}!\;\overset{3}{\mathfrak{c}}!\cdots\cdots}\left(\frac{f'r}{1!}\right)^{\overset{1}{\mathfrak{c}}}\left(\frac{f''r}{2!}\right)^{\overset{2}{\mathfrak{c}}}\cdots\right]$$

$$\overset{2}{\mathfrak{c}} + 2\overset{3}{\mathfrak{c}} + 3\overset{4}{\mathfrak{c}} + \cdots\cdots = (m-1-\overset{1}{\mathfrak{c}}) + (\mathfrak{a}+\overset{1}{\mathfrak{c}}-m+1)$$
$$\overset{2}{\mathfrak{c}} + \overset{3}{\mathfrak{c}} + \overset{4}{\mathfrak{c}} + \cdots\cdots = m - 1 - \overset{1}{\mathfrak{c}}$$
$$\overset{2}{\mathfrak{a}} + 2\overset{3}{\mathfrak{a}} + 3\overset{4}{\mathfrak{a}} + \cdots\cdots = \mathfrak{a} - \mathfrak{b} - 1$$
$$\overset{2}{\mathfrak{a}} + \overset{3}{\mathfrak{a}} + \overset{4}{\mathfrak{a}} + \cdots\cdots = (m-1-\overset{1}{\mathfrak{c}}) + (\mathfrak{a}+\overset{1}{\mathfrak{c}}-m+1) - 1 - \overset{1}{\mathfrak{a}}$$

et puisqu'ici:

$$(\overset{1}{c}-\overset{1}{a})+2(\overset{2}{c}-\overset{2}{a})+3(\overset{3}{c}-\overset{3}{a})+\cdots\cdots=m-a+b+1$$

$$(\overset{1}{c}-\overset{1}{a})+(\overset{2}{c}-\overset{2}{a})+(\overset{3}{c}-\overset{3}{a})+\cdots\cdots=m-a$$

il est évident que $\overset{1}{c}-\overset{1}{a}$ ne peut point devenir $=m-a$, mais qu'il faut que $\overset{1}{c}-\overset{1}{a}$ soit $\leqq m-a-1$, donc aussi $\overset{1}{a}\geqq a+\overset{1}{c}-m+1$; et comme de plus, par suite de la $4^{me}$ équation de condition, $\overset{1}{a}\leqq a-1$, les limites de $\overset{1}{a}$ seront nécessairement $a+\overset{1}{c}-m+1$ et $(m-1-\overset{1}{c})+(a+\overset{1}{c}-m+1)-1$, ce qui fait que, dans la proposition citée, il faut prendre $u=1$, de sorte qu'on en tire:

$$\overset{a-1}{S}{}^{m}_{m-a}=\frac{(m-a)!\,(m+a-2)!}{m!\,(f'r)^{m+a-1}}\times$$

$$S\left[\frac{(-1)^{a+\overset{1}{c}-m+1}\dfrac{c_{a+\overset{1}{c}-m+1}}{(m+a-2)_{a+\overset{1}{c}-m+1}}\left(m+(m-1-\overset{1}{c})-1\right)}{\overset{1}{c}!\;\overset{2}{c}!\;\overset{3}{c}!\cdots\cdots}\left(\frac{f'r}{1!}\right)^{\overset{1}{c}}\left(\frac{f''r}{2!}\right)^{\overset{2}{c}}\cdots\right]$$

$$\overset{1}{c}+2\overset{2}{c}+3\overset{3}{c}+\cdots\cdots=m+a-1$$

$$\overset{1}{c}+\overset{2}{c}+\overset{3}{c}+\cdots\cdots=m-1$$

ce qui, par des propriétés connues des coëfficiens du binome (V. p. 32.) se réduit encore à:

$$\overset{a-1}{S}{}^{m}_{m-a}=\frac{1}{m!\,(f'r)^{m+a-1}}\times$$

$$S\left[\frac{(-1)^{a+\overset{1}{c}-m+1}\,(m-a)\,(2m-2-\overset{1}{c})!}{\overset{2}{c}!\;\overset{3}{c}!\cdots\cdots}\left(\frac{f'r}{1!}\right)^{\overset{1}{c}}\left(\frac{f''r}{2!}\right)^{\overset{2}{c}}\cdots\cdots\right]$$

$$\overset{1}{c}+2\overset{2}{c}+\cdots\cdots=m+c-1$$

$$\overset{1}{c}+\overset{2}{c}+\cdots\cdots=m-1$$

Mais comme la plus petite valeur que puisse avoir $\overset{1}{c}$ dans ces équations de condition est: $m-1-a$, on peut encore y remplacer $\overset{1}{c}$ par $\overset{1}{c}+m-1-a$, ce qui fournit enfin:

$$\overset{\mathfrak{a}-1}{S}{}^{m}_{m-\mathfrak{a}} = \frac{1}{m!\,(f'r)^{2\mathfrak{a}}}\left[\frac{(-1)^{\overset{1}{\mathfrak{c}}}(m-\mathfrak{a})\,(m-1+\mathfrak{a}-\overset{1}{\mathfrak{c}})!}{\overset{2}{\mathfrak{c}}!\,\overset{3}{\mathfrak{c}}!\cdots\cdots}\left(\frac{f'r}{1!}\right)^{\overset{1}{\mathfrak{c}}}\left(\frac{f''r}{2!}\right)^{\overset{2}{\mathfrak{c}}}\cdots\cdots\right] \qquad (\mathrm{g})$$

$$\overset{1}{\mathfrak{c}} + 2\overset{2}{\mathfrak{c}} + \cdots\cdots = 2\mathfrak{a}$$

$$\overset{1}{\mathfrak{c}} + 2\overset{2}{\mathfrak{c}} + \cdots\cdots = 2\mathfrak{a}$$

formule qui en effet rend $\overset{-1}{S}{}^{m}_{m} = 1$ et justifie par-là la supposition faite ci-dessus pour l'équation (f). Substituant dans cette dernière la valeur que nous venons de trouver pour $\overset{\mathfrak{a}-1}{S}{}^{m}_{m-\mathfrak{a}}$, il résulte:

$$\overset{m}{A} = S\left[(-1)^{\mathfrak{a}-\overset{1}{\mathfrak{c}}}\,\frac{F^{\mu-\alpha}r}{(m-\mathfrak{a})!\,(f'r)^{m+\mathfrak{a}}} \times \frac{(m-\mathfrak{a})\,(m-1+\mathfrak{a}-\overset{1}{\mathfrak{c}})!}{m!\,\overset{2}{\mathfrak{c}}!\,\overset{3}{\mathfrak{c}}!\cdots\cdots}\left(\frac{f'r}{1!}\right)^{\overset{1}{\mathfrak{c}}}\left(\frac{f''r}{2!}\right)^{\overset{2}{\mathfrak{c}}}\cdots\right] \quad (\mathrm{h})$$

$$\overset{1}{\mathfrak{c}} + 2\overset{2}{\mathfrak{c}} + \cdots\cdots = 2\mathfrak{a}$$

$$\overset{1}{\mathfrak{c}} + \overset{2}{\mathfrak{c}} + \cdots\cdots = \mathfrak{a}$$

$$\mathfrak{a} + \mathfrak{b} = m - 1$$

ce qui, étant introduit dans l'équation primitive (a), mise sous cette forme:

$$Fx = A + S\left[\overset{\mathfrak{d}+1}{A}(fx)^{\mathfrak{d}+1}\right]$$

donne:

$$Fx = Fr + S\left[(-1)^{\mathfrak{a}-\overset{1}{\mathfrak{c}}}\,\frac{(\mathfrak{d}-\overset{1}{\mathfrak{c}}+\mathfrak{a})!}{(\mathfrak{d}+1)!\,\overset{2}{\mathfrak{c}}!\,\overset{3}{\mathfrak{c}}!\cdots}\left(\frac{f'r}{1!}\right)^{\overset{1}{\mathfrak{c}}}\left(\frac{f''r}{2!}\right)^{\overset{2}{\mathfrak{c}}}\left(\frac{f'''r}{3!}\right)^{\overset{3}{\mathfrak{c}}}\cdots\frac{F^{\delta-\alpha+1}r}{(\mathfrak{d}-\mathfrak{a})!\,(f'r)^{\mathfrak{d}+\mathfrak{a}+1}}\,(fx)^{\mathfrak{d}+1}\right] \quad (\mathrm{i})$$

$$\overset{1}{\mathfrak{c}} + 2\overset{2}{\mathfrak{c}} + 3\overset{3}{\mathfrak{c}} + \cdots\cdots = 2\mathfrak{a}$$

$$\overset{1}{\mathfrak{c}} + \overset{2}{\mathfrak{c}} + \overset{3}{\mathfrak{c}} + \cdots\cdots = \mathfrak{a}$$

$$\mathfrak{a} + \mathfrak{b} = \mathfrak{d}$$

équation qui renferme la solution immédiate du problème proposé et, comme nous le ferons voir plus tard, s'accorde parfaitement avec le théorème de *Lagrange.*

## III. *Développement d'une fonction donnée à deux variables suivant les puissances de deux autres fonctions également données, mais dont l'une n'est fonction que de la première des deux variables et l'autre seulement de la seconde.*

Soit $F(x,y)$ une fonction donnée à deux variables et dont on demande le développement en une série suivant les puissances, à exposans entiers et positifs, de deux autres fonctions données, l'une, $\varphi x$, de la seule variable $x$, et l'autre, $\psi y$, de la seule $y$, de sorte qu'on ait:

$$\begin{aligned} F(x,y) = \overset{0,0}{A} + \overset{1,0}{A}\varphi x + \overset{2,0}{A}(\varphi x)^2 + \overset{3,0}{A}(\varphi x)^3 &+ \cdots\cdots \\ + \overset{0,1}{A}\psi y + \overset{1,1}{A}\varphi x\cdot\psi y + \overset{2,1}{A}(\varphi x)^2\psi y &+ \cdots\cdots \\ + \overset{0,2}{A}(\psi y)^2 + \overset{1,2}{A}\varphi x(\psi y)^2 &+ \cdots\cdots \\ + \overset{0,3}{A}(\psi y)^3 &+ \cdots\cdots \\ &+ \cdots\cdots \end{aligned}$$

ou bien:

$$F(x,y) = S\left[\overset{\mathfrak{a},\mathfrak{b}}{A}(\varphi x)^{\mathfrak{a}}(\psi y)^{\mathfrak{b}}\right] \qquad (\mathrm{k})$$

les $\overset{\mathfrak{a},\mathfrak{b}}{A}$ désignant des coëfficiens indépendans des variables $x$ et $y$ et qu'il s'agit de déterminer.

En différentiant cette équation suivant (I. probl. 4.) on obtient:

$$\frac{d^{m,n}F(x,y)}{m!\; n!\; dx^m dy^n} =$$

$$S\left[\overset{\mathfrak{a},\mathfrak{b}}{A}\frac{\mathfrak{a}!}{\mathfrak{c}!\,\overset{1}{\mathfrak{c}}!\,\overset{2}{\mathfrak{c}}!\cdots}(\varphi x)^{\mathfrak{c}}\left(\frac{\varphi' x}{1!}\right)^{\overset{1}{\mathfrak{c}}}\left(\frac{\varphi'' x}{2!}\right)^{\overset{2}{\mathfrak{c}}}\cdots\cdots \times \frac{\mathfrak{b}!}{\mathfrak{d}!\,\overset{1}{\mathfrak{d}}!\,\overset{2}{\mathfrak{d}}!\cdots}(\psi y)^{\mathfrak{d}}\left(\frac{\psi' y}{1!}\right)^{\overset{1}{\mathfrak{b}}}\left(\frac{\psi'' y}{2!}\right)^{\overset{2}{\mathfrak{b}}}\cdots\cdots\right]$$

$$\begin{aligned} \overset{1}{\mathfrak{c}} + 2\overset{2}{\mathfrak{c}} + 3\overset{3}{\mathfrak{c}} + \cdots\cdots &= m \\ \overset{1}{\mathfrak{c}} + \overset{2}{\mathfrak{c}} + \overset{3}{\mathfrak{c}} + \cdots\cdots &= \mathfrak{a} - \mathfrak{c} \\ \overset{1}{\mathfrak{d}} + 2\overset{2}{\mathfrak{d}} + 3\overset{3}{\mathfrak{d}} + \cdots\cdots &= n \\ \overset{1}{\mathfrak{d}} + \overset{2}{\mathfrak{d}} + \overset{2}{\mathfrak{d}} + \cdots\cdots &= \mathfrak{b} - \mathfrak{d} \end{aligned}$$

d'où, en supposant que pour $x = r$, $y = s$, on ait $\varphi r = o$ et $\psi s = o$, on tire:

$$\frac{d^{m,n} F(r,s)}{m!\ n!\ dr^m\, ds^n} =$$

$$S\left[\overset{\mathfrak{a},\mathfrak{b}}{A}\ \frac{\mathfrak{a}!}{\overset{1}{\mathfrak{c}}!\ \overset{2}{\mathfrak{c}}!\cdots\cdot}\left(\frac{\varphi' r}{1!}\right)^{\overset{1}{\mathfrak{c}}}\left(\frac{\varphi'' r}{2!}\right)^{\overset{2}{\mathfrak{c}}}\cdots\cdot \times \frac{\mathfrak{b}!}{\overset{1}{\mathfrak{d}}!\ \overset{2}{\mathfrak{d}}!\cdots\cdot}\left(\frac{\psi' s}{1!}\right)^{\overset{1}{\mathfrak{d}}}\left(\frac{\psi'' s}{2!}\right)^{\overset{2}{\mathfrak{d}}}\cdots\cdot\right]$$

$$\overset{1}{\mathfrak{c}} + 2\overset{2}{\mathfrak{c}} + \cdots\cdot = m \qquad \overset{1}{\mathfrak{d}} + 2\overset{2}{\mathfrak{d}} + \cdots\cdot = n$$

$$\overset{1}{\mathfrak{c}} + \overset{2}{\mathfrak{c}} + \cdots\cdot = \mathfrak{a} \qquad \overset{1}{\mathfrak{d}} + \overset{2}{\mathfrak{d}} + \cdots\cdot = \mathfrak{b}$$

Maintenant si, pour abréger, on fait:

$$\left.\begin{array}{l}
\dfrac{d^{m,n} F(r,s)}{m!\ n!\ dr^m\, ds^n\, (\varphi' r)^m\, (\psi' s)^n} = d(m,n) \\[2ex]
\dfrac{1}{(\varphi' r)^m}\, S\left[\dfrac{\mathfrak{a}!}{\overset{1}{\mathfrak{c}}!\ \overset{2}{\mathfrak{c}}!\cdots\cdot}\left(\dfrac{\varphi' r}{1!}\right)^{\overset{1}{\mathfrak{c}}}\left(\dfrac{\varphi'' r}{2!}\right)^{\overset{2}{\mathfrak{c}}}\cdots\cdot\right] = S^{m}_{\mathfrak{a}} \\
\qquad\qquad \overset{1}{\mathfrak{c}} + 2\overset{2}{\mathfrak{c}} + \cdots\cdot = m \\
\qquad\qquad \overset{1}{\mathfrak{c}} + \overset{2}{\mathfrak{c}} + \cdots\cdot = \mathfrak{a} \\[2ex]
\dfrac{1}{(\psi' s)^n}\, S\left[\dfrac{\mathfrak{b}!}{\overset{1}{\mathfrak{d}}!\ \overset{2}{\mathfrak{d}}!\cdots\cdot}\left(\dfrac{\psi' s}{1!}\right)^{\overset{1}{\mathfrak{d}}}\left(\dfrac{\psi'' s}{2!}\right)^{\overset{2}{\mathfrak{d}}}\cdots\cdot\right] = S^{n}_{\mathfrak{b}} \\
\qquad\qquad \overset{1}{\mathfrak{d}} + 2\overset{2}{\mathfrak{d}} + \cdots\cdot = n \\
\qquad\qquad \overset{1}{\mathfrak{d}} + \overset{2}{\mathfrak{d}} + \cdots\cdot = \mathfrak{b}
\end{array}\right\} \quad (l)$$

on aura:

$$d(m,n) = S\left[S^{m}_{\mathfrak{a}}\ S^{n}_{\mathfrak{b}}\ \overset{\mathfrak{a},\mathfrak{b}}{A}\right]$$
$$\mathfrak{a} + \mathfrak{m} = m$$
$$\mathfrak{b} + \mathfrak{n} = n$$

donc, à cause de $S^{m}_{m} = 1$:

$$\underset{\mathfrak{b}+\mathfrak{n}=n}{S\left[S^{n}_{\mathfrak{b}}\ \overset{m,\mathfrak{b}}{A}\right]} = d(m,n) - \underset{\substack{\mathfrak{a}+\mathfrak{m}=m-1 \\ \mathfrak{b}+\mathfrak{n}=n}}{S\left[S^{m}_{\mathfrak{a}}\ S^{n}_{\mathfrak{b}}\ \overset{\mathfrak{a},\mathfrak{b}}{A}\right]} \qquad (m)$$

ce qui, en faisant comme ci-dessus (e):

$$\overset{n}{S}{}^{m}_{m-n-1}\; S^{m-n-1}_{\mathfrak{a}} - \overset{n}{S}{}^{m}_{\mathfrak{a}} = \overset{n+1}{S}{}^{m}_{\mathfrak{a}}$$

fera successivement naître les relations suivantes :

$$\underset{\mathfrak{b}+\mathfrak{n}=n}{S}\left[\overset{n}{S}_{\mathfrak{b}}\overset{m,\mathfrak{b}}{A}\right] = d(m,n) - d(m-1,n)\,S^{m}_{m-1} + \underset{\substack{\mathfrak{a}+\mathfrak{m}=m-2\\ \mathfrak{b}+\mathfrak{n}=n}}{S}\left[\overset{1}{S}{}^{m}_{\mathfrak{a}}\,\overset{n}{S}_{\mathfrak{b}}\,\overset{\mathfrak{a},\mathfrak{b}}{A}\right] =$$

$$d(m,n) - d(m-1,n)\,S^{m}_{m-1} + d(m-2,n)\,\overset{1}{S}{}^{m}_{m-2} - \underset{\substack{\mathfrak{a}+\mathfrak{m}=m-3\\ \mathfrak{b}+\mathfrak{n}=n}}{S}\left[\overset{2}{S}{}^{m}_{\mathfrak{a}}\,\overset{n}{S}_{\mathfrak{b}}\,\overset{\mathfrak{a},\mathfrak{b}}{A}\right]$$

$$= \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots =$$

$$d(m,n) - d(m-1,n)\,S^{m}_{m-1} + d(m-2,n)\,\overset{1}{S}{}^{m}_{m-2} - d(m-3,n)\,\overset{2}{S}{}^{m}_{m-3} + \cdots\cdots$$

$$+ (-1)^{p+1}\,d(m-p-1,n)\,\overset{p}{S}{}^{m}_{m-p-1} + (-1)^{p}\underset{\substack{\mathfrak{a}+\mathfrak{m}=m-p-2\\ \mathfrak{b}+\mathfrak{n}=n}}{S}\left[\overset{p+1}{S}{}^{m}_{\mathfrak{a}}\,\overset{n}{S}_{\mathfrak{b}}\,\overset{\mathfrak{a},\mathfrak{b}}{A}\right]$$

et en continuant jusqu'à $p = m-2$ :

$$\underset{\mathfrak{b}+\mathfrak{n}=n}{S}\left[\overset{n}{S}_{\mathfrak{b}}\overset{m,\mathfrak{b}}{A}\right] = d(m,n) - d(m-1,n)\,S^{m}_{m-1} + d(m-2,n)\,\overset{1}{S}{}^{m}_{m-2} - \cdots\cdots$$

$$+ (-1)^{m-1}\,d(1,n)\,\overset{m-2}{S}{}^{m}_{1} + (-1)^{m}\underset{\substack{\mathfrak{a}+\mathfrak{m}=o\\ \mathfrak{b}+\mathfrak{n}=n}}{S}\left[\overset{m-1}{S}{}^{m}_{\mathfrak{a}}\,\overset{n}{S}_{\mathfrak{b}}\,\overset{\mathfrak{a},\mathfrak{b}}{A}\right]$$

équation dont le dernier terme du second membre disparaîtra à cause de $\overset{m-1}{S}{}^{m}_{o} = o$ (l) et qui par conséquent pourra s'écrire de cette manière :

$$\underset{\mathfrak{b}+\mathfrak{n}=n}{S}\left[\overset{n}{S}_{\mathfrak{b}}\overset{m,\mathfrak{b}}{A}\right] = d(m,n) - \underset{\mathfrak{c}+\mathfrak{d}=m-2}{S}\left[(-1)^{\mathfrak{c}}\,d(m-1-\mathfrak{c},n)\,\overset{\mathfrak{c}}{S}{}^{m}_{m-1-\mathfrak{c}}\right]$$

ou bien encore de celle-ci :

$$\underset{\mathfrak{b}+\mathfrak{n}=n}{S}\left[\overset{n}{S}_{\mathfrak{b}}\overset{m,\mathfrak{b}}{A}\right] = \underset{\mathfrak{c}+\mathfrak{d}=m-1}{S}\left[(-1)^{\mathfrak{c}}\,d(m-\mathfrak{c},n)\,\overset{\mathfrak{c}-1}{S}{}^{m}_{m-\mathfrak{c}}\right] \qquad \text{(n)}$$

parce que $\overset{-1}{S}{}^{m}_{m} = 1$ (g).

*

Si du premier membre de l'équation (n) on détache le terme résultant de la supposition $\mathfrak{b}=n$, on obtient:

$$\overset{m,n}{A} = \underset{\mathfrak{c}+\mathfrak{d}=m-1}{S}\Big[(-1)^{\mathfrak{c}}\, d(m-\mathfrak{c},\, n)\, \overset{\mathfrak{c}-1\ \ m}{S}_{m-\mathfrak{c}}\Big] - \underset{\mathfrak{b}+\mathfrak{n}=n-1}{S}\Big[\overset{n}{S}_{\mathfrak{b}}\ \overset{m,\mathfrak{b}}{A}\Big] =$$

$$\underset{\mathfrak{c}+\mathfrak{d}=m-1}{S}\Big[(-1)^{\mathfrak{c}}\, d(m-\mathfrak{c},\, n)\, \overset{\mathfrak{c}-1\ \ m}{S}_{m-\mathfrak{c}}\Big] - \overset{n}{S}_{n-1}\ \overset{m,n-1}{A} - \underset{\mathfrak{b}+\mathfrak{n}=n-2}{S}\Big[\overset{n}{S}_{\mathfrak{b}}\ \overset{m,\mathfrak{b}}{A}\Big]$$

d'où, en remplaçant $\overset{m,n-1}{A}$ par l'expression:

$$\underset{\mathfrak{c}+\mathfrak{d}=m-1}{S}\Big[(-1)^{\mathfrak{c}}\, d(m-\mathfrak{c},\, n-1)\, \overset{\mathfrak{c}-1\ \ m}{S}_{m-\mathfrak{c}}\Big] - \underset{\mathfrak{b}+\mathfrak{n}=n-2}{S}\Big[\overset{n-1}{S}_{\mathfrak{b}}\ \overset{m,\mathfrak{b}}{A}\Big],\ \text{l'on tire:}$$

$$\overset{m,n}{A} = \underset{\mathfrak{c}+\mathfrak{m}=m-1}{S}\Big[(-1)^{\mathfrak{c}}\, [d(m-\mathfrak{c},\, n) - d(m-\mathfrak{c},\, n-1)\, \overset{n}{S}_{n-1}]\, \overset{\mathfrak{c}-1\ \ m}{S}_{m-\mathfrak{c}}\Big] + \underset{\mathfrak{b}+\mathfrak{n}=n-2}{S}\Big[\overset{1\ n}{S}_{\mathfrak{b}}\ \overset{m,\mathfrak{b}}{A}\Big]$$

ce qui de nouveau conduit à:

$$\overset{m,n}{A} = \underset{\mathfrak{c}+\mathfrak{m}=m-1}{S}\Big[(-1)^{\mathfrak{c}}\, [d(m-\mathfrak{c},n) - d(m-\mathfrak{c},\, n-1)\, \overset{n}{S}_{n-1} + d(m-\mathfrak{c},\, n-2)\, \overset{1\ n}{S}_{n-2}]\, \overset{\mathfrak{c}-1\ \ m}{S}_{m-\mathfrak{c}}\Big]$$

$$- \underset{\mathfrak{b}+\mathfrak{n}=n-3}{S}\Big[\overset{2\ n}{S}_{\mathfrak{b}}\ \overset{m,\mathfrak{b}}{A}\Big]$$

De pareilles substitutions successives fournissant ce résultat général:

$$\overset{m,n}{A} = \underset{\mathfrak{c}+\mathfrak{m}=m-1}{S}\Big[(-1)^{\mathfrak{c}}\, [d(m-\mathfrak{c},n) - d(m-\mathfrak{c},\, n-1)\, \overset{n}{S}_{n-1} + \cdots + (-1)^{p}\, d(m-\mathfrak{c},\, n-p)\, \overset{p-1\ n}{S}_{n-p}]$$

$$\times\, \overset{\mathfrak{c}-1\ \ m}{S}_{m-\mathfrak{c}}\Big] + (-1)^{p+1}\, S\Big[\overset{p\ n}{S}_{\mathfrak{b}}\ \overset{m,\mathfrak{b}}{A}\Big]$$

on en tirera, en prenant $p=n-1$, parce que $\overset{n-1\ n}{S}_{0} = o$:

$$\overset{m,n}{A} = S\Big[(-1)^{\mathfrak{c}}\, [d(m-\mathfrak{c},\, n) - d(m-\mathfrak{c},\, n-1)\, \overset{n}{S}_{n-1} + d(m-\mathfrak{c},\, n-2)\, \overset{1\ n}{S}_{n-2} - \cdots\cdots$$

$$\underset{\mathfrak{c}+\mathfrak{m}=m-1}{} + (-1)^{n-1}\, d(m-\mathfrak{c},\, 1)\, \overset{n-2\ n}{S}_{1}]\, \overset{\mathfrak{c}-1\ \ m}{S}_{m-\mathfrak{c}}\Big]$$

ou bien:

$$\overset{m,n}{A} = S\left[(-1)^{\mathfrak{c}+\mathfrak{d}}\, d(m-\mathfrak{c},\, n-\mathfrak{d})\, \overset{\mathfrak{c}-1\ m}{S}_{m-\mathfrak{c}}\, \overset{\mathfrak{d}-1\ n}{S}_{n-\mathfrak{d}}\right] \qquad (\mathfrak{p})$$

$$\mathfrak{c}+\mathfrak{m} = m-1$$

$$\mathfrak{d}+\mathfrak{n} = n-1$$

Or puisque de l'équation (n) on déduit facilement:

$$\overset{m,o}{A} = S\left[(-1)^{\mathfrak{c}}\, d(m-\mathfrak{c}, o)\, \overset{\mathfrak{c}-1\ m}{S}_{m-\mathfrak{c}}\right]$$

$$\mathfrak{c}+\mathfrak{m} = m-1$$

et que tout aussi bien:

$$\overset{o,n}{A} = S\left[(-1)^{\mathfrak{d}}\, d(o, n-\mathfrak{d})\, \overset{\mathfrak{d}-1\ n}{S}_{n-\mathfrak{d}}\right]$$

$$\mathfrak{d}+\mathfrak{n} = n-1$$

l'équation primitive (k), mise sous cette forme:

$$F(x,y) = \overset{o,o}{A} + S\left[\overset{\mathfrak{a}+1,o}{A}(\varphi x)^{\mathfrak{a}+1}\right] + S\left[\overset{o,\mathfrak{b}+1}{A}(\psi y)^{\mathfrak{b}+1}\right] + S\left[\overset{\mathfrak{a}+1,\mathfrak{b}+1}{A}(\varphi x)^{\mathfrak{a}+1}(\psi y)^{\mathfrak{b}+1}\right]$$

pourra être changée en celle-ci:

$$F(x,y) = F(r,s) + S\left[(-1)^{\mathfrak{c}}\, d(\mathfrak{a}-\mathfrak{c}+1, o)\, \overset{\mathfrak{c}-1\ \mathfrak{a}+1}{S}_{\mathfrak{a}-\mathfrak{c}+1}(\varphi x)^{\mathfrak{a}+1}\right]$$

$$\mathfrak{c}+\mathfrak{m} = \mathfrak{a}$$

$$+ S\left[(-1)^{\mathfrak{d}}\, d(o, \mathfrak{b}-\mathfrak{d}+1)\, \overset{\mathfrak{d}-1\ \mathfrak{b}+1}{S}_{\mathfrak{b}-\mathfrak{d}+1}(\psi y)^{\mathfrak{b}+1}\right] \qquad (\mathfrak{q})$$

$$\mathfrak{d}+\mathfrak{n} = \mathfrak{b}$$

$$+ S\left[(-1)^{\mathfrak{c}+\mathfrak{d}}\, d(\mathfrak{a}-\mathfrak{c}+1, \mathfrak{b}-\mathfrak{d}+1)\, \overset{\mathfrak{c}-1\ \mathfrak{a}+1}{S}_{\mathfrak{a}-\mathfrak{c}+1}\, \overset{\mathfrak{d}-1\ \mathfrak{b}+1}{S}_{\mathfrak{b}-\mathfrak{d}+1}(\varphi x)^{\mathfrak{a}+1}(\psi y)^{\mathfrak{b}+1}\right]$$

$$\mathfrak{c}+\mathfrak{m} = \mathfrak{a} \qquad \mathfrak{d}+\mathfrak{n} = \mathfrak{b}$$

laquelle, par suite des équations (l) et (g) deviendra enfin:

$$F(x,y) = F(r,s) + \qquad (\mathfrak{r})$$

$$S\left[(-1)^{\mathfrak{c}-\overset{1}{\mathfrak{c}}}\, \frac{(\mathfrak{a}+\mathfrak{c}-\overset{1}{\mathfrak{c}})!}{(\mathfrak{a}+1)!\,\overset{2}{\mathfrak{c}}!\,\overset{3}{\mathfrak{c}}!\cdots}\left(\frac{\varphi' r}{1!}\right)^{\overset{1}{\mathfrak{c}}}\left(\frac{\varphi'' r}{2!}\right)^{\overset{2}{\mathfrak{c}}}\cdots \times \frac{d^{\mathfrak{a}-\mathfrak{c}+1}\, F(r,s)}{(\mathfrak{a}-\mathfrak{c})!\, dr^{\mathfrak{a}-\mathfrak{c}+1}(\varphi' r)^{\mathfrak{a}+\mathfrak{c}+1}}(\varphi x)^{\mathfrak{a}+1}\right]$$

$$\overset{1}{\mathfrak{c}} + 2\overset{2}{\mathfrak{c}} + \cdots\cdots = 2\mathfrak{c}$$

$$\overset{1}{\mathfrak{c}} + \overset{2}{\mathfrak{c}} + \cdots\cdots = \mathfrak{c}$$

$$\mathfrak{c}+\mathfrak{m} = \mathfrak{a}$$

$$+S\left[(-1)^{\mathfrak{d}-\overset{1}{\mathfrak{d}}}\frac{(\mathfrak{b}+\mathfrak{d}-\overset{1}{\mathfrak{d}})!}{(\mathfrak{b}+1)!\,\overset{2}{\mathfrak{d}}!\,\overset{3}{\mathfrak{d}}!\cdots}\left(\frac{\psi's}{1!}\right)^{\overset{1}{\mathfrak{d}}}\left(\frac{\psi''s}{2!}\right)^{\overset{2}{\mathfrak{d}}}\cdots\times\frac{d^{\mathfrak{b}-\mathfrak{d}+1}\,F(r,s)}{(\mathfrak{b}-\mathfrak{d})!\,ds^{\mathfrak{b}-\mathfrak{d}+1}(\psi's)^{\mathfrak{b}+\mathfrak{d}+1}}(\psi y)^{\mathfrak{b}+1}\right]$$

$$\overset{1}{\mathfrak{d}}+2\overset{2}{\mathfrak{d}}+\cdots\cdots=2\mathfrak{d}$$

$$\overset{1}{\mathfrak{d}}+\overset{2}{\mathfrak{d}}+\cdots\cdots=\mathfrak{d}$$

$$\mathfrak{d}+\mathfrak{n}=\mathfrak{b}$$

$$+S\left[(-1)^{\mathfrak{c}-\overset{1}{\mathfrak{c}}+\mathfrak{d}-\overset{1}{\mathfrak{d}}}\frac{(\mathfrak{a}+\mathfrak{c}-\overset{1}{\mathfrak{c}})!}{(\mathfrak{a}+1)!\,\overset{2}{\mathfrak{c}}!\,\overset{3}{\mathfrak{c}}!\cdots}\left(\frac{\varphi'r}{1!}\right)^{\overset{1}{\mathfrak{c}}}\left(\frac{\varphi''r}{2!}\right)^{\overset{2}{\mathfrak{c}}}\cdots\times\frac{(\mathfrak{b}+\mathfrak{d}-\overset{1}{\mathfrak{d}})!}{(\mathfrak{b}+1)!\,\overset{2}{\mathfrak{d}}!\,\overset{3}{\mathfrak{d}}!\cdots}\left(\frac{\psi's}{1!}\right)^{\overset{1}{\mathfrak{d}}}\left(\frac{\psi''s}{2!}\right)^{\overset{2}{\mathfrak{d}}}\cdots\right.$$

$$\left.\times\frac{d^{\mathfrak{a}-\mathfrak{c}+1,\,\mathfrak{b}-\mathfrak{d}+1}\,F(r,s)}{(\mathfrak{a}-\mathfrak{c})!\,(\mathfrak{b}-\mathfrak{d})!\,dr^{\mathfrak{a}-\mathfrak{c}+1}\,ds^{\mathfrak{b}-\mathfrak{d}+1}\,(\varphi'r)^{\mathfrak{a}+\mathfrak{c}+1}\,(\psi's)^{\mathfrak{b}+\mathfrak{d}+1}}+(\varphi x)^{\mathfrak{a}+1}(\psi y)^{\mathfrak{b}+1}\right]$$

$$\overset{1}{\mathfrak{c}}+2\overset{2}{\mathfrak{c}}+\cdots\cdots=2\mathfrak{c}\qquad\overset{1}{\mathfrak{d}}+2\overset{2}{\mathfrak{d}}+\cdots\cdots=2\mathfrak{d}$$

$$\overset{1}{\mathfrak{c}}+\overset{2}{\mathfrak{c}}+\cdots\cdots=\mathfrak{c}\qquad\overset{1}{\mathfrak{d}}+\overset{2}{\mathfrak{d}}+\cdots\cdots=\mathfrak{d}$$

$$\mathfrak{c}+\mathfrak{m}=\mathfrak{a}\qquad\mathfrak{d}+\mathfrak{n}=\mathfrak{b}$$

formule, par laquelle le développement proposé pourra s'effectuer immédiatement.

---

## IV. *Développement d'une fonction donnée à trois ou à plusieurs variables suivant les puissances d'autres fonctions données, dont chacune n'est fonction que d'une seule variable.*

Soit $F(\overset{1}{x},\overset{2}{x},\overset{3}{x},\cdots\cdots\overset{n}{x})$ la fonction donnée, dont on demande le développement suivant les puissances d'autres fonctions également données: $\overset{1}{\varphi}\overset{1}{x}$, $\overset{2}{\varphi}\overset{2}{x}$, $\overset{3}{\varphi}\overset{3}{x}$, $\cdots\ \overset{n}{\varphi}\overset{n}{x}$.

Supposant:

$$1)\ d\,(\overset{1}{\mathfrak{a}}-\overset{1}{\mathfrak{b}},\ \overset{2}{\mathfrak{a}}-\overset{2}{\mathfrak{b}},\ \overset{3}{\mathfrak{a}}-\overset{3}{\mathfrak{b}},\ \cdots\cdots\overset{n}{\mathfrak{a}}-\overset{n}{\mathfrak{b}})=$$

$$\frac{d^{\overset{1}{\mathfrak{a}}-\overset{1}{\mathfrak{b}},\ \overset{2}{\mathfrak{a}}-\overset{2}{\mathfrak{b}},\ \overset{3}{\mathfrak{a}}-\overset{3}{\mathfrak{b}},\cdots\cdots\overset{n}{\mathfrak{a}}-\overset{n}{\mathfrak{b}}}\ F(\overset{1}{r},\overset{2}{r},\overset{3}{r},\cdots\cdots\overset{n}{r})}{(\overset{1}{\mathfrak{a}}-\overset{1}{\mathfrak{b}})!\,(\overset{2}{\mathfrak{a}}-\overset{2}{\mathfrak{b}})!\,(\overset{3}{\mathfrak{a}}-\overset{3}{\mathfrak{b}})!\cdots\cdots(\overset{n}{\mathfrak{a}}-\overset{n}{\mathfrak{b}})!\ d\overset{1}{r}^{\overset{1}{\mathfrak{a}}-\overset{1}{\mathfrak{b}}}\,d\overset{2}{r}^{\overset{2}{\mathfrak{a}}-\overset{2}{\mathfrak{b}}}\,d\overset{3}{r}^{\overset{3}{\mathfrak{a}}-\overset{3}{\mathfrak{b}}}\cdots\cdots d\overset{n}{r}^{\overset{n}{\mathfrak{a}}-\overset{n}{\mathfrak{b}}}\,(\overset{1}{\varphi}{}'\overset{1}{r})^{\overset{1}{\mathfrak{a}}-\overset{1}{\mathfrak{b}}}\,(\overset{2}{\varphi}{}'\overset{2}{r})^{\overset{2}{\mathfrak{a}}-\overset{2}{\mathfrak{b}}}\cdots\cdots(\overset{n}{\varphi}{}'\overset{n}{r})^{\overset{n}{\mathfrak{a}}-\overset{n}{\mathfrak{b}}}}$$

$$2)\ \overset{\overset{\lambda}{\mathfrak{b}}-1\ \ \overset{\lambda}{\mathfrak{a}}}{S}{}_{\overset{\lambda}{\mathfrak{a}}-\overset{\lambda}{\mathfrak{b}}}=\frac{1}{\overset{\lambda}{\mathfrak{a}}!\,(\overset{\lambda}{\varphi}{}'\overset{\lambda}{r})^{2\overset{\lambda}{\mathfrak{b}}}}\ S\left[(-1)^{\overset{1}{\mathfrak{c}}}\frac{(\overset{\lambda}{\mathfrak{a}}-\overset{\lambda}{\mathfrak{b}})\,(\overset{\lambda}{\mathfrak{a}}-1+\overset{\lambda}{\mathfrak{b}}-\overset{1}{\mathfrak{c}})!}{\overset{2}{\mathfrak{c}}!\,\overset{3}{\mathfrak{c}}!\cdots}\left(\frac{\overset{\lambda}{\varphi}{}'\overset{\lambda}{r}}{1!}\right)^{\overset{1}{\mathfrak{c}}}\left(\frac{\overset{\lambda}{\varphi}{}''\overset{\lambda}{r}}{2!}\right)^{\overset{2}{\mathfrak{c}}}\cdots\cdots\right]$$

$$\overset{1}{\mathfrak{c}} + 2\overset{2}{\mathfrak{c}} + 3\overset{3}{\mathfrak{c}} + \cdots\cdots = 2\overset{k}{\mathfrak{b}}$$

$$\overset{1}{\mathfrak{c}} + \overset{2}{\mathfrak{c}} + \overset{3}{\mathfrak{c}} + \cdots\cdots = \overset{k}{\mathfrak{b}}$$

3) $\overset{k}{\varphi}\overset{k}{r} = o$, de sorte que, généralement, $\overset{k}{r}$ soit une racine de l'équation $\overset{k}{\varphi}\overset{k}{x} = o$ on trouvera, en suivant une marche tout-à-fait analogue à celle du N°. III, la formule générale suivante :

$$F(\overset{1}{x}, \overset{2}{x}, \overset{3}{x}, \cdots\cdots \overset{n}{x}) = \qquad (s)$$

$$S\Big[(-1)^{\overset{1}{\mathfrak{b}}+\overset{2}{\mathfrak{b}}+\overset{3}{\mathfrak{b}}+\cdots+\overset{n}{\mathfrak{b}}}\, d(\overset{1}{\mathfrak{a}}-\overset{1}{\mathfrak{b}},\ \overset{2}{\mathfrak{a}}-\overset{2}{\mathfrak{b}},\ \overset{3}{\mathfrak{a}}-\overset{3}{\mathfrak{b}},\ \cdots\cdots \overset{n}{\mathfrak{a}}-\overset{n}{\mathfrak{b}}) \times \mathop{S}\limits^{\overset{1}{\mathfrak{b}}-1\ \overset{1}{\mathfrak{a}}}_{\overset{1}{\mathfrak{a}}-\overset{1}{\mathfrak{b}}} \mathop{S}\limits^{\overset{2}{\mathfrak{b}}-1\ \overset{2}{\mathfrak{a}}}_{\overset{2}{\mathfrak{a}}-\overset{2}{\mathfrak{b}}}$$

$$\times \mathop{S}\limits^{\overset{3}{\mathfrak{b}}-1\ \overset{3}{\mathfrak{a}}}_{\overset{3}{\mathfrak{a}}-\overset{3}{\mathfrak{b}}} \cdots\cdots \mathop{S}\limits^{\overset{n}{\mathfrak{b}}-1\ \overset{n}{\mathfrak{a}}}_{\overset{n}{\mathfrak{a}}-\overset{n}{\mathfrak{b}}} \times (\overset{1}{\varphi}\overset{1}{x})^{\overset{1}{\mathfrak{a}}}(\overset{2}{\varphi}\overset{2}{x})^{\overset{2}{\mathfrak{a}}}(\overset{3}{\varphi}\overset{3}{x})^{\overset{3}{\mathfrak{a}}}\cdots\cdots(\overset{n}{\varphi}\overset{n}{x})^{\overset{n}{\mathfrak{a}}}\Big]$$

$$\overset{1}{\mathfrak{b}} + \overset{1}{\mathfrak{d}} = \overset{1}{\mathfrak{a}} - 1$$
$$\overset{2}{\mathfrak{b}} + \overset{2}{\mathfrak{d}} = \overset{2}{\mathfrak{a}} - 1$$
$$\overset{3}{\mathfrak{b}} + \overset{3}{\mathfrak{d}} = \overset{3}{\mathfrak{a}} - 1$$
$$\vdots \qquad\qquad \vdots$$
$$\overset{n}{\mathfrak{b}} + \overset{n}{\mathfrak{d}} = \overset{n}{\mathfrak{a}} - 1$$

où, pour un $\overset{k}{\mathfrak{a}}$ quelconque $= o$, il faudra rendre le $\overset{k}{\mathfrak{b}}$ correspondant également $= o$.

---

## V. *Conséquences tirées des formules des articles précédens.*

1. Soit $\Phi x = (\mathfrak{f}x)^{\mathfrak{a}+1} F'x$; on aura par la solution du problème 3 de l'article I :

$$\frac{\Phi^{\mathfrak{a}}x}{\mathfrak{a}!} = \frac{d^{\mathfrak{a}}\,[((\mathfrak{f}x)^{-1})^{-\mathfrak{a}-1} F'x]}{\mathfrak{a}!\, dx^{\mathfrak{a}}} =$$

$$S\left[(-1)^{\mathfrak{e}-\overset{1}{\mathfrak{a}}}\, \frac{(\mathfrak{a}+\mathfrak{e}-\overset{1}{\mathfrak{a}})!}{\mathfrak{a}!\,\overset{2}{\mathfrak{a}}!\,\overset{3}{\mathfrak{a}}!\cdots((\mathfrak{f}x)^{-1})^{\mathfrak{a}+1+\mathfrak{e}}}\ ((\mathfrak{f}x)^{-1})^{\overset{1}{\mathfrak{a}}}\left(\frac{d\,(\mathfrak{f}x)^{-1}}{1!\ dx}\right)^{\overset{2}{\mathfrak{a}}}\cdots \times \frac{F^{\mathfrak{a}-\varepsilon+1}}{(\mathfrak{a}-\mathfrak{e})!}\right]$$

$$\overset{1}{\mathfrak{a}} + 2\overset{2}{\mathfrak{a}} + \cdots\cdots = 2\mathfrak{c}$$

$$\overset{1}{\mathfrak{a}} + \overset{2}{\mathfrak{a}} + \cdots\cdots = \mathfrak{c}$$

$$\mathfrak{c} + \mathfrak{b} = \mathfrak{a}$$

Or si, dans la formule (i), on suppose $fx = \frac{x-r}{\mathfrak{f}x} = (x-r)(\mathfrak{f}x)^{-1}$, on obtient, à cause de $(\mathfrak{f}r)^{-1} = \frac{0}{0} = f'r$ et $\frac{f^{\mu}r}{m!} = \frac{d^{m-1}((\mathfrak{f}r)^{-1})}{(m-1)!\,dr^{m-1}}$ (prob. 1. coroll. Art. I.), cette équation :

$$Fx = Fr +$$

$$S\left[(-1)^{\mathfrak{a}-\overset{1}{\mathfrak{c}}}\frac{(\mathfrak{d}+\mathfrak{a}-\overset{1}{\mathfrak{c}})!}{(\mathfrak{d}+1)!\,\overset{2}{\mathfrak{c}}!\,\overset{3}{\mathfrak{c}}!\cdots}((\mathfrak{f}r)^{-1})^{\overset{1}{\mathfrak{c}}}\left(\frac{d(\mathfrak{f}r)^{-1}}{1!\,dr}\right)^{\overset{2}{\mathfrak{c}}}\cdots\cdots\times\frac{F^{\delta-a+1}r}{(\mathfrak{d}-\mathfrak{a})!\,((\mathfrak{f}r)^{-1})^{\mathfrak{d}+\mathfrak{a}+1}}(fx)^{\mathfrak{b}+1}\right]$$

$$\overset{1}{\mathfrak{c}} + 2\overset{2}{\mathfrak{c}} + \cdots\cdots = 2\mathfrak{a}$$

$$\overset{1}{\mathfrak{c}} + \overset{2}{\mathfrak{c}} + \cdots\cdots = \mathfrak{a}$$

$$\mathfrak{a} + \mathfrak{b} = \mathfrak{d}$$

donc, en combinant ce résultat avec le précédent:

$$Fx = Fr + S\left[\frac{d^{\mathfrak{a}}[((\mathfrak{f}r)^{-1})^{-\mathfrak{a}-1}F'r]}{(\mathfrak{a}+1)!\,dr^{\mathfrak{a}}}(fx)^{\mathfrak{a}+1}\right] = Fr + S\left[\frac{d^{\mathfrak{a}}[(\mathfrak{f}r)^{\mathfrak{a}+1}F'r]}{(\mathfrak{a}+1)!\,dr^{\mathfrak{a}}}(fx)^{\mathfrak{a}+1}\right]$$

ce qui, en désignant $fx$ par $z$, peut être énoncé de la manière suivante:

„Si $r = x - z\mathfrak{f}x$, on a généralement:

$$Fx = Fr + S\left[\frac{d^{\mathfrak{a}}[(\mathfrak{f}r)^{\mathfrak{a}+1}F'r]}{(\mathfrak{a}+1)!\,dr^{\mathfrak{a}}}z^{\mathfrak{a}+1}\right] =$$

$$Fr + \mathfrak{f}r\cdot F'r\cdot z + \frac{d(\mathfrak{f}r^2\,F'r)}{1\cdot 2\,dr}z^2 + \frac{d^2(\mathfrak{f}r^3\,F'r)}{1\cdot 2\cdot 2\,dr^2}z^3 + \cdots\cdots\text{“}$$

*théorème de Lagrange.* Notre formule (i) ne diffère donc de la proposition de l'illustre géomètre que par ce que les différentiations, que celle-ci ne fait qu'indiquer, se trouvent chez nous déja toutes faites.

2. Soit $\Phi(x,y) = (\mathfrak{f}x)^p\,(\mathfrak{g}y)^q\,\frac{d^2\,F(x,y)}{dx\cdot dy}$ ($\mathfrak{g}$ étant également un signe de fonction), on aura par la solution du probl. 5 de l'art. I:

$$\frac{d^{m,n}\Phi(x,y)}{m!\,n!\,dx^m dy^n} = \frac{d^{m,n}\left[\left((\mathfrak{f}x)^{-1}\right)^{-p}\left((\mathfrak{g}y)^{-1}\right)^{-q}\frac{d^2F(x,y)}{dx\cdot dy}\right]}{m!\,n!\,dx^m\,dy^n} =$$

$$S\left[(-1)^{\mathfrak{a}-\overset{1}{\mathfrak{a}}+\mathfrak{b}-\overset{1}{\mathfrak{b}}}\frac{(p+\mathfrak{a}-\overset{1}{\mathfrak{a}}-1)!}{(p-1)!\,\overset{2}{\mathfrak{a}}!\,\overset{3}{\mathfrak{a}}!\cdots((\mathfrak{f}x)^{-1})^{p+\mathfrak{a}}}\left((\mathfrak{f}x)^{-1}\right)^{\overset{1}{\mathfrak{a}}}\left(\frac{d(\mathfrak{f}x)^{-1}}{1!\,dx}\right)^{\overset{2}{\mathfrak{a}}}\cdots\right.$$

$$\left.\times\frac{(q+\mathfrak{b}-\overset{1}{\mathfrak{b}}-1)!}{(q-1)!\,\overset{2}{\mathfrak{b}}!\,\overset{3}{\mathfrak{b}}!\cdots((\mathfrak{g}y)^{-1})^{q+\mathfrak{b}}}\left((\mathfrak{g}y)^{-1}\right)^{\overset{2}{\mathfrak{b}}}\left(\frac{d(\mathfrak{g}y)^{-1}}{1!\,dy}\right)^{\mathfrak{b}}\cdots\times\frac{d^{m-\mathfrak{a}+1,\,n-\mathfrak{b}+1}F(x,y)}{(m-\mathfrak{a})!\,(n-\mathfrak{b})!\,dx^{m-\mathfrak{a}+1}dy^{n-\mathfrak{b}+1}}\right]$$

$$\overset{1}{\mathfrak{a}}+2\overset{2}{\mathfrak{a}}+\cdots\cdots=2\mathfrak{a}\qquad\overset{1}{\mathfrak{b}}+2\overset{2}{\mathfrak{b}}+\cdots\cdots=2\mathfrak{b}$$

$$\overset{1}{\mathfrak{a}}+\ \overset{2}{\mathfrak{a}}+\cdots\cdots=\ \mathfrak{a}\qquad\overset{1}{\mathfrak{b}}+\ \overset{2}{\mathfrak{b}}+\cdots\cdots=\ \mathfrak{b}$$

Mais si, dans la formule (r), on suppose $\varphi x = \frac{x-r}{\mathfrak{f}x}$ et $\psi y = \frac{y-s}{\mathfrak{g}y}$, de sorte que $(\mathfrak{f}r)^{-1} = \frac{0}{0} = \varphi' r$, $(\mathfrak{g}s)^{-1} = \frac{0}{0} = \psi' s$, $\frac{\varphi^{\mu}r}{m!} = \frac{d^{m-1}(\mathfrak{f}r)^{-1}}{(m-1)!\,dr^{m-1}}$ et $\frac{\psi^{\mu}s}{m!} = \frac{d^{m-1}(\mathfrak{g}s)^{-1}}{(m-1)!\,ds^{m-1}}$ (coroll. du probl. 1 de l'art. I), on obtient:

$$F(x,y) = F(r,s) +$$

$$S\left[(-1)^{\mathfrak{c}-\overset{1}{\mathfrak{c}}}\frac{(\mathfrak{a}+\mathfrak{c}-\overset{1}{\mathfrak{c}})!}{(\mathfrak{a}+1)!\,\overset{2}{\mathfrak{c}}!\,\overset{3}{\mathfrak{c}}!\cdots}\left((\mathfrak{f}r)^{-1}\right)^{\overset{1}{\mathfrak{c}}}\left(\frac{d\mathfrak{f}r^{-1}}{1!\,dr}\right)^{\overset{2}{\mathfrak{c}}}\cdots\times\frac{d^{\mathfrak{a}-\mathfrak{c}+1}F(r,s)}{(\mathfrak{a}-\mathfrak{c})!\,dr^{\mathfrak{a}-\mathfrak{c}+1}(\mathfrak{f}r^{-1})^{\mathfrak{a}+\mathfrak{c}+1}}(\varphi x)^{\mathfrak{a}+1}\right]$$

$$\overset{1}{\mathfrak{c}}+2\overset{2}{\mathfrak{c}}+\cdots\cdots=2\mathfrak{c}$$

$$\overset{1}{\mathfrak{c}}+\ \overset{2}{\mathfrak{c}}+\cdots\cdots=\ \mathfrak{c}$$

$$\mathfrak{c}+\mathfrak{m}=\mathfrak{a}$$

$$+S\left[(-1)^{\mathfrak{d}-\overset{1}{\mathfrak{d}}}\frac{(\mathfrak{b}+\mathfrak{d}-\overset{1}{\mathfrak{d}})!}{(\mathfrak{b}+1)!\,\overset{2}{\mathfrak{d}}!\,\overset{3}{\mathfrak{d}}!\cdots}\left((\mathfrak{g}s)^{-1}\right)^{\overset{1}{\mathfrak{d}}}\left(\frac{d\mathfrak{g}s^{-1}}{1!\,ds}\right)^{\overset{2}{\mathfrak{d}}}\cdots\times\frac{d^{\mathfrak{b}-\mathfrak{d}+1}F(r,s)}{(\mathfrak{b}-\mathfrak{d})!\,ds^{\mathfrak{b}-\mathfrak{d}+1}(\mathfrak{g}s^{-1})^{\mathfrak{b}+\mathfrak{d}+1}}(\psi y)^{\mathfrak{b}+1}\right]$$

$$\overset{1}{\mathfrak{d}}+2\overset{2}{\mathfrak{d}}+\cdots\cdots=2\mathfrak{d}$$

$$\overset{1}{\mathfrak{d}}+\ \overset{2}{\mathfrak{d}}+\cdots\cdots=\ \mathfrak{d}$$

$$\mathfrak{d}+\mathfrak{n}=\mathfrak{b}$$

$$+S\left[(-1)^{\mathfrak{c}-\overset{1}{\mathfrak{c}}+\mathfrak{d}-\overset{1}{\mathfrak{d}}}\frac{(\mathfrak{a}+\mathfrak{c}-\overset{1}{\mathfrak{c}})!}{(\mathfrak{a}+1)!\,\overset{2}{\mathfrak{c}}!\,\overset{3}{\mathfrak{c}}!\cdots}\left((\mathfrak{f}r)^{-1}\right)^{\overset{1}{\mathfrak{c}}}\left(\frac{d\mathfrak{f}r^{-1}}{1!\,dr}\right)^{\overset{2}{\mathfrak{c}}}\cdots\times\frac{(\mathfrak{b}+\mathfrak{d}-\overset{1}{\mathfrak{d}})!}{(\mathfrak{b}+1)!\,\overset{2}{\mathfrak{d}}!\,\overset{3}{\mathfrak{d}}!\cdots}\left((\mathfrak{g}s)^{-1}\right)^{\overset{1}{\mathfrak{d}}}\left(\frac{d\mathfrak{g}s^{-1}}{1!\,ds}\right)^{\overset{2}{\mathfrak{d}}}\cdots\right.$$

$$\left.\times\frac{d^{\mathfrak{a}-\mathfrak{c}+1,\,\mathfrak{b}-\mathfrak{d}+1}F(r,s)}{(\mathfrak{a}-\mathfrak{c})!\,(\mathfrak{b}-\mathfrak{d})!\,dr^{\mathfrak{a}-\mathfrak{c}+1}ds^{\mathfrak{b}-\mathfrak{d}+1}(\mathfrak{f}r^{-1})^{\mathfrak{a}+\mathfrak{c}+1}(\mathfrak{g}s^{-1})^{\mathfrak{b}+\mathfrak{d}+1}}(\varphi x)^{\mathfrak{a}+1}(\psi y)^{\mathfrak{b}+1}\right]$$

$$\overset{1}{\mathfrak{c}} + 2\overset{2}{\mathfrak{c}} + \cdots = 2\mathfrak{c} \qquad \overset{1}{\mathfrak{d}} + 2\overset{2}{\mathfrak{d}} + \cdots = 2\mathfrak{d}$$

$$\overset{1}{\mathfrak{c}} + \overset{2}{\mathfrak{c}} + \cdots = \mathfrak{c} \qquad \overset{1}{\mathfrak{d}} + \overset{2}{\mathfrak{d}} + \cdots = \mathfrak{d}$$

$$\mathfrak{c} + \mathfrak{m} = \mathfrak{a} \qquad \mathfrak{d} + \mathfrak{n} = \mathfrak{b}$$

ce qui, comparé aux expressions trouvées au commencement de ce N°. et du précédent, conduit au résultat suivant:

$$F(x,y) = F(r,s) + S\left[\frac{d^{\mathfrak{a}}\left[\left((\mathfrak{f}r)^{-1}\right)^{-\mathfrak{a}-1}\frac{d\,F(r,s)}{dr}\right]}{(\mathfrak{a}+1)!\;dr^{\mathfrak{a}}}(\varphi x)^{\mathfrak{a}+1}\right] +$$

$$S\left[\frac{d^{\mathfrak{b}}\left[\left((\mathfrak{g}s)^{-1}\right)^{-\mathfrak{b}-1}\frac{d\,F(r,s)}{ds}\right]}{(\mathfrak{b}+1)!\;ds^{\mathfrak{b}}}(\psi y)^{\mathfrak{b}+1}\right] +$$

$$S\left[\frac{d^{\mathfrak{a},\mathfrak{b}}\left[\left((\mathfrak{f}r)^{-1}\right)^{-\mathfrak{a}-1}\left((\mathfrak{g}s)^{-1}\right)^{-\mathfrak{b}-1}\frac{d^2\,F(r,s)}{dr\cdot ds}\right]}{(\mathfrak{a}+1)!\;(\mathfrak{b}+1)!\;dr^{\mathfrak{a}}\,ds^{\mathfrak{b}}}(\varphi x)^{\mathfrak{a}+1}(\psi y)^{\mathfrak{b}+1}\right]$$

ou bien à celui-ci:

$$F(x,y) = F(r,s) +$$

$$S\left[\frac{d^{\mathfrak{a}}\left(\mathfrak{f}r^{\mathfrak{a}+1}\frac{dF(r,s)}{dr}\right)}{(\mathfrak{a}+1)!\;dr^{\mathfrak{a}}}(\varphi x)^{\mathfrak{a}+1}\right] + S\left[\frac{d^{\mathfrak{b}}\left(\mathfrak{g}s^{\mathfrak{b}+1}\frac{dF(r,s)}{ds}\right)}{(\mathfrak{b}+1)!\;ds^{\mathfrak{b}}}(\psi y)^{\mathfrak{b}+1}\right]$$

$$+ S\left[\frac{d^{\mathfrak{a},\mathfrak{b}}\left(\mathfrak{f}r^{\mathfrak{a}+1}\,\mathfrak{g}s^{\mathfrak{b}+1}\frac{d^2\,F(r,s)}{dr\cdot ds}\right)}{(\mathfrak{a}+1)!\;(\mathfrak{b}+1)\;dr^{\mathfrak{a}}\,ds^{\mathfrak{b}}}(\varphi x)^{\mathfrak{a}+1}(\psi y)^{\mathfrak{b}+1}\right]$$

et, en réunissant les termes d'égales dimensions par rapport à $\varphi x$ et $\psi y$:

$$F(x,y) = F(r,s) + \mathfrak{f}r\cdot\frac{d\,F(r,s)}{dr}\varphi x + \mathfrak{g}s\cdot\frac{d\,F(r,s)}{ds}\psi y$$

$$+ S\left[\frac{d^{\mathfrak{a}+1}\left(\mathfrak{f}r^{\mathfrak{a}+2}\frac{d\,F(r,s)}{dr}\right)}{(\mathfrak{a}+2)!\;dr^{\mathfrak{a}+1}}(\varphi x)^{\mathfrak{a}+2} + \frac{d^{\mathfrak{b},\mathfrak{c}}\left(\mathfrak{f}r^{\mathfrak{b}+1}\,\mathfrak{g}s^{\mathfrak{c}+1}\frac{d^2\,F(r,s)}{dr\cdot ds}\right)}{(\mathfrak{b}+1)!\;(\mathfrak{c}+1)!\;dr^{\mathfrak{b}}\,ds^{\mathfrak{c}}}\times\right.$$

$$\mathfrak{b} + \mathfrak{c} = \mathfrak{a}$$

$$\left.(\varphi x)^{\mathfrak{b}+1}(\psi y)^{\mathfrak{c}+1} + \frac{d^{\mathfrak{a}+1}\left(\mathfrak{g}s^{\mathfrak{a}+2}\frac{d\,F(r,s)}{ds}\right)}{(\mathfrak{a}+2)!\;ds^{\mathfrak{a}+1}}(\psi y)^{\mathfrak{a}+2}\right]$$

Enfin, en remplaçant $\mathfrak{f}x$, $\varphi x$, $\mathfrak{g}y$, $\psi y$ respectivement par $\varphi x$, $t$, $\psi y$, $u$, notre proposition pourra être énoncée de la manière suivante:

$$\text{Si} \quad r = x - t\cdot\varphi x$$
$$\text{et} \quad s = y - u\cdot\psi y$$

on a généralement pour une fonction quelconque $F$:

$$F(x, y) =$$

$$F(r,s) + \varphi r\cdot\frac{dF(r,s)}{dr}\,t + \frac{d\left(\varphi r^2\,\frac{dF(r,s)}{dr}\right)}{1\cdot 2\, dr}\,t^2$$

$$+ \psi s\cdot\frac{dF(r,s)}{ds}\,u + \varphi r\cdot\psi s\cdot\frac{d^2F(r,s)}{dr\cdot ds}\,tu$$

$$+ \frac{d\left(\psi s^2\,\frac{dF(r,s)}{ds}\right)}{1\cdot 2\cdot ds}\,u^2$$

$$+ \frac{d^2\left(\varphi r^3\,\frac{dF(r,s)}{dr}\right)}{1\cdot 2\cdot 3\, dr^2}\,t^3 + \frac{d^3\left(\varphi r^4\,\frac{dF(r,s)}{dr}\right)}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4\, dr^3}\,t^4 \text{ etc.}$$

$$+ \frac{d\left(\varphi r^2\cdot\psi s\,\frac{d^2F(r,s)}{dr\cdot ds}\right)}{1\cdot 2\, dr}\,t^2u + \frac{d^2\left(\varphi r^3\cdot\psi s\,\frac{d^2F(r,s)}{dr\cdot ds}\right)}{1\cdot 2\cdot 3\, dr^2}\,t^3u \text{ etc.}$$

$$+ \frac{d\left(\varphi r\cdot\psi s^2\,\frac{d^2F(r,s)}{dr\cdot ds}\right)}{1\cdot 2\, ds}\,tu^2 + \frac{d^2\left(\varphi r^2\cdot\psi s^2\,\frac{d^2F(r,s)}{dr\cdot ds}\right)}{1\cdot 2\,\cdot\, 1\cdot 2\, dr\cdot ds}\,t^2u^2 \text{ etc.}$$

$$+ \frac{d^2\left(\psi s^3\,\frac{dF(r,s)}{ds}\right)}{1\cdot 2\cdot 3\, ds^2}\,u^3 + \frac{d^2\left(\varphi r\cdot\psi s^3\,\frac{d^2F(r,s)}{dr\cdot ds}\right)}{1\cdot 2\cdot 3\, ds}\,tu^3$$

$$+ \frac{d^3\left(\psi s^4\,\frac{dF(r,s)}{ds}\right)}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4\, ds^3}\,u^4$$

résultat qu'on reconnaitra s'accorder parfaitement avec celui que *Laplace* a obtenu en étendant le théorème de *Lagrange* au cas de plusieurs variables (Mécanique céleste, première partie, livre II, chap. III, n°. 21), si toutefois on ne néglige pas d'observer, que chacune des quantités $z$ et $z'$ de la mécan. cél. y est fonction des deux variables $x$ et $x'$, tandisque chez nous les $\varphi x$, $\psi y$, qui leur correspondent, ne sont, jusqu'ici, que des fonctions à une seule variable, cas qui rend évidemment $\frac{dZ^n}{dt'} = \frac{dZ'^{n'}}{dt} = o$.

3. Si dans l'équation (i) on fait $Fx = x$, de sorte que $F'x = 1$, $\frac{F''x}{2!} = \frac{F'''x}{3!} = \cdots\cdots = o$, on aura, à cause de $\mathfrak{d} = \mathfrak{a}$:

$$x = r + S\left[(-1)^{\mathfrak{a}-\overset{1}{\mathfrak{c}}} \frac{(2\mathfrak{a}-\overset{1}{\mathfrak{c}})!}{(\mathfrak{a}+1)!\,\overset{2}{\mathfrak{c}}!\,\overset{3}{\mathfrak{c}}!\cdots(f'r)^{2\mathfrak{a}+1}} \left(\frac{f'r}{1!}\right)^{\overset{1}{\mathfrak{c}}} \left(\frac{f'r}{2!}\right)^{\overset{2}{\mathfrak{c}}} \cdots\cdots (fx)^{\mathfrak{a}+1}\right]$$

$$\overset{1}{\mathfrak{c}} + 2\overset{2}{\mathfrak{c}} + \cdots\cdots = 2\mathfrak{a}$$

$$\overset{1}{\mathfrak{c}} + 2\overset{2}{\mathfrak{c}} + \cdots\cdots = \mathfrak{a}$$

c'est la formule, à laquelle nous sommes parvenus dans nos recherches sur le *retour des suites* (p. 64).

# ESSAI MONOGRAPHIQUE

## SUR LES ESPÈCES

# D'ÉRIOCAULON DU BRÉSIL,

PAR

M. BONGARD.

## SUITE I[ère].

(Lu le 18 Janvier 1832.)

### *Eriocaulon macrorhizon.* *Tab. XI.*

ACAULE, rhizomate crasso; foliis linearibus pilosis subtus canescentibus; pedunculis piloso-canis; vaginis pilosis. — *Synop.* N°. 50.

---

*Radix* perennis, fibrosa; fibrillae e rhizomate crasso obliquo fusco, rigidiusculae, subsimplices. Collum residuis foliorum emarcidorum dense tectum.

*Caulis* epigaeus nullus.

*Folia* erecta, linearia, angustissima, obtusiuscula, tenuiter striata, juniora tota villoso-incana, demum in pagina superiore calvescentia, ad insertionem pilis fuscis dense cincta, pollices 2—3½ longa, vix lineam lata.

*Pedunculi* solitarii v. bini, erecti, obscure quadrangulares, striati, piloso- s. villoso-cani, 4 pollices et quod excedit longi.

*Vaginae* angustae, albo-villosae, apice obtusae et obscure bifidae, pollice paulo breviores.

*Capitulum* hemisphaericum, squamis involucrantibus magnis, semunciam circiter latum.

*Squamae* involucrantes steriles, imbricatae, ex ovato longe-acuminatae, apicibus (in sicco) reflexis, villosae, margine subtilissime ciliatae, nervis 3 notatae, pallide fuscae, 4 lin. longae, sesquilineam basi latae.

*Bracteae* clavatae, apice obtusae, basi in petiolum quasi attenuatae, pilis tenuibus albis totae obsitae, albae.

*Receptaculum* valde pilosum: pilis longis, mollibus, albis.

*Flores masculi* in ambitu, pedicellati, apice flavicantes.

*Perigonii exterioris* partes tres liberae, oblongae, obtusae, concavae, apice pilis albis ornatae, nervulo medio percurrente, albae.

*Interius* in tubum obconicum, album, apice trilobum connatum: lobulis obtusiusculis, margine pilis tenuibus parce instructis.

*Stamina* tria, exserta. *Filamenta* filiformia, alba. *Antherae* oblongae, flavae. Rudimentum pistilli abortivi.

*Flores feminei* in disco, pedicellati, pauci.

*Perigonii exterioris* partes tres, liberae, oblongae, utrinque attenuatae, apice acutae ibique pilis paucis brevibus vestitae, nervo medio tenui, saepius recurvae, lutescentes.

*Interioris* tres partes liberae, oblongae, concaviusculae, exterioribus latiores, obtusae, versus apicem pilosae, nervulo medio notatae, totae albae.

*Ovarium* ovatum, trigonum, glabrum.

*Styli* 3, basi connati, ultra medium liberi, longitudine perigonii interioris.

*Stigmata* clavata, obtusa. *Appendices* tres, filiformes, stylis longiores.

Fructus maturus non observatus.

### *Explicatio Tab. XI.*

1) *a.* Squama capituli exterior, naturali magnitudine paulo major.

*b.* Eadem aucta.

2) Flos masculus cum bractea receptaculique particula.
3) Flos femineus, cum perigonio interiore clauso.
4) Floris feminei perigonium exterius separatum.
5) Perigonium interius floris feminei adapertum cum pistillo. — Omnia valde aucta.

---

## *Eriocaulon piliferum.* Tab. XII.

Acaule, rhizomate crasso; foliis linearibus villosis margine pilosis; pedunculis pubescentibus; vaginis pilosis apice obtusis et piloso-barbatis. — *Synopsis* N°. 51.

---

*Radix* perennis, fibrosa: fibrillis simplicibus crassiusculis.

*Rhizoma* crassum, plus minus contractum, modo perpendiculare, modo obliquum, fibris foliorum emarcidorum tectum pilisque rufis obsitum.

*Caulis* epigaeus nullus.

*Folia* erecta v. patentia, linearia, versus apicem parum angustiora, modo acuta, modo obtusiuscula, utrinque villosa s. pubescentia, margine pilis longis mollibus albis vestita, ad insertionem pilis rufis dense obducta, 2 pollices et ultra longa, vix lineam lata.

*Pedunculi* solitarii v. bini, erecti, rigidiusculi, striati, subangulati, pilis brevibus, tenuibus, appressis pubescentes canescentesque, 2 — 3-pollicares et ultra.

*Vaginae* angustae, striatae, uti folia pilosae, apice obtusae pilisque albis longis barbatae, basi fasciculo pilorum rufescentium dense cinctae, pollice paulo breviores.

*Capitulum* subhemisphaericum, squamis magnis, disco duplo longioribus involucratum, semiunciam et ultra latum.

*Squamae* involucrantes steriles, imbricatae, ovato-lanceolatae, acutae, utrinque margineque pilosae s. pubescentes, praesertim inferiores, quae saepius pilis

longis, foliorum instar, margine vestitae, demum plus minus calvescentes, pallide fuscae parumque nitentes, 3 circiter lineas longae, 1½ lin. latae.

*Bracteae* oblongae, basi attenuatae, apice obtusae, concaviusculae, pilis albis dense obsitae, flore paulo breviores.

*Receptaculum* dense pilosum: pilis elongatis albis.

*Flores masculi* cum femineis mixti, pedicellati.

*Perigonii exterioris* partes tres, liberae, obovatae, obtusae, concavae, apice dense pilosae, nervo medio instructae, albae.

*Interioris* partes in tubum obconicum, apice trilobum connatae: lobulis acutis margineque pilosis.

*Stamina* tria, longe exserta. *Filamenta* filiformia, alba. *Antherae* oblongae. Pistillum abortivum tripartitum.

*Flores feminei* sessiles.

*Perigonii exterioris* partes tres liberae, oblongae, concaviusculae, apice tenuiter pilosae, albidae.

*Interioris* partes 3 oblongae, concaviusculae, obtusae, basi attenuatae, apice margineque pilosae, nervo medio instructae, albae.

*Ovarium* ovatum, trigonum, glabrum.

*Styli* tres, inferne coaliti, a medio ad apicem usque liberi, perigonio interiore breviores. *Stigmata* obtusa. *Appendices* tres, filiformes, simplices, stylis duplo longiores. — Fructus maturus non visus.

## *Explicatio Tab. XII.*

1) Squama capitulum involucrans exterior. 2) Talis interior. 3) Flos masculus cum bractea et receptaculi particula. 4) Flos femineus, cujus perigonium interius clausum. 5) Idem, dempto perigonio exteriore interioreque explicato.

Omnia valde amplificata.

## *Eriocaulon lingulatum.* Tab. XII.

Pusillum; foliis pedunculos subaequantibus confertis lingulatis obtusiusculis, margine ciliatis; pedunculis glabriusculis; vagina glabra, albida. — *Synops.* N°. 24.

---

*Radix* perennis, fibrosa: fibrillis e rhizomate crasso prodeuntibus, simplicibus, crassiusculis, nigro-fuscis.

*Rhizoma* foliorum destructorum residuis obtectum.

*Caulis* nullus.

*Folia* dense caespitosa, erecta v. patentia, parum curva, lingulata, apice modo obtusiuscula, modo acuta, basi dilatata, ad insertionem pilis brevibus albis cincta, superne laevia, subtus striata, utrinque glabra, margine pilis longis ciliata, 8 circiter lineas longa, lineamque medio lata.

*Pedunculi* pauci, erecti, rigidiusculi, subteretes, punctulis rufescentibus scabri, subglabri, foliis vix longiores.

*Vaginae* angustae, apice obtusae, glabrae, basi tantum pilorum alborum fasciculo circumdatae, 3 lin. longae.

*Capitula* hemisphaerica, pisi minoris magnitudine.

*Squamae* involucrantes imbricatae, steriles, lato-ovatae, basi truncatae, apice acutiusculae, utrinque pilosae ciliataeque, prope basin glabrae, lineam et quod excedit longae, lineaque paulo angustiores.

*Bracteae* obovatae, longe attenuatae, concaviusculae, nervo medio instructae, versus apicem pilis margine vestitae, fuscescentes.

*Receptaculum* dense pilosum: pilis longis albis.

*Flores masculi* cum femineis mixti, pedicellati.

*Perigonii exterioris* partes tres liberae, obovatae, basi longe attenuatae, acutae, concavae, ad apicem piloso-ciliatae, nervo medio tenui, vix perceptibili, fuscae.

*Interioris* partes in tubum obconicum, album, apice trilobum concretae: lobulis lanceolatis, acutis.

*Stamina* 3, exserta. *Filamenta* filiformia, alba. *Antherae* oblongae. Pistillum abortivum e filis tribus, subliberis.

*Flores feminei* sessiles.

*Perigonii* partes omnes liberae. *Exterioris* tres lanceolatae, basi attenuatae, concaviusculae, acutae, margine ab apice usque ultra medium pilis longis albis ciliatae, fuscae.

*Interioris* tres partes oblongae, obtusiusculae, basi attenuatae, concaviusculae, a medio ad apicem ciliatae, albae.

*Ovarium* ovatum, trigonum, glabrum.

*Styli* 3, basi coaliti, ultra medium liberi, perigonii interioris longitudine.

*Stigmata* obtusa. *Appendices* tres, filiformes, simplices, stylis longiores.

*Semina* non visa.

### *Explicatio Tab. XII.*

1) Squama capituli exterior.
2) Flos masculus una cum bracteâ receptaculique particula.
3) Flos femineus.
4) Idem, ablato perigonio exteriore.

Omnia multum aucta.

## *Eriocaulon elegans. Tab. XIII.*

Acaule; foliis caespitosis vaginas subaequantibus setaceis pubescentibus, basi fusco-lanatis; pedunculis caespitosis tenuibus glabris; vaginis pubescentibus. — *Synopsis* N°. 71.

---

*Radix* annua, fibrosa: fibrillis tenuibus subsimplicibus.

*Folia* dense caespitosa, erecta, setacea, hinc plana illinc convexa, acuta, submucronata, juniora pubescentia, demum glabra, scabriuscula, basi incrassata et fusco-lanata, vaginas subaequantia v. saepius parum excedentia, pollices circiter 4 longa, $\frac{1}{4}$ lineae lata.

*Pedunculi* caespitosi, elongati, erecti, tenues, subquadrangulares, glabri, 12—15 pollices longi, pallide fusci, nitentes.

*Vaginae* angustae, pubescentes, inferius pilosae, apice oblique fissae, acutae, 3 pollices longae.

*Capitula* eleganter radiata, magnitudine florum Matricariae Chamomillae.

*Squamae* involucrantes steriles, imbricatae, extimae obovatae, basi attenuatae, nervo medio percursae, glabrae, fuscescentes; marginales radiantes, ovatae, basi longe attenuatae, concaviusculae, disco duplo longiores, albae.

*Bracteae* breves, oblongae, obtusae, carinatae, albae.

*Receptaculnm* pilosum: pilis albis.

*Flores masculi* cum femineis mixti, pedicellati.

*Perigonii exterioris* partes 3 liberae, oblongae, obtusae, concaviusculae, glabrae, albae.

*Interioris* partes tres liberae (an semper?) exterioribus similes, sed tenuiores.

*Stamina* 3, brevissima. *Antherae* oblongae, flavidae.

*Flores feminei* longe pedicellati, frequentes in ambitu.

*Perigonium exterius* e 3 partibus oblongis, concavis, obtusis, glabris, albis, in aliqua distantia sub ovario insertis formatum.

*

*Interioris* partes tres exterioribus triplo longiores, lineares, obtusiusculae, glabrae, arcte inter se cohaerentes, sed non concretae, pistillo longiores.

*Ovarium* ovatum, trigonum, glabrum, pedicello suffultum.

*Styli* tres, subliberi, stigmatibus obtusis. *Appendices* tres, breves, stylis triplo breviores.

*Semina* oblonga, rugulosa, purpurascentia.

### *Explicatio Tab. XIII.*

1) Squama capituli exterior. 2) Squama capituli marginalis radians. 3) Flos masculus clausus. 4) Idem apertus. 5) Flos femineus clausus. 6) Idem dempto perigonio exteriore. 7) Pistillum. 8) Semen. — Omnia valde aucta.

---

## *Eriocaulon nitidum. Tab. XIV.*

Acaule; foliis caespitosis vaginis brevioribus patenti-diffusis linearibus obtusis glabris; pedunculis caespitosis vaginisque adpresse pilosiusculis. — *Synopsis* N°. 74.

---

*Radix* annua, fibrosa: fibrillis tenuibus, simpliciusculis, albidis.

*Folia* dense caespitosa, patenti-diffusa, linearia v. lineari-lanceolata, plus minus obtusa, pube exili hinc inde adspersa, ceterum glabra, supra plana, laevia, subtus nervoso-striata, 5 circiter lineas longa lineamque dimidiam lata, vaginis duplo fere breviora.

*Pedunculi* aggregati, (in nostro *unico* specimine 3) erecti, angulosi, pubescentes s. pilosiusculi, 3—4 pollices et ultra longi.

*Vaginae* angustae, striatae, pilis adpressis albis obsitae, apice subbifidae, circiter 10 lineas longae.

*Capitula* radiantia, florum Achilleae Ptarmicae magnitudine.

*Squamae* involucrantes exteriores steriles, imbricatae, oblongae, apice latiores, obtusae, nervo medio percursae, flavicantes nitentesque; *marginales*

radiantes, disco plus duplo longiores, oblongae, basi attenuatae ibique nervo sursum evanescente instructae, apice obtusae, albo-nitentes.

*Bracteae* partibus perigonii exterioris florum masculorum similes, parvae, albae.

*Receptaculum* pilosum.

*Flosculi masculi* cum femineis mixti, pedicellati.

*Perigonii exterioris* partes 3 liberae, obovatae v. oblongae, obtusae, concavae, glabrae, albae.

*Interioris* tres liberae, subellipticae, concavae, exterioribus paulo breviores, albae.

*Stamina* 3, modo parum exserta, modo brevissima. *Filamenta* filiformia, alba. *Antherae* oblongae, flavicantes.

*Flores feminei* pedicellati.

*Perigonii exterioris* 3 partes liberae, ovatae, concavae, breves.

*Interioris* 3 partes lineares v. oblongae, obtusae, concavae, inferius pilis nonnullis tenuibus margine vestitae, arcte cohaerentes, sed non connatae, exterioribus triplo longiores.

*Ovarium* oblongum, trigonum, glabrum. *Styli* tres, subliberi, perigonio interiore breviores, stigmatibus obtusis. *Appendices* nullae.

*Semen* non visum.

## *Explicatio Tab. XIV.*

1) Squama capituli exterior. 2) Squama capituli marginalis radians. 3) Alia squama radians ex intima serie. 4) Flos masculus. 5) Idem, perigonio exteriore ablato. 6) Flos femineus clausus. 7) Idem apertus, absque perigonio exteriore. Omnia valde amplificata.

## *Eriocaulon anthemiflorum.* *Tab. XV.*

Caulescens; caule brevi simplici nudo; foliis radicalibus confertis brevissimis linearibus obtusiusculis; pedunculo terminali subsolitario vaginaque pubescente. — *Synop.* N°. 75.

---

*Radix* annua (?), fibrosa: fibrillis crassiusculis subsimplicibus albidis.

*Folia* radicalia caespitosa, conferta, linearia, obtusiuscula, juniora pubescentia, demum glabra, ad insertionem pilis brevibus albis dense cincta, 4—5 lin. longa, semilineâ paulo angustiora.

*Caulis* simplex, teres, a basi ad apicem nudus, glaber, 9—12 lin. longus, ex apice pedunculum unicum (rarius 2) emittens, foliis floralibus nonnullis, linearibus, acuminatis, pubescentibus, inaequalibus circumdatum.

*Pedunculus* subquadrangularis, erectus, rigidiusculus, pubescens, pallidus, $4\frac{1}{2}$—5 pollices altus.

*Vagina* angusta, striata, pubescens, apice obliqne fissa, pollicem circiter longa, intense viridis.

*Capitulum* subhemisphaericum, radiatum, diametro circiter 5-lineali.

*Squamae exteriores* involucrantes, steriles, imbricatae, oblongae, acutiusculae s. obtusae, fusco-nitentes, glabrae; *marginales* radiantes, disco duplo longiores, oblongae, deorsum attenuatae, albae, nitentes.

*Bracteae* ovatae, utrinque attenuatae, acutae, concavae, ad medium pilis nonnullis sparsis margine vestitae, albae.

*Receptaculum* pilosum: pilis brevibus albis.

*Flores masculi* praeprimis in ambitu, sed et cum femineis in disco mixti, pedicellati.

*Perigonii exterioris* partes tres liberae, ovatae, utrinque attenuatae, acutae, concavae, medio ad marginem, bractearum instar, quibus simillimae, pilis paucis instructae, albae.

*Interioris* partes in tubum obconium, apice trilobum coalitae: lobulis acutis.

*Stamina* tria, exserta. *Filamenta* filiformia, alba. *Antherae* oblongae, flavae.

*Flores feminei* pedicellati.

*Perigonii exterioris* partes 3 liberae illisque floris feminei simillimae.

*Interioris* oblongae, obtusae, basi attenuatae, parum concavae, glabrae, albae, exterioribus paulo breviores.

*Ovarium* ovatum, trigonum, glabrum.

*Styli* 3, breves, usque ad medium coaliti, superius liberi. *Stigmata* valde obtusa, quasi clavata. *Appendices* tres, filiformes, stylis multo longiores.

### *Explicatio Tab. XV.*

1) Squama capituli exterior.
2) Squama capituli marginalis, radians.
3) Flos masculus cum bractea et receptaculi particula.
4) Flos femineus.
5) Idem, perigonio exteriore ablato interioreque explicato. — Omnia valde aucta.

---

## *Eriocaulon blepharophoron. Tab. XVI.*

Foliis pedunculos subaequantibus confertis lineari-lanceolatis acutis dense ciliatis; pedunculis caespitosis pubescentibus; vaginis brevissimis apice barbatis. — *Synopsis* N°. 23.

---

*Radix* perennis, fibrosa: fibrillis caespitosis, elongatis, subsimplicibus, fuscescentibus, e rhizomate crasso, plus minus contracto prodeuntibus.

*Caulis* epigaeus nullus.

*Folia* dense conferta, erecta s. explanata, e basi dilatata lineari-lanceolata, acuta, rarius obtusiuscula, plana, utrinque glabra, superne laevia pallidioraque, subtus striata, margine pilis mollibus dense ciliata, ad insertionem pilis albis dense cincta, 2 — $2\frac{1}{2}$ pollic. longa, a $1\frac{1}{2}$ — 2 lin. medio lata.

*Pedunculi* caespitosi, erecti, rigidi, angulosi, striati, pubescentes, demum glabriusculi, folia subaequantes, $1\frac{1}{2}$ — 2-pollicares.

*Vaginae* brevissimae, 2 lin. circiter longae, laxae, apice irregulariter fissae barbataeque.

*Capitula* hemisphaerica, piloso-lanata, seminis sinapis nigri magnitudine.

*Squamae* involucrantes paucae, imbricatae, steriles, ovatae v. ovato-lanceolatae, obtusae, concaviusculae, a medio ad apicem albo-pilosae margineque ciliatae, pallide fuscae, nitentes.

*Bracteae* oblongae, acutae, basi attenuatae, margine pilis albis longis ciliatae, nervo medio percursae, fuscae.

*Receptaculum* valde pilosum.

*Flores masculi* cum femineis mixti, pedicellati.

*Perigonii exterioris* partes tres liberae, oblongae, acutae, basi attenuatae, concavae, nervo medio notatae, margine pilis albis ciliatae, fuscae.

*Interioris* partes in tubum obconicum, albidum, apice trilobum connatae: lobulis brevibus obtusis.

*Stamina* 3, exserta. *Antherae* oblongae.

*Feminei flores* sessiles.

*Perigonii exteris* partes 3 liberae, obovatae, apiculatae, basi longe attenuatae, nervo medio valido percursae, a medio ad apicem ciliatae, fuscae.

*Interioris* 3 partes liberae, exteriores aequantes, oblongae, obtusae, basi parum attenuatae, a medio ad apicem ciliatae, enerves, albidae.

*Ovarium* ovatum, trigonum, glabrum. *Styli* 3, usque ad medium coaliti, superius liberi; *Stigmatibus* obtusis. *Appendices* tres, basi concretae stylosque quasi cingentes, ultra medium liberae, fascioliformes, apice profunde bifidae.

*Semina* non visa.

*Explicatio Tab. XVI.*

1) Squama capituli exterior.
2) Flos masculus.
3) Femineus flos.
4) Idem, dempto perigonio exteriore, interioreque explicato.
Omnia perquam aucta.

---

## *Eriocaulon plantagineum. Tab. XVII.*

Subacaule; foliis lineari-lanceolatis acutis subtus albicantibus; pedunculis vaginisque albicantibus glabris. — *Synopsis* N°. 21.

---

*Radix* biennis (?), subhorizontalis, fibrosa, albida: fibrillis tenuibus simpliciusculis.

*Rhizoma* pl. min. elongatum, apice foliorum emortuorum residuis fibrisque tectum.

*Caulis* epigaeus vix ullus v. brevissimus.

*Folia* caespitosa, erecta, lineari-lanceolata, acuta, rarius pilis paucis longis margine instructa, plana, utrinque striata, superne viridia, subtus albicantia, prope basin pilis longis mollibus albis vestita ciliataque, 2 — 2½ pollices longa, 1½ — 2 lineas medio lata.

*Pedunculi* caespitosi, folia paulo superantes, erecti, teretiusculi, striati, glabri, albicantes, (in sicco parum nitentes) 2½ — 3 pollices longi.

*Vaginae* angustae, apice oblique fissae, glabrae, albae, pollice paulo breviores.

*Capitula* subglobosa, semine piperis nigri minora.

*Squamae* involucrantes paucae, steriles, imbricatae, lato-ovatae, acutae, basi truncatae, extus pilosae, nervo medio percursae, pallide fuscescentes.

*Bracteae* obovatae, basi longe attenuatae, ad apicem ciliatae, perigonii exterioris masculi floris partibus similes, fuscae.

*Receptaculum* pilosum.

*Flores masculi* cum femineis mixti, pedicellati.

*Perigonii exterioris* partes 3 liberae, obovatae, basi attenuatae, concavae, apice pilis brevibus crassiusculis ciliatae, fuscae.

*Interioris* partes 3 in tubum obconicum, apice trifidum connatae: lobulis lanceolatis obtusis.

*Stamina* 3, exserta. *Antherae* oblongae.

*Flores feminei* sessiles.

*Perigonii exterioris* partes tres liberae, obovato-oblongae, deorsum attenuatae, apice pilis crassis brevibus albis ciliatae, fuscae.

*Interioris* partes 3 liberae, exteriores adaequantes, concaviusculae, ex obovato oblongae, apice ciliatae, tenuissimae, albae.

*Ovarium* ovatum, trigonum, glabrum.

*Styli* 3, basi coaliti, superius liberi: *Stigmatibus* obtusis. *Appendices* tres, lineares, stylis duplo longiores, apice bifidae.

*Semina* non visa.

### *Explicatio Tab. XVII.*

1) Squama capituli exterior.
2) Flos masculus cum bracteâ.
3) Flos femineus.
4) Idem, perigonio exteriore ablato, interioreque replicato, ut pistillum in adspectum veniat.

Omnia valde aucta.

## *Eriocaulon corymbosum. Tab. XVIII.*

Acaule; foliis caespitosis lineari-lanceolatis acuminatis ciliatis; pedunculis glabris; vaginis basi lanatis integris. — *Synopsis* N°. 39.

---

*Radix* . . . . . . . .

*Caulis* epigaeus nullus.

*Folia* caespitosa, erecta, lineari-lanceolata, acuminata, plana, utrinque striata, margine pilis brevibus mollibus albis ciliata, basi dilatata pilisque albis dense cincta, 6 — 7 pollices longa, circiter 2 lin. medio lata.

*Pedunculi* erecti, compresso-plani, striati, quasi e pluribus pedunculis connatis formati, apice in plures ramos simplices capituliferos divisi, glabri, folia subaequantes, illis vel parum longiores vel breviores, 6 — 7 pollices et ultra longi, 1½ lin. circiter lati, pallidi, in sicco nitentes.

*Vaginae* pedunculum arcte cingentes, glabrae, striatae, concolores, basi lana alba, sicut folia, involutae, apice subtruncatae, integrae v. leviter tantum erosae, ab 1 ad 1½ pollicem et ultra longae.

*Capitula* hemisphaerica, albo-villosa, pisi magnitudine.

*Squamae* involucrantes steriles, imbricatae, lato-ovatae, obtusae s. acutiusculae, pubescentes, margine, apicem versus, dense ciliatae, nervo medio percursae, fuscae.

*Bracteae* elongatae, oblongae, concavae, margine ciliatae et apice praeprimis pilis longis albis dense vestitae, fuscae.

*Flores masculi* cum femineis mixti, breviter pedicellati.

*Perigonii exterioris* partes 3 liberae, obovatae, deorsum attenuatae, apice acutae, concaviusculae, margine apiceque dense pilis albis vestitae, nervo medio notatae, fuscae.

*Interioris* partes in tubum obconicum, albidum, apice 3-lobum connatae: lobulis acutiusculis.

*Stamina* 3, exserta. *Antherae* oblongae.

*Flores feminei* sessiles.

*Perigonii exterioris* partes 3 liberae, obovatae, attenuatae, apice valde latae, rotundatae, apiculatae, margine, praeprimis apicem versus, pilis longis albis dense vestitae, concaviusculae, nervo medio instructae, fuscae.

*Interioris* 3 partes liberae, oblongae, obtusae, inferne paulo angustiores, pilis mollibus albis a medio ad apicem ciliatae, exterioribus multo tenuiores, albae.

*Ovarium* ovatum, trigonum, glabrum.

*Styli* 3, prope basin coaliti, superius liberi. *Stigmata* obtusa, apice pilis subtilissimis albis munita. *Appendices* tres, filiformes, simplices, stylis duplo fere longiores.

*Semina* non visa.

*Explicatio Tab. XVIII.*

1) Squama capituli exterior.
2) Flos masculus cum bractea.
3) Flos femineus.
4) Idem, dempto perigonio exteriore.

Omnia valde aucta.

---

## *Eriocaulon mucronatum.* Tab. XIX.

Acaule; foliis brevibus dense confertis linearibus mucronatis apice subincurvis, parce pilosis; pedunculo subsolitario piloso; vagina folia subaequante pilosa apice bifida. — *Synopsis* N°. 26.

---

*Radix* annua, fibrosa: fibrillis crassiusculis, subsimplicibus, albis.

*Caulis* nullus.

*Folia* brevia, 6—7 lin. tantum longa, dense conferta, linearia, mucronata, apice saepius incurva, pilis brevibus parce vestita, demum calvescentia, ad insertionem pilis brevibus fuscis dense cincta, vix $\frac{1}{4}$ lin. lata.

*Pedunculus* subsolitarius, angulosus, pilis mollibus albis plus min. patentibus vestitus, 2—3-pollicaris.

*Vagina* folia subaequans, modo illis paulo longior, modo brevior, laxiuscula, apice irregulariter bifida, pilosa, fuscescens.

*Capitulum* subglobosum, albo-villosum, semine sinapis minus.

*Squamae* involucrantes steriles, imbricatae, paucae, lanceolatae, acuminatae, nervo medio percursae, a medio ad apicem usque ciliatae.

*Bracteae* ovatae, deorsum attenuatae, concavae, a medio ad apicem dorso pilosae margineque ciliatae.

*Receptaculum* pilosum.

*Flores masculi* pedicellati.

*Perigonii exterioris* partes tres liberae, bracteis conformes, sed illis minores, concavae, versus apicem dorso margineque pilis albis vestitae.

*Interioris partes* in tubum obconicum, profunde trifidum connatae: lobulis lanceolatis acutis.

*Stamina* 3, tubo breviora.

*Flores feminei* non observati.

*Adnot.* Tria solummodo hujus speciei adsunt specimina, floribus haud satis evolutis; quare completam offerre analysin non potuimus.

### *Explicatio Tab. XIX.*

1) Squama capituli exterior.
2) Flos masculus cum bractea receptaculique particula. — Omnia valde aucta.
3) Folium lente auctum.

## *Eriocaulon lanuginosum. Tab. XIX.*

Acaule; foliis dense caespitosis brevibus linearibus recurvis piloso-lanuginosis; pedunculis fasciculatis piloso-canescentibus; vaginis brevibus apice laciniatis. — *Synopsis* N°. 28.

---

*Radix* biennis (?), fibrosa: fibrillis crassiusculis, simplicibus, albis.

*Caulis* nullus.

*Folia* dense caespitosa, brevia, 5—6 lin. circiter longa, $\frac{1}{4}$ lin. vix lata, linearia, acuta, sed non mucronata, saepissime recurva, pilis longis vestita lanugineque alba dense obtecta.

*Pedunculi* fasciculati, tres pluresve aggregati, rigidiusculi, plus minus curvi, angulosi, pilis patentibus, brevibus, mollibus, albis vestiti canescentesque, 3—4 pollices longi.

*Vaginae* breves, foliis tamen communiter paulo longiores, laxiusculae, membranaceae, pilosae, apice irregulariter laciniatae, albidae.

*Capitula* subglobosa, albo-villosa, semine piperis minora.

*Squamae* involucrantes paucae, imbricatae, steriles, lanceolatae, nervo versus apicem evanescente instructae, a medio ad apicem usque ciliatae.

*Bracteae* oblongae, deorsum attenuatae, concavae, subcarinatae, dorso margineque a medio ad apicem pilis albis vestitae.

*Receptaculum* pilosum.

*Flores masculi* pedicellati.

*Perigonii exterioris* partes tres liberae, bracteis conformes, illis autem minores, concavae carinataeve, a medio ad apicem dorso margineque pilosae.

*Interioris* partes in tubum obconicum, tripartitum connatae: partitionibus lanceolatis, vel, quod rarius videtur, omnino liberae oblongaeque.

*Stamina* tria, exserta. Antherae oblongae. Rudimentum pistilli.

*Flores feminei* haud observati.

*Observ.* Quoad habitum praecedenti valde affinis species, a qua tamen satis distincta: foliis non mucronatis lanugineque dense obtectis.

### *Explicatio Tab. XIX.*

1) Squama capituli exterior.
2) Flos masculus cum bractea.
3) Idem, dempto perigonio exteriore.
4) Modificatio perigonii interioris, partes omnino liberas exhibens, una cum staminibus pistillique abortivi rudimento. — Omnia valde amplificata.
5) Folium lente auctum.

# ANDROPOGINEORUM

GENERA

## SPECIESQUE COMPLURES DEFINITIONIBUS NOVIS;

ILLUSTRAVIT

C. B. TRINIUS.

---

(Conv. exhib. die 25 Aprilis 1832.)

Polygama dicuntur gramina ea, quae, in spicula subopposite biflora, flosculum imperfectum inter glumam inferiorem, perfectum intra glumam superiorem habent. Horum autem ea, quorum flosculi compage glumis duriori sunt, *Panicea*, ea, quorum glumae flosculos ipsis teneriores fovent, *Andropoginea* dicuntur. Quae etsi jam detrita videantur, tamen hic praemissu non inutile duximus, ut omissorum in conspectu subsequente quorumdam, Andropogineis ab aliis accensitorum, generum rationes facilius perspicerentur. Nam si in Andropogineis materiae uberioris copia, perianthiorum quasi detrimento, glumis conciliatur, hae minus facile suppressionem patientur, quam perianthia ipsa. Nec ullum fere Andropogineorum invenietur genus, quod valvulae unius alteriusve suppressae exempla non praebeat; glumae alicujus suppressae nullum. Contra in Paniceis, hermaphroditi valvulis semper intactis, glumae, abbreviatae in pluribus, suppressae: altera in Paspalo, Milio, Thuarea, Digitariis nonnullis, utraque, optime monente cel. Kunthio, in Reimaria, vario modo laesae reperiuntur. Quamobrem in *Zoysia*, polygamis quidem generibus associanda, sed uniglumis dicta, tam ob ipsam perianthii positionem, quam ob s. d. glumae suae nervos (9), numero solitum glumae superioris in Andropogineis nervorum numerum excedentes, glumam inferiorem suppressam statuere nequimus; quin

glumas potius ambas suppressas, squamam vero illam exteram, coriaceam, glumae speciem ferentem, flosculum neutrum univalvem, Zoysiamque tali ratione Paniceis adnumerandam esse censemus. *Xerochloa* autem, cur ab Andropogineis excludenda nobis visa sit, suo loco infra fusius describenda, ipsa docebit.

Ob inique distributam materiae plasticae copiam, valvulae Andropogineorum non solum debillimae, sed abortui etiam objectae esse solent. Rarissime in quibusdam (Eulaliae, Polliniae, Dimeriae speciebus) flosculus neuter, in paucissimis (Saccharis muticis) valvula hermaphroditi inferior desideratur; quae tamen in Saccharo abortio vix absoluta, sed, detenta solummodo valvulae, in filum oculis aegre perceptibile conversae, evolutione, incompleta potius dicenda est. Nam cum plurimarum in Andropogineis aristarum basis nil sit nisi filum ejusmodi tenerum atque brevissimum, valvulae ipsius locum tenens; ipsa in Saccharis muticis non evoluta arista, valvula simul integra deprimitur. Multo frequentius autem valvulam hermaphroditi superiorem suppressam invenies, neque tamen id pro uno alterove genere typice, sed, vel in uno eodemque genere, imo specie, vago et inconstanti modo. Praesente igitur in ejusmodi spiculis, reapse bifloris, valvula tantum neutra cum subopposita valvula hermaphroditi inferiori, perianthium bivalve, idque unicum adesse ignaro videri posset; nec nisi attentissimo continget oculo, ut harum valvularum veram positionem conspiciat ita, ut, utra sit inferior (eaque tum neutra), utra superior (perfectior vel seminifera), exacte discernat. Attamen, legem polygamorum universam probe tenenti, vel ipsa jam magnitudo valvulae neutrius, superiorem quamvis flosculi hermaphroditi valvulam, ubi eadem evoluta est, longitudine superans, dubium mox nullum relinquet. Nobis autem ejusmodi flosculi, bini quidem, sed, valvula aut neutra aut hermaphroditi superiori suppressa, e duabus tantum valvulis compositi, brevitatis causa, spiculae *pseuduniflorae*, vel *perianthii inversi* termino designabuntur.

Coërcita tali modo in spicula polygama, redundans hic, repressa illic, materia plastica, varias simul profert epiphyses illas, quae, sub villorum, squamarum, aristarum, setarum forma, nunc florificationis nisum restrictum exprimere, nunc partes minus evolutas compensare videntur. Sic squamae, Apludae radiolorum fasciculos

cingentes, totidem vaginulas s. spathas abortivas sistunt; pilorum fasciculi in Anthesteria cymbaria flosculorum, in reliquis Anthesteriis solidorum, verticillum repraesentant. Valvulam perianthii hermaphroditi inferiorem saepissime in aristam aridam contractam esse, supra jam monuimus. Ubi vero haec valvula per totum ambitum suum evoluta est, ibi arista vaga, ut in Sorghis. In Saccharo arundinaceo, in Andropoginibus quibusdam, aristae non nisi rudimentulum invenitur, ita, ut species istae muticae videantur. Multo magis vagae setae glumarum esse solent, cujus rei exemplo prae ceteris sunt Chrysopogonis species. In Andropogone lithophilo glumae, excepta unica spiculae in spica extimae sessilis gluma superiori, omnes setis carent. Illae igitur spicularum in Andropogineis epiphyses, quaecumque sint, primarias generum notas praebere non posse, per se patet; neque Anatherum, nec magis Pollinia, qualis hucusque composita fuit, inter genera numerum obtinebunt.

Quod attinet ad Andropogineorum dispositionem, duplici hanc consideratione niti censemus, primum inflorescentiae, deinde evolutionis florum. Spicae quidem, quas componunt spiculae, utrum simplices sint an compositae, utrum solitariae aut fasciculatae an paniculatae, parum refert; sed utrum spiculae spicas veras, h. e. articulos alterum alteri superpositos componant, nec ne, hoc majoris certe discriminis est. Alia itaque erit inflorescentia spicata (articulata), alia continua. Qua re nituntur termini nostri *rhachis* et *axis*. Illa iterum inflorescentia aut per totam radii floriferi longitudinem distributa, aut in ejusdem apice concentrata et ad articulum solitarium, pauci-vel pluriflorum redacta, secundi ordinis discrimen adfert. Hanc ob rem Apluda, uniarticulata, ab Ischaëmo, multi-articulato, sejungitur. Nam spathae, Apludae articulum involucrantes, sejunctionis rationem haud magis suppeditarent, quam eaedem spathae Andropogones radiis vaginosis a nudis generice separare valent. Sed eam ipsam ob causam cum Andropogone Chrysopogon conjunctus esse nequit. Qui si, luxurie quadam, radiorum suorum apici uniarticulato articulum nonnunquam alterum addit, typicum haud magis exuit inflorescentiae characterem, quam Anthesteriae, in fasciculo terminali typice 7-florae, species, in eodem fasciculo pluribus, quam septem, floribus gaudentes, ejusdem generis esse desinunt.

*

Deinde flosculorum evolutio inquirenda est. Valvulam hermaphroditi superiorem nunc evolutam, nunc suppressam, flosculi neutrius valvulam eodem modo vagam, non in generis notas intrare posse, non est, quod verba faciamus. Verum enim ille ipse flosculus neuter, in quibusdam bivalvis, imo tum stamina, nec raro simul ovarii rudimentum proferens, per integras Andropogineorum turbas, et habitu quodam a reliquis diversas, adeo constans est, ut majoris evolutionis gradum ejusmodi generice distinguendi rationem optimo jure praebeat. Tali modo Ischaemum et Andropogon generice ab invicem differunt. Neque vero spiculae in quovis articulo pedicellatae sessilisque organisatio, nunc pl. min. diversa, nunc in utraque eadem, minoris momenti haberi poterit. Sic Ischaemum, alioquin spicis, aut solitaria aut binis conjugatis insigne, Spodiopogones, Andropogon Pollinias nostras excludit. Quas quidem sejunctiones, si scientiae parum interesse fatendum est, multum sane intersunt quaerentis. Quantumvis enim et in Andropogineis formarum transitus genera naturali quodam vinculo inter se connectat, ita, ut v. gr. Andropogon halepensis Sorghum referat, aut Pollinia Andropogonem; tamen, vel nondum instituto examine florum accuratiori, in illo rhachis articulata Andropogonem, in hac spiculae pedicellatae arista, perianthium ut in sessili perfectum annuntians, Polliniam mox indicabit. Nec facile, quod sciam, tali modo dispositorum generum notabilis quaedam exceptio quaerentem fallet. *Pogonatheri* tantum illius mentio facienda est, quod, reapse inter Ischaemum et Polliniam ambigens, notis stabilibus circumscribi sese non sinit. Eodem, quo cel. KUNTH (rev. gram. p. 493. 494.), modo variantes et ego inveni variorum speciminum spiculas; cum autem utriusque tandem in spicula sessili flosculi bivalvis evolutio, (eaque quam in spicula pedicellata perfectior) gradum indicet, quo usque et hujus graminis typus pervenire possit, Ischaemis monostachyis idem adnumerare, quam genus notis ambiguis definitum certis immiscere malui.

Sequenti itaque modo Andropogineorum, quotquot noverim, genera, infra uberius definienda, secundum characteres comparativos disponenda propono:

I. Spiculae articulis rhacheos articulatae insidentes,

1) Articulis excavatis immersae,

*a)* Hermaphroditae:

Articulis unifloris; spicula sessili; glumis 2, liberis . . Ophiurus.

Articulis bifloris: spicula utraque sessili: inferioris gluma interiori rhachi adnata . . . . . . . . . . Hemarthria.

Articulis bifloris: spicula altera pedicellata . . . . . Rottböllia.

*b)* Femineae in spica inferiores, masculae superiores . . . Tripsacum.

2) Articulis accumbentes,

*a)* Rhachi pluri-articulata: spiculis ad quemvis articulum binis (rarissime pluribus): altera sessili l. brevius-, altera (cum reliquis) longius pedicellata,

*α)* Spiculis heterogeneis (superiori ab inferiore quocumvis modo discrepante):

Inferiore peltata, pseuduniflora, hermaphrodita; superiori biflora, 4-valvi, mascula l. neutra . . . . . . Manisuris.

Inferiore cylindracea, biflora, feminea; superiori lanceolata, mascula . . . . . . . . . . . . . Heteropogon.

Utraque cylindracea: inferiore mascula (mutica); superiore feminea (aristata) . . . . . . . . . Trachypogon.

Inferiore lanceolata (rarius ovata), inverse uniflora vel sesqui-biflora, hermaphrodita; superiore mascula l. tabescente . . . . . . . . . . . . . . Andropogon.

Inferiore biflora: flosculo utroque bivalvi; superiore quocumque modo discrepante . . . . . . . . Ischaemum.

*β)* Spiculis homogeneis, homomorphis:

Pl. min. lanceolatis, acutis, bifloris: flosculo utroque bivalvi . . . . . . . . . . . . . . Spodiopogon.

Lanceolatis, acutis, inverse unifloris . . . . . . . Pollinia.

Lanceolatis, pl. min. acutis, bifloris: flosculo altero 1-valvi, altero bi-valvi . . . . . . . . . . . . . . Saccharum.

Oblongis, obtusis, inverse unifloris vel bifloris: flosculo altero 1—, altero bi-valvi . . . . . . . . . Eriochrysis.

*b*) Articulo in radiolis terminali, solitario,

*α*) Libero:

Spicula in apice radiorum solitaria . . . . . . . . Arthropogon.

Spiculis in apice radiolorum ternîs: duabus pedicellatis . Chrysopogon.

*β*) Spatha involucrato:

Spiculis (praeter squamas steriles intra spatham) in articulo binis: utraque pedicellata . . . . . . . . Apluda.

Spiculis (praeter squamas steriles intra spatham) septem, fasciculatis: media hermaphrodita . . . . . . Anthesteria.

II. Spiculae ad axin continuum (non articulatum) sessiles vel pedicellatae,

1) Heterogeneae . . . . . . . . . . . . . . . . Sorghum.

2) Homogeneae,

*a*) Pedicellatae:

In radiolis jubae thyrsiformis, muticae . . . . . . Imperata.

In racemis fasciculatis jubatisve, aristatae . . . . . Eulalia.

*b*) Sessiles:

Axi accumbentes, aristatae . . . . . . . . . . Dimeria.

Axi excavato immersae, muticae . . . . . . . . Oropetium.

## I. SPICAE RHACHIS ARTICULATA.

### 1. Spiculae articulis profunde excavatis immersae (muticae).

*a*) Mas. et fem. in eadem spicula.

---

### Ophiurus *Gaertn.*

*Rhachis* solubilis vel subcontinua. *Articuli* aut alternatim aut utrinque floriferi. *Spicula* solitaria, *glumis* 2, liberis.

*Gramina* regiones tropicas orbis antiqui vix excedentia, pascua et sicca amantia, 1—5-pedalia, culmo plerumque ramoso, procumbente vel erecto.

*Folia* linearia, praesertim basi pl. min. pilosula.

*Ligula* membranacea.

*Spicae* aut solitariae aut plures fasciculato-alternae, rhachi demum pl. min. fragili, articuli dissepto saepe perforato.

*Spiculae* oblongae, inverso-uniflorae, vel biflorae: flosculo anteriori (inferiori) sterili, posteriori (superiori) fertili.

*Gluma inferior* (anterior) coriacea, 5—7-nervis: nervis saepe obsoletis; *superior* (posterior) chartacea, 2—3-nervis.

*Flosculi* glumas pl. min. aequantes, hyalini, mutici.

*Lodiculae* squamae 2, cuneatae, emarginatae, obsolete nervatae.

*Stamina* 3. *Antherae* lineares.

*Styli* 2. *Stigmata* plumosa.

*Semen* (non nisi *Oph. auriculati* mihi notum) obcordatum, depressum, valvulis multo brevius, liberum, epile, dorso retusum. *Scutellum* ejusdem dimidium excedens.

*Ophiurus corymbosus Gaertn.* Spicis axillaribus aliquot fasciculatis; Articulis alternatim floriferis; Gluma exteriori integra, laevi vel obsolete gibberosa.

*Aegilops exaltata* L. Mant.

*Rottbölla corymbosa* L. sppl.

*Ophiurus corymbosus.* R. et S. II. p. 798. excl., ut videtur, syn. Retzii.

V. spp. Ind. or.

*Obs.* Flosculus exterior modo univalvis, neuter, modo bivalvis, masculus. Spiculae omnes hemiologamae, contra Gaertnerum fil.

*Ophiurus perforatus.* Spicis axillaribus solitariis; Articulis utrinque floriferis (perforatis); Gluma exteriori integra, laevi.

*Rottbölla perforata Roxb.* Corom. II. p. 43. c. ic. R. et S. II. p. 788. Schult. Mant. II. pag. 432.

*Hemarthria? perforata Kth.* rev. gr. p. 153. — V. sp. Ind. or.

*Ophiurus auriculatus.* Spica terminali solitaria; Articulis utrinque floriferis (perforatis); Gluma exteriori tessellato-confragosa, apice auriculata.

*Ratzeburgia pulcherrima Kth.* rev. gr. Tb. 158. — V. spp. e regn. Birman.

*Culmus* tenuis, procumbens, dodrantalis l. pedalis, e nodis inferioribus dense foliiferis surculos fibrasque radicantes emittens. *Vaginae* compressae, laminam aequantes. *Ligula* lineam dimidiam longa, obtusa, pilis albis stipata. *Folia* linearia, obtusa, compressa, expansa linea latiora, infra glandulis adspersa et ex iisdem, praesertim inferne, pilis albis hirsuta, pl. min. pollicaria. *Spica* terminalis circiter bipollicaris, bifariam florifera. *Rhacheos* articuli sesquilineales, minus facile solubiles, utrinque excavati, dissepimento perforato: foraminis oblongi margine circumcirca fimbriato-ciliato. *Gluma exterior* articulo paulo longior, viridi-albens, elliptica, 7-striata, inter strias, jugulis transversalibus junctas, tessellato-excavata, apice biappendiculata: appendice membranacea, obtusa, crenulata. *Perianthium* inversum. *Semen* obcordatum, a parte embryonifera convexum, dorso retusum, fuscum.

## Hemarthria *Br.*

*Rhachis* subcontinua. *Articuli* utrinque floriferi. *Spiculae* solitariae: alterius *gluma* interior rhachi adnata.

*Obs.* Spicula, cui glumae liberae et quae in quovis articulo paulo inferius sita est, aperte est spicula pedicellata articuli cujusvis inferioris, pedicello rhachi adnato. Quam ob rem hoc genus fortasse nimis affine Rottbölliae.

*Gramina* regionum calidiorum utriusque orbis, rivulorum ripas humidas amantia, erecta vel decumbentia, pl. min. ramosa, pedes aliquot alta.

*Folia* linearia.

*Ligula* brevis, plerumque ciliaris, rarius integra membranacea.

*Spicae* nunc solitariae, terminales, nunc una plures axillares, compressae, rhachi pl. min. continua, articulis utrinque et suboppositifloris.

*Spiculae* ovato-lanceolatae, altera ejusdem articuli paulo (sed parum) altius sita; hemiologamae: flosculo anteriori (inferiori) 1-valvi, neutro, posteriori (superiori) 2-valvi, hermaphrodito.

*Gluma inferior* (anterior) coriacea, plana, 7-nervis: nervis pl. min. obsoletis; *superior* (posterior) carinato-subcompressa, chartacea, 2—7-nervis, inferiore plerumque paulo longior: spiculae paulo altius sitae rhachi adnata.

*Flosculi* glumis breviores, hyalino-membranacei, mutici.

*Lodiculae* squamae 2, subquadratae l. cuneatae, pl. min. nervatae.

*Stamina* 3. *Antherae* lineares.

*Styli* 2. *Stigmata* plumosa.

*Semen* . . . . (oblongum, liberum, scutello suo duplo longius?, quantum ex immaturo judicare licet).

*Hemarthria compressa Br.* Spicis terminalibus (interdum et axillaribus) solitariis; Glumis subaequalibus, articulo paulo longioribus, rectis *); Ligula ciliari.

---

*) Qua nota haec et sequentes species ab *Hemarthria uncinata* distinguuntur.

*Rottbölla compressa L.* sppl. R. et S. II. p. 783. (nec, ut videtur, *R. compressa Roxb.*, Schult. Mant. II. p. 430).

V. spp. nov. Holl.

Caespitosa, sesquipedalis, basi radicans et erecto-ramosa. *Ligula* interdum pilis stipata. *Folia* angusto-linearia, glabra. *Spica* 3—4-pollicaris et ultra, viridis. *Gluma interior* dissitissime 2-nervis.

*Hemarthria fasciculata Kth. rev. gr. p.* 153. Spicis axillaribus aliquot fasciculatis; Spiculae liberae glumis articulum paulo excedentibus: interiori paulo longiori, recta; Ligula ciliari.

*Rottbölla fasciculata Desf.* R. et S. II. p. 787.

*Rottbölla spathacea Ten.!*

*Lodicularia fasciculata PB.*

*Lepturus fasciculatus Tr.* fund. agr.

V. spp. Sic. Aegypt. Bras.

*Nodi* culmi interdum pubescentes. *Folia* margine hispida. *Lodiculae* squamae, a Palisotio minus bene depictae, quadratae, truncatae, angulis productiusculis. — Specimina brasiliana folia quam in europaeis et aegyptiacis paulo longiora, interdum basi cum vaginarum marginibus ciliata habent, ceterum non diversa sunt.

*Hemarthria capensis.* Spicis axillaribus subbinis; Spiculae liberae glumis articulum plerumque longe excedentibus: interiori longiori, recta; Ligula membranacea.

V. spp. Cap. b. sp.

Erecta, fere 3-pedalis, *culmo* subsimplici, compresso. *Folia* elongata, linearia, compressa, undique glabra. *Ligula* perbrevis, membranacea. *Spicae* circiter 3-pollicares, ut vaginae ex amethysteo et glauco variae. *Gluma interior*, ut in *Hem. fasciculata*, 7-nervis. — Similis *fasciculatae.*

---

## Rottböllia *L. sppl.*

*Rhachis* solubilis. *Articuli* alternatim altero latere floriferi. *Spiculae* binae: altera sessilis seminifera, altera pedicellata, mascula vel neutra.

*Gramina* tropica utriusque orbis, solo diversissimo familiaria, erecta, 1—10-pedalia.

*Folia* linearia, interdum involuta.

*Ligula* brevis, plerumque ciliaris, interdum membranacea et pl. min. integra.

*Spica* nunc solitaria terminalis, nunc una plures axillares, teretes, solubiles, saepe maxime fragiles. *Articuli* alternatim altero latere excavati et floriferi.

*Spiculae* lanceolato-ovatae: *altera* sessilis, excavationi immersa, hemiologama: flosculo anteriori (inferiori) 1—2-valvi, masculo vel neutro, posteriori (superiori) 2-valvi, hermaphrodito; *altera* pedicello laterali, crasso, complanato insidens, imperfecta (mascula vel tabescens).

*Glumae* spiculae sessilis 2, liberae, nervis obsoletis: exterior coriacea; posterior chartacea.

*Flosculi* membranacei, glumis paulo breviores, mutici.

*Lodiculae* squamae subquadrato-cuneatae, pl. min. nervatae.

*Stamina* 3. *Antherae* lineares.

*Styli* 2. *Stigmata* angusto-plumosa.

*Semen* . . . . .

*Rottböllia coelorhachis Forst!* Spicis axillaribus terminalique subsolitariis; Articulis basi nudis; Gluma spiculae sessilis exteriori laevi; Foliis planis.

*Rottbölla coelorhachis.* R. et S. II. p. 785.

*Rottböllia setosa Presl.* rel. Haenk. I. p. 329.

V. spp. inss. Luzon, Tanna et Waahu.

*Obs.* Specimina Forsteriana a Manillensibus, optime descriptis a cel. Presl, non differunt nisi forte articulis spiculisque nonnihil majoribus. Nec *Rottbölliam exaltatam L. sppl. (R. et S. II. p.* 786. *Mant. II. p.* 431), qualis a Linn. fil. definitur, diversam existimo.

*Rottböllia glandulosa.* Spicis axillaribus terminalibusque 2—3, vel subsolitariis; Articulis basi nudis; Gluma spiculae sessilis exteriori margine glanduloso-denticulata; Foliis compresso-planis.

V. sp. Javan.

*Culmus* 4—5-pedalis, paulo compressus, superne erecto-ramosus. *Vaginae* lamina multo breviores, inferiores glabrae, superiores margine ciliatae et glandulis adspersae. *Ligula* ciliaris. *Folia* lanceolato-linearia, compressa, explanata lineas 6 lata, scabriuscula: inferiora ultrapedalia, superiora rarius basi dense longeque ciliata. *Pedunculi* e vaginis superioribus 1—3, iterum vaginati, 4—5-pollicares. *Spicae* 3-pollicares, virides. *Articuli* circiter bilineales. *Gluma* exterior subenervis, marginibus inferne glandulis circiter 6 prominulis subpectinata. *Spicula pedicellata* tabescens, brevissima.

*Rottböllia ocreata.* Spicis axillaribus terminalique subsolitariis; Articulis basi barbatis; Gluma spiculae sessilis exteriori laevi; Foliis planis.

V. spp. Bras.

*Culmus* 4-pedalis, compressiusculus, superne teres et florifero-ramosus. *Vaginae*, (quarum inferiores, breves, ob nodos crebros plurimae) glaberrimae, intus nitido-sanguineae, extus cum foliis subpruinoso- et purpurascendo-glaucae. *Ligula* membranacea, fimbriato-fissa. *Folia* satis firma, subtus pallidiora: inferiora dodrantalia. *Pedunculus* e singulis vaginis superioribus circiter spithamaeus. *Spica* 3—4-pollicaris, pallida. *Articuli* 3-lineales, basi barba alba brevi, apice oblique truncati et basin quilibet superioris amplectentes. *Gluma* exterior lanceolata, viridula, laevis. *Spicula pedicellata* lanceolata, mascula: pedicello apice itidem oblique truncato et barbulato.

*Rottböllia loricata.* Spica terminali solitaria; Articulis basi nudis; Gluma spiculae sessilis exteriori transversim rugulosa; Foliis involutis.

V. spp. Bras.

Fuscescendo-virens. *Culmi* caespitosi, cum spica fere sesquipedales, simplices. *Vaginae* glabrae. *Ligula* membranacea, auriculata. *Folia* subangu-

lato-involuta, erecta, glabra, fere dodrantalia. *Spica* circiter 5-pollicaris. *Articuli* fere trilineales. *Gluma* exterior rugis transversalibus gibbosulis confragosa. *Spicula pedicellata* tabescens, pusilla.

*Rottböllia formosa Br.* Spica terminali solitaria; Articulis basi barbatis; Gluma spiculae sessilis exteriori sericea; Foliis angusto-linearibus.

*Rottbölla formosa.* R. et S. II. p. 788. Kth. rev. gr. tab. 91.

V. sp. nov. Holl.

Descriptio apud Kunthium, l. l.

---

*b*) Mares et feminae in articulis diversis.

### Tripsacum *L.*

*Rhachis* solubilis. *Articuli* alternatim altero latere floriferi: inferiores feminei, superiores masculi.

(*Feminae* solitariae: *glumae* 2, coriaceae. *Flosculi* 2: alter 1—2-valvis, neuter, alter 2-valvis femineus: valvulis tenero-membranaceis, muticis. *Mares* bini: singuli *glumae* 2, coriaceae. *Flosculi* 2, 2-valves, tenero-membranacei, mutici: alter neuter, alter masculus).

*Tripsacum dactyloides L. sp. pl. ed.* 2.

*Coix dactyloides L.* sp. pl. ed. 1.

V. spp. Am. bor. Bras.

*Obs. Tripsacum monostachyum Willd.* non differt nisi spica solitaria.

---

## 2. Spiculae articulis rhacheos accumbentes.

a) Rhachis pluri-articulata; — spiculis ad quemvis articulum binis (rarissime pluribus): altera sessili vel brevius-, altera longius-pedicellata (rarissime omnibus aequalipedicellatis).

α) Spiculae heterogeneae (superior quocumque modo ab inferiori differens).

### MANISURIS *Sw.*

*Spicae* in ramis vel in radiolis vaginatis solitariae. *Spiculae* muticae: *inferior* peltata, pseuduniflora, hermaphrodita, bivalvis; *superior* 2-flora, mascula (vel neutra?), perianthiis bivalvibus.

*Genus* utrique Indiae commune, culmo erecto l. subdecumbente, 1—3-pedali.

*Folia* linearia, vel sublanceolata.

*Ligula* membranacea, brevis, lacera.

*Spicae* aut in apice ramorum solitariae, aut in eorum radiolis conferto-alternae; rhacheos fragilis articulis brevibus.

*Spiculae* imbricatae, dissimiles: *inferior* brevissime pedicellata, orbiculata l. oblonga et obtusa, gluma exteriori (inferiori) coriacea, pelviformi, enervi, interiori (superiori) 3-nervi; Perianthio 2-valvi, inverso, mutico; *superior* pedicello crasso insidens, ovata, acutiuscula, glumis quam in inferiore minus duris: inferiori 5—7-, superiori 3—5-nervi; perianthiis (quotquot examinavi) binis, bivalvibus, altero neutro vel utroque masculo.

*Lodiculae* squamae (non nisi in *M. myuro* manifestae) 2, cuneato-quadratae, nervatae.

*Stamina* 3. *Antherae* lineares.

*Styli* 2. *Stigmata* plumosa.

*Semen* (*M. granularis*) orbiculare, liberum, exsulcum, dorso depressum: embryone fere ejusdem longitudine.

*Manisuris granularis Sw.* Spicis vaginato-paniculatis; Spiculae fertilis gluma exteriori orbiculari, fornicata, verrucosa; Foliis lineari-lanceolatis, hirtis.

*Manisuris granularis.* R. et S. II. p. 801.

*Manisuris polystachya PB.* (non diversa).

*Cenchrus granularis L.* Mant.

V. spp. Ind. occ. Bras. Nepal.

Radii in speciminibus Indiae occidentalis solitarii, interdum ex infima vagina bini; in Bahiensibus et Nepalensibus (*M. polystachya Pal.*) ex omnibus vaginis plures. — Pedicellus spiculae superioris pro accumbente spicula inferiori leviter excavatus, scrobiculi margine circumcirca prominulo.

*Manisuris myuros L. Mant.* 2. Spica solitaria in ramis terminali; Spiculae fertilis gluma inferiori oblonga, plana, membranaceo-marginata; Foliis angusto-linearibus, glabris.

*Peltophorus myurus Desv.* R. et S. II. p. 801. — Schreb. Gr. t. 43. (bona).

V. spp. Ind. or.

*Folia* margine obsolete denticulato inferne ciliata et intus pilosa. *Rami* saepe elongati, vaginati. E vaginis pedunculi 1 vel 2, apice vaginati, vagina aphylla spicam involucrante. *Gluma* inferior late marginata, inferne sulco transversali constricta, deorsum in pedicellum brevissimum complanatum abit.

---

## Heteropogon *Pers.*

*Spicae* in apice ramorum solitariae vel plures subdigitatae. *Spicula inferior* feminea, cylindracea, aristata; *superior* mascula, lanceolata, mutica.

*Gramina*, utriusque orbis regionum tropicarum zonaeque temperatae calidiorum (circiter ad 46° lat. bor. usque) incolae, erecta vel adscendentia, sesqui — 3-pedalia, plus minus ramosa.

*Folia* linearia.

*Ligula* membranacea, brevis, obtusa.

*Spicae* in ramorum apice plerumque solitariae, rarius plures subdigitatae; rhachi, praesertim superne, solubili.

*Spiculae* imbricatae, femineae et masculae dissimiles, ita dispositae, ut unum plerumque latus spicae spectent: infimorum articulorum omnes masculae vel neutrae; articulorum ulteriorum utraque, feminea brevissime, mascula paulo longius pedicellata: *illa* intra glumas subcoriaceas involutas (inferiori 5-, superiori 3-nervi) biflora: flosculo inferiori 1-valvi, neutro altero bivalvi, longe aristato, femineo; *mascula* intra glumas herbaceas (inferiori multi-, superiori 3-nervi) biflora: flosculo altero 1-valvi, neutro, altero bivalvi, staminifero, mutico: valvula superiori perbrevi.

*Lodiculae* squamae cuneatae, emarginatae.

*Stamina* 3. *Antherae* lineares.

*Styli* 2. *Stigmata* angusto-plumosa.

*Semen* . . . . .

*Heteropogon acuminatus.* Spicis solitariis vaginato-involucratis; Glumis masculis acuminatis, glabris, medio longitudinaliter scrobiculato-undulatis, Culmi nodis foliisque glabris.

V. spp. Brasil.

*Culmus* (abscissus) videtur 3—4-pedalis, praesertim superne erecto-ramosus: ramis compositis, confertis, subfastigiatis, floriferis, totis vaginatis. *Vaginae* glabrae, carina interdum glanduloso-scrobiculatae. *Folia* lineas 3—4 lata, acuminatissima, circa ligulam pilis longis adspersa: culmea inferiora ultrapedalia; superiora spicas plerumque superantia. *Spica* in singulo ramo terminalis vagina involucrata, cum aristis suis pollices 5 longa. *Flores masculi* fere pollicares, medio dorso impressionibus parvis undulato-scrobiculati, scrobiculis interdum in glandulas poriformes minimas abeuntibus. *Spiculae femineae* deciduae, arista geniculato-inflexa, pollices 3 et quod excedit longa, hirta.

*Heteropogon glaber Pers.* Spicis solitariis, demum liberis; Glumis masculis acutiusculis, cum culmi nodis foliisque glabris.

*Andropogon contortum All.* (excll. synn.)

*Andropogon Allionii Willd.*

*Heteropogon Allionii HbKth.* R. et S. II. p. 835.

V. spp. Gall. Helv. Bras.

*Heteropogon hirtus Pers.* Spicis solitariis, demum liberis; Glumis masculis acutiusculis, margine pilosis; Culmi nodis foliisque (excepta basi) glabris.

*Andropogon contortus Willd.*

*Heteropogon hirtus* et *hirsutus PB.*

*Heteropogon contortus* R. et S. II. p. 836.

V. spp. Guin. Inss. Sandw. et Mascar.

*Obs.* Pili glumae inferioris spiculae masculae plerumque e glandulis marginalibus, sed etiam absque glandulis nec e margine solo, verum etiam e dorso apicis glumae proveniunt.

*Heteropogon villosus N. ab Es. Agr. bras. p.* 362. Spicis 2—7 subdigitatis; Glumis masculis acutiusculis, aut totis villosis aut glabris vel apice tantum pilis aliquot barbatis; Culmi nodis foliisque villoso-pubescentibus.

V. spp. Bras.

*Obs.* Varietas polystachya, major, glumas aut glabras aut apice barbatas, folia paulo latiora, nunc, ut in genuino Neesii gramine, tota villosulo-pubescentia, nunc glabriuscula habet. Sine dubio mera varietas.

---

## TRACHYPOGON *N. ab Es.*

*Spicae* terminales, solitaria vel aliquot subdigitatae. *Spiculae* cylindraceae: inferior mascula, mutica; superior feminea, aristata.

*Gramina* utriusque orbis, praecipue tamen Americae tropica, erecta, 2—3-pedalia, campos et saxosa amantia.

*Folia* longe plerumque filiformi-involuta et stricta: rarius anguste linearia.

*Ligula* chartacea, brevis vel ad linearum plurium (pollicis) longitudinem protracta.

*Spicae* 1—2—3—4, subdigitatae, terminales, erectae 3—9-pollicares; rhachi teretiuscula, tenui, non nisi demum solubili, articulorum junctura obliqua.

*Spiculae* pl. min. laxae, cylindraceae, obtusiusculae, homomorphae, heterogeneae: inferior brevissime, superior longius pedicellata. *Glumae* utriusque spiculae inferior 7-, in majoribus (Tr. plumoso) 11-nervis; superior, angustior, 3-nervis. *Flosculi* in utraque spicula subhyalini, 2, longe plerumque univalves, superioris valvula superiori rarissime evoluta atque tum perbrevi. *Valvulae* sublineares, glumis paulo breviores: spiculae femineae seminifera inferne filiformi-angustata, tum lineari-explanata, apice obtusiusculo abiens in aristam praelongam, pl. min. hirtam, inferne tortam.

*Lodiculae* squamae cuneatae, aut horizontaliter aut oblique truncatae, emarginatae.

*Stamina* in spicula inferiori 3, *filamentis* brevissimis, *antheris* croceis; in spicula superiori interdum filamenta abortiva, tenuissima, elongata.

*Ovarium* in spicula superiori perfectum, *Stylis* 2 longiusculis, *Stigmatibus* brevibus, plumosis, croceis; in spicula inferiori rudimentum ovarii stylis brevibus coronatum.

*Semen* . . . . .

Genus complectens *Andropogones spicula hermaphrodita pedicellata, incompletis subsessilibus, rhachi inarticulata* Hb. et Kth. *nov. gen. et sp. I. p.* 184; item *Heteropogones locusta feminea pedicellata, uniflora, mascula sessili* Presl *rel. Haenk. I. p.* 335; — excludens species Trachypogonis 6 ad 13 *N. ab Es. Agr. bras. p.* 345—354.

Species sequentes, nimis inter se affines, excepto forte *Trachyp. plumoso*, unius ejusdemque speciei varietates potius diceres.

*Trachypogon mollis N. ab Es.* Spicis solitaria binisve; Rhachi glabra; Foliis filiformi-involutis, glabris vel superne pilosis; Ligula 1—3-lineali.

*Trachypogon mollis.* Agr. bras. p. 343.

*Trachypogon Montufari* ibid. p. 342.

*Andropogon tortus hb. Willd.*

V. spp. Brasil.

*Obs.* Differentia inter *Tr. mollem* et *Montufari* N. ab Es. essentialis nulla. An synon. *Hb. et Kunthii* huc sit referendum, dubium etiamnum, cum cel. KUNTH de *Andropogonis Montufari* sui aristae villositate, in reliquis speciebus verbis expressa, sileat. — Ligula in uno eodemque culmo variabilis, modo brevissima et obtusa, modo longior et acuta (quod etiam in *Tr. plumoso* observatur).

*Trachypogon capensis.* Spica solitaria; Rhachi glabriuscula; Foliis linearibus, planis, glabris; Ligula pl. min. lineali (obtusa).

*Stipa spicata Thunb!* R. et S. II. p. 336.

Specimen capense unicum vidi ab ill. THUNBERG communicatum. Culmus bipedalis. Folia lineis 2 angustiora, omnia plana. Spica vix bipollicaris. Ceterum *Trach. molli* simillimus.

*Trachypogon canescens N. ab Es.* Spicis solitaria binisve; Rhachi pubescente; Foliis involutis (vaginisque) villoso-pubescentibus; Ligula lineali (obtusa).

*Trachypogon canescens.* Agr. bras. p. 343.

V. spp. Brasil.

*Trachypogon macroglossus.* Spica solitaria; Rhachi, foliis filiformi-involutis (vaginisque) glabris; Ligula pl. min. pollicari (acuminata).

V. spp. Brasil.

Reliquis simillimus. A *Trachyp. ligulari N. ab Es.* ligula itentidem longa insigni, pluribus tamen notis differt. Spiculae subobsolete pubescentes.

*Trachypogon plumosus N. ab Es.* Spicis binis, ternis quaternisve; Rhachi glabra: Foliis planis l. subinvolutis, scabris, (vaginis junioribus patenti-villosis); Ligula pl. min. lineali.

*Trachypogon plumosus.* Agr. bras. p. 344.

*Andropogon plumosus HbKth.* R. et S. II. p. 819. — V. spp. Brasil.

Longitudine spicarum insigni et gluma inferiori plerumque 11-nervi a reliquis facilius distinguitur.

## ANDROPOGON *L.*

*Spicae* aut solitariae, aut conjugatae, aut digitatae, aut dispositae in panicula, nunc simplici, nunc composita. *Spiculae* lanceolatae (rarissime ovatae vel obovatae): sessilis 2-flora: flosculo inferiori neutro, 1-valvi, superiori hermaphrodito, 1—2-valvi, mutico vel aristato. *Pedicellata* mascula, neutra vel tabescens (rarissime nulla), perianthio semper mutico.

*Gramina* utriusque orbis regionum praesertim tropicarum sicciora habitantia: antiquioris gradus boreales 53, Americae 42, australes in illo 34 vix excedentia; a palmari ad pedum plurium magnitudinem adscendentia.

*Folia* linearia (saepe involuta) vel lanceolata aut ovato-lanceolata.

*Ligula* plerumque membranacea, integra, obtusissima et brevis; rarius linea longior; rarissime elongata, bifida et acuta. Interdum superne fimbriata aut (nec in *Elionuro* solo) tota ciliaris.

*Spicae* nunc in culmi ramorumve apice solitariae, nunc conjugatae, nunc fasciculatae vel digitatae, nunc vario modo paniculatae: rhachi (partiali) semper distincte articulata, pl. min. facile discedente; articulis plerumque, saltem ad juncturas, pilosis.

*Spiculae* pl. min. imbricatae, lanceolatae (in paucissimis, *Sorgho* et *Ischaemo* finitimis, hermaphroditae ovales vel obovatae): *sessiles* (vel subsessiles) hermaphroditae, biflorae: flosculo inferiori semper 1-valvi, neutro, mutico; superiori 1—2-valvi, fertili, mutico vel aristato. *Pedicellata* nunc mascula, nunc neutra, nunc inanis, nunc prorsus tabescens, aut nulla: flosculis, si adsunt, 1—2: inferiori tum univalvi, neutro, superiori 1—2-valvi, semper mutico, staminifero vel itidem neutro. — *Glumae* coriaceo-chartaceae, plerumque aequales, flosculis pl. min. longiores: *inferior* (spiculae sessilis mutica, interdum (nec in *Elionuro* solo) bidentata vel bilaciniata, spiculae pedicellatae interdum setigera) 3—5—7—9- (rarissime 13—19-) nervis: nervis, in spicula sessili, lateralibus plerumque crassioribus, intermediis nonnumquam obsoletis; *su-*

*perior* (spiculae pedicellatae mutica, spiculae sessilis interdum setigera) longe plerumque 3-nervis (rarius 1—5—7-nervis), pl. min. carinato-compressa. *Perianthia* hyalina vel hyalino-membranacea, integra vel bifida.

*Lodiculae* squamae 2, hyalino-membranaceae, cuneato-quadratae, genitalia altero margine amplectentes, pl. min. emarginatae, saepe nervatae, non nisi in specie *Sorgho* finitima, apice fimbriato-barbatae.

*Stamina* 1—2—3. *Antherae* lineares.

*Styli* 2. *Stigmata* plumosa.

*Semen* subfusiformi-oblongum, depressiusculum, liberum, exsulcum, epile, scutello suo dimidio longius.

## 1. Spicae terminales solitariae.

*a*) *Muticae* (Elionurus *HbKth.*)

*Andropogon adustus.* Spica solitaria (fere 2-pollicari); Articulis, pedicello spiculae masculae vel neutrius acutiusculae, glumaque utriusque spiculae inferiori bidentata albido-villosis; Foliis filiformi-involutis: radicalibus plerumque adustis.

V. spp. Chil. Brasil.

*Culmi* caespitosi, pedales. *Vaginae* radicales confertae, adustae. *Ligula* brevissima, lacero-ciliaris. *Folia* erecta: fasciculorum subfiliformia, inferne, ut et (rarius) culmus infra nodos, pilis patentibus adspersa; culmea intus potius, basin versus, pilosa. *Rhachis* spicae flexuosa, minus facile solubilis, articulis undique pilosis: pilis articulo subbrevioribus. *Spiculae inferioris* subsessilis gluma inferior 7-nervis, brevissime bidentata, villis brevibus tecta; superior 5-nervis, hirtula. Perianthium inversum, membranaceo-hyalinum: valvula neutra enervis, margine superne fimbriata; hermaphrodita dissite binervis, aequilonga. *Spiculae superioris*, masculae l. neutrius, parum minoris, hirtulae, saltem inferiore brevius villosae, pedicellus articulo similis. Valvulae 2.

*Andropogon candidus.* Spica solitaria (3—4-pollicari); Articulis, pedicello spiculae masculae acutae, glumaque utriusque spiculae inferiore (sessilis brevibifida) sericeo et candide villosis; Foliis filiformibus, (inferne hinc piliferis).

*Elionurus ciliaris N. ab Es.* Agr. bras. p. 356. excll. synn.

V. spp. Brasil.

Ligula e pilis longis conflata, quae brevissima, ciliaris, in sequenti specie. Villus spicae in nostra candidus (nec subcanescens), densior longiorque quam in ciliari.

*Andropogon ciliaris.* Spica solitaria (4-pollicari); Articulis, pedicello spiculae masculae acutiusculae margine ciliatulae, glumaque spiculae sessilis inferiore brevibifida albido-villosis; Foliis filiformi-involutis (glabris).

*Elionurus ciliaris HbKth.* R. et S. II. p. 803.

V. spp. Brasil.

*Andropogon chlorostachys.* Spicis solitariis (3-pollicaribus?); Articulis (magis), pedicello spiculae neutrius (?) subacuminatae (minus) pilosulis; Glumis bifidis margine, praesertim superne, ciliatis; Foliis (longis) angusto-linearibus vel subinvolutis.

*Anatherum megapotamicum Sprgl. mss.*

V. spp. Brasil. merid.

*Culmus* tripedalis, simplex. *Folia* cum vaginis glabra, ultrapedalia. *Ligula* ciliaris, foliorum inferiorum et juniorum pilis longis stipata. E singulis vaginis (3) superioribus, spithamam inter se distantibus, prodit *spica* digitalis, virescens, suprema pedunculo non longe nudo insidens. *Articuli* triquetro-complanati, ultralineales, ad angulos villoso-ciliati, pilis accrescentibus, superioribus circiter longitudine articuli. *Spicula inferior* sessilis trilinealis: gluma inferior lanceolato-ovata, acutiuscula, apice anguste bifida, praeter nervos marginales crassos tenui-5-nervis, ad margines brevi-ciliata, dorso pilis rarissimis brevibus adspersa; gluma superior brevior, subcompresso-carinata, 3-nervis, acuta, glabra. Perianthium inversum, hyalino-membranaceum: valvula

neutra longitudine glumae superioris, dissitissime binervis; hermaphrodita paulo brevior, 3-nervis: utraque marginibus fimbriata. *Spiculae superioris*, subultrabilinalis, lanceolatae, neutrius? pedicellus articulo brevior, margine brevius et minus dense ciliatus; glumae ut in sessili, inferior tamen 5-nervis tantum et brevius ciliata. Valvulae 2.

*Andropogon platypus.* Spicis solitariis (2-pollicaribus); Articulis pedicelloque spiculae masculae acutae altero latere villosis; Spiculae fertilis brevipedicellatae gluma inferiori bidentata, hinc brevissime ciliatula; Foliis lineari-compressis.

V. spp. e Sierra Leone.

*Culmus* 2—3-pedalis, erecto-ramosus, 4-nodis, nodis glabris, cum reliquis partibus pallide viridis. *Vaginae* compresso-carinatae, glabrae. *Ligula* brevissima, membranacea, fimbriatula. *Folia* linearia, compressa et in hoc statu sesquilineam lata, glabra, basi pilis aliquot adspersa, inferiora sesquipedalia. 'E vaginis superioribus emergunt, praeter culmum ipsum, pedunculi 2—3, iterum vaginati, spicigeri. *Spica* circiter 2-pollicaris, pallida. *Rhachis* minus facile solubilis. *Articuli* linea vix longiores, teretiusculi, oblique inter se juncti, altero latere albo-villosuli, villis patentibus, ipsorum longitudine *Spicula inferior* feminea cum filamentis abortivis, insidens pedicello brevissimo, complanato, pilosulo, lineari-lanceolata, acuta, lineas 2 cum dimidia longa. Gluma inferior 7—9-nervis, bidentata, altero margine paulo longius ciliatula, ciliis tamen perbrevibus. Gluma superior 3-nervis, glabra. Valvulae 2, subhyalinae, lineari-lanceolatae, glumis paulo breviores, glabrae. *Spiculae superioris* masculae, bilinealis, pedicellus articulo similis et aequilongus. Gluma inferior 5-nervis, marginibus minus manifesta ciliatula. Valvulae 2. Stamina 3.

*Andropogon rostratus.* Spicis solitariis (4—5-pollicaribus); Articulis (hinc) pedicelloque spiculae masculae birostratae (virescendo albo-) hirsutis; Glumis longe birostratis margine ciliatis; Foliis (longissimis) angusto-linearibus, l. involutis.

*Elionurus rostratus N. ab Es.* Agr. bras. p. 357.

V. sp. Brasil.

*Andropogon bilinguis.* Spicis solitariis (3—4-pollicaribus); Articulis, pedicello spiculae masculae subulatae, glumaque utriusque spiculae inferiori (sessilis longe birostrata) albo-villosis; Foliis linearibus.

V. spp. Brasil.

*Culmus* 2—3-pedalis, simplex. *Folia* in culmo 8—10, plana, cum vaginis glabra, fusco-rubentia: inferiora lineas fere 2 lata, circiter pedalia, superiora brevissima vel subnulla. *Ligula* ciliaris. E vaginis superioribus, longe inter se distantibus, singulis prodeunt *spicae*: laterales s. axillares vaginato-inclusae, terminalis pedunculo non longe nudo suffulta, fere 4-pollicares, speciosae, saepe nutantes. *Articuli* lineas duas cum dimidia longi, triquetri, latere anantho villis ejusdem longitudinis, patulis, subflavendo-albis vestiti. *Spiculae*, exceptis pilis, rufescentes: *inferior* sessilis, semipollicaris, lineari-lanceolata: Gluma exterior 9-nervis, non prorsus ad medium usque bifida, laciniis patulis, inferne dorso toto-, in laciniis margine magis pilis longis, sensim brevioribus hirsuta; gluma posterior dimidio brevior, acuminata, trinervis et triquetro-compressa, dorso pilis raris brevissimis hirtula. Flosculi hyalino-membranacei, margine fimbriati, 2: anterior neuter, 1-valvis, longitudine glumae brevioris, 4-nervis: nervis ad latera dispositis (quinto s. medio suppresso); posterior hermaphroditus, 2-valvis: valvula inferiore neutro paulo breviori et angustiori, superiori perangusto-lineari, minori. Stamina interdum 4 in flosculo hermaphrodito inveni. *Spiculae superioris*, masculae, fere 5-linealis, lineari-lanceolatae pedicellus bilinealis, pilis ejusdem longitudinis hirsutus; gluma inferior acuminata, 7-nervis, pilis quam in eadem gluma spiculae sessilis brevioribus et rarioribus vestita; superior dimidio brevior, 3-nervis, glabriuscula. Valvulae 2, fimbriatae.

b) *Aristatae* (Schizachyrium N. ab Es.).

*Andropogon Neesii.* Spica (terminali l. rarius una alterave axillari) solitaria (subsesquipollicari); Articulis basi apiceque-, pedicello spiculae masculae vel neutrius acuminatae apice altero latere barbatis; Arista spiculae suae glabrae longitudine vel eadem pl. min. breviori; Foliis angustissimis, compresso-involutis.

*Schizachyrium filiforme N. ab Es.* Agr. bras. p. 338.

V. spp. Brasil.

Gluma inferior plerumque medio dorso subscrobiculato-depressa. — Ejusdem speciei specimina, interdum vel in uno eodemque cum aristatis caespite, plane mutica inveni: an haec *Elionurus dubius N. ab Es. l. p.* 358?

*Andropogon hirtiflorus.* Spicis solitariis (4-pollicaribus); Articulis, pedicello spiculae neutrius acuminatae glumisque villoso-hirtis; Arista spicula sua fere bis longiori; Foliis linearibus.

*Schizachyrium hirtiflorum N. ab Es.* Agr. bras. p. 334. conf. *Andropogon myosurus Presl* rel. Haenk. I. p. 337.

V. spp. Brasil.

*Andropogon Riedelii.* Spicis solitariis (sub-3-pollicaribus); Articulis obsolete-, pedicello spiculae neutrius setigerae distincte villosulis: pilis inaequalibus, ipsis brevioribus; Arista spicula sua inferne villosula fere bis longiori; Foliis linearibus.

V. spp. Brasil.

*Culmus* sesqui-bi-pedalis, nodis, vaginis foliisque, quae canaliculato-compressa, lineam lata, palmaria vel breviora, glabris. *Ligula* brevissima, membranacea. E vaginis superioribus 6—7 (circiter a medio culmo) rami floriferi, erecti, iterum vaginati: inferius solitarius, superne 2—3, singuli *spicam* ferentes vagina involucratam, 2—3-pollicarem, satis tenuem, teretiusculam, cum reliquis partibus fuscescentem. *Articuli* 3-lineales, lineari-cuneati, hinc convexi inde complanati, basi barba brevi alba, villulis brevissimis obsolete adspersi. *Spicula inferior* sessilis, 3 linealis; Gluma inferior lanceolato-linearis, acuta, obsolete nervata, dorso supra medium usque pallide viridis et albo-vil-

losula; superior aequilonga, carinato-compressa, glabra. Perianthium inversum: valvula neutra glumas fere aequans, perangusta, hyalina; hermaphrodita tertiam partem brevior, inferne chartacea, superne maximam partem hyalina et bifida, dorso e parte chartacea emittens Aristam 8-linealem, inferne tortam et fusco-spadiceam, medio geniculatam. *Spiculae superioris*, glabrae, pedicellus articulo similis, sed brevior et dorso marginibusque distinctius villosulus; Gluma inferior e nervo dorsali infra apicem emittit setam ipsius longitudine; superior paulo brevior. Valvulae nullae.

*Andropogon semiberbis.* Spicis solitariis (4-pollicaribus); Articulis glabris; pedicello spiculae neutrius brevisetigerae superne hinc barbato; Arista spicula sua glabra sesquilongiori; Foliis linearibus; (Culmo erecto, simplici).

*Schizachyrium semiberbe N. ab Es.* Agr. bras. p. 336.

V. spp. Brasil.

*Andropogon leptophyllus.* Spicis solitariis (subbipollicaribus); Articulis pedicelloque spiculae neutrius acuminatae nunc glabris nunc apice hinc barbulatis; Arista spicula sua glabra sesqui-l. bis longiori; Foliis linearibus angustissimis; (Culmo ramoso, decumbente).

*Schizachyrium tenerum N. ab Es.* Agr. bras. p. 336. conf. *Andropogon gracilis Presl* rel. Haenk. I. p. 336.

V. spp. Brasil.

*Andropogon leptocomus.* Spicis (plurimis) solitariis (semipollice brevioribus, teneris); Articulis pedicelloque spiculae masculae aciculato-subulatae hirtis; Arista spicula sua caudato-setigera fere bis longiori; Foliis linearibus, acuminatissimis; (Culmo ramoso, decumbente).

V. spp. e Sierra Leone.

Hujus non nisi partem culmi superiorem vidi, cujus vaginae cum foliis angustis glabrae. *Ligula* brevissima, membranacea. E singulis vaginis floriferis, quarum plures in pseudopanicula fere sesquipedali, fusco-rubente et satis tenera, prodeunt rami tenuissimi, solitarii vel aliquot fasciculati, digitales—spitha-

maei, cum radiolis suis singulis iterum vaginati, singulis ferentibus *spicam* vaginae involucratam, in extremis radiolis tamen liberam, valde tenuem, vix lineas quatuor excedentem, paucifloram. *Articuli* linea paulo longiores, tenuissimi, lineares, margine, praesertim altero latere, hirto-ciliatuli. *Spicula inferior* sessilis; bilinealis, lanceolata. Gluma inferior 7-nervis, acuminato-bidentata, glabra; superior aequilonga, compresso-carinata, 3-nervis, apice acuminato excurrens in setam paulo reflexam, dimidia ipsius longitudine. Perianthium inversum, hyalinum: valvula neutra glumis paulo brevior, elliptico-linearis; hermaphrodita angustior, vix brevior, bifida, e medio dorso exserens aristam circiter 4-linealem, spadiceam, inferne tortam, medio geniculatam. *Spiculae superioris*, masculae, lineas duas paulo excedentis, angustae, pedicellus articulo similis, sed paulo brevior, ciliis parum longioribus. Glumae aequilongae, acuminatae. Valvula 1, lanceolata.

*Andropogon floridus.* Spicis (plurimis) solitariis (pollice brevioribus, teneris); Articulis pedicelloque spiculae neutrius setigerae inferne (saepe obsolete) pilosulis; Arista spicula sua glabra bis longiori; Foliis linearibus, obtusis; (Culmo ramosissimo decumbente).

conf. *Andropogon tenellus* **Presl** rel. Haenk. I. p. 335.

et. *Andropogon obtusifolius* **Poir.** R. et S. II. p. 817.

V. spp. Brasil.

*Culmus* (saltem majoris graminis) decumbens, digitalis — subbipedalis, fere ab ima basi florifero-ramosissimus: ramis tenuissimis, secundis, compositis, sicut radioli vaginatis. *Folia* vaginis non multum longiora (in majori planta non prorsus bipollicaria, sesquilineam lata), fusco-rubentia, obtusa, glabra. *Ligula* membranacea, brevissima. In quovis radiolo, saepe geniculato, *spica* basi vagina involucrata, tenuis, semipollicaris vel paulo longior. *Articuli* linea paulo longiores, subcuneato-lineares, hinc canaliculati, basi barba adpressa brevi, margine inferne pilosuli. *Spicula inferior* sessilis, fere bilinealis, angusta, glabra. Gluma inferior lanceolato-linearis, acuta, bidentata,

trinervis; superior aequilonga, acuta, uninervis. Perianthium inversum: valvula neutra glumis paulo brevior; hermaphrodita aequilonga bifida, medio dorso emittens aristam 5-linealem, tortam et paulo geniculatam. *Spiculae superioris*, neutrius, articulo duplo brevioris, uniglumis, gluma excurrens in setam ipsa 3—4-plo longiorem, rectam. Valvulae nullae.

*Andropogon serratus Retz.* Spicis solitariis (sesquipollicaribus); Articulis pedicelloque spiculae masculae barbatis; Arista spicula sua, cum mascula obovata, obtusissima et plurinervi, quadruplo longiori; Foliis linearibus; (Culmo ramoso decumbente).

*Andropogon filiformis Pers.* R. et S. II. p. 811.

*Lepeocercis serrata Trin.* Fund. Agr. p. 203.

V. spp. Ind. or.

*Culmus* decumbens, ramosissimus; 2-pedalis et ultra. *Vaginae* glabrae. *Ligula* membranacea, brevissima, lacera. *Folia* lineam lata, in pagina superiori, praesertim basin versus, glandulis piliferis adspersa, 2—3 pollices et paulo ultra longa. Pedunculus plerumque pubescens. *Spicae* teretiusculae. Rhachis flexuosula, demum solubilis. *Articuli* semilineales, pilis albis brevibus praecipue ad juncturam barbati. *Spicula inferior* bilinealis, laete viridis. Gluma exterior obovata, obtusa, tridenticulata, pubescens, 11—13-nervis; interior angustior, aequilonga, ovato-lanceolata, acuta, glabra, 3-nervis, carinato-compressa. Perianthium inversum: valvula neutra glumis parum brevior, lanceolata, hyalina; hermaphrodita angustissima, abiens in aristam fere 9-linealem, fuscescentem, tortam et geniculatam. *Spicula superior* mascula, inferiori homomorpha et aequilonga. Pedicellus articulo similis. Gluma inferior 19-nervis. Valvulae 2, muticae.

*Obs.* Cum cognatissimo *A. mollicomo Kth.* spiculis obovatis homomorphis, glumae multinervis et habitu spicarum quodam peculiari ab Andropogone recedit.

*Andropogon foveolatus Del. Eg. no. 63. Tab. 8. f. 2.* Spicis solitariis (sesqui — bi-pollicaribus); Articulis pedicelloque spiculae neutrius obtusiusculae accrescendo-villosis; Arista spicula sua, medio dorso foveolata, quadruplo longiori; Foliis (brevibus) subulato-linearibus; (Culmo ramoso, diffuso).

*Andropogon annulatus* (lapsu calami) Schult. Mant. II. p. 453. no. 33. a.

*Andropogon monostachyus Sprgl.!*

V. spp. e Cairi desertis.

*Andropogon fastigiatus Sw.* Spicis (pluribus) solitariis (sesqui — bi-pollicaribus, patulifloris); Articulis pedicelloque spiculae neutrius, fertili fere triplo majoris, caudato-setigerae ciliato- et accrescendo-villosis; Arista spicula sua, e gluma superiori semiobovata longissime setigera, octies longiori; Foliis linearibus.

*Diectomis fastigiata PB.*

*Pollinia fastigiata Sprgl.* R. et S. II. p. 831.

V. spp. Dom. Brasil.

*Andropogon dissitiflorus Mchx.* Spicis (pluribus sparsis) solitariis (ultrapollicaribus, flexuosulis, patentifloris); Articulis pedicelloque spiculae tabescentis subulato-acuminatae lucide villosis; Arista spicula sua glabra subsesquilongiori; Foliis linearibus.

*Andropogon dissitiflorus.* R. et S. II. p. 817. (neque vero definitio prior, nec descriptio).

*Pollinia vaginata Sprgl.!* R. et S. II. p. 829?

*Schizachyrium intermedium N. ab Es.!* Agr. bras. p. 334.

V. spp. ex Am. bor. (missa sub nom. *Andropog. dissitiflori*, *purpurascentis* et *scoparii*). — Sumatr. (?)

*Obs. Andropogon purpurascens*, qualem, fortasse ab ipso b. *Mühlenberg* acceptum, misit cel. *Sprengel*, *Polliniam scopariam* sibi, si idem cum *Andropogone scopario Mchx.*, longe aliud gramen est.

*Andropogon condensatus HbKth.* Spicis (plurimis, condensato-subfastigiatis) solitariis (pl. min. pollicaribus) undatis, patentifloris); Articulis pedicelloque spi-

culae tabescentis obtusiusculae altero latere villosis; Arista spicula sua glabra bis longiori; Foliis linearibus.

*Andropogon condensatus.* R. et S. II. p. 825.

*Andropogon latifolius Sprgl.* S. V. 1. p. 286. (fide Neesii).

*Deyeuxia spicata Sprgl.* ib. p. 254.

*Audropogon flexuosus Sprgl.* mss.

*Schizachyrium condensatum N. ab Es.* Agr. bras. p. 333.

V. spp. Bras. Peruv. Ins. Taïti.

## 2. Spicae 2 vel plures digitatae, vel digitato-confertae. (ATHROLOPHIS).

*a) Muticae.*

*Andropogon vimineus.* Spicis 2—5, subdigitatis; Articulis pedicelloque spiculae neutrius acutae, (interdum nullius) pilis raris brevissimisque adspersis; Culmo decumbente, elongato-ramoso; Foliis lineari-lanceolatis.

V. spp. Nepal.

*Culmus* pertenuis, ab ipsa, ut videtur, basi in ramos pedales vel bipedales, iterum ramos longos emittentes furcatus: ramis adultioribus floriferis. *Nodi* in ramis longe ab invicem distantes. *Vaginae* internodiis multo breviores, attenuatae in pseudopetiolum. *Folia* lanceolata vel lineari-lanceolata, sesqui—3-pollicaria, patentia. *Spicae* (juniores vagina suprema involucratae) circiter 5, subdigitatae et subfastigiatae, sesquipollicares. Gluma *spiculae sessilis* inferior 3-nervis. Flosculi 2: neuter 1-valvis, margine ciliatulus; hermaphroditus bivalvis, valvulis subaequalibus, neutro brevioribus. Pedicellus *spiculae superioris* sessili duplo brevior; spicula ipsa nunc magnitudine seminiferae, nunc nulla.

*Andropogon brevis.* Spicis 1—3, subalternis, confertis; Articulis pedicelloque spiculae masculae acutiusculae villosis: pilis ipsorum longitudine; Culmo adscendente, simplici, foliis angusto-linearibus, pl. min. involutis. —V. spp. Brasil.

Dubius hanc speciem propono, quae potius varietas humilis et mutica *Andropog. campestris* (qu. v. infra) censeri poterit.

*Culmus* spithamaeus — dodrantalis, plerumque adsurgens, tenuis, compressus, nunc simplex, nunc ex ima basi contracto-ramosus, binodis. *Vaginae* glabrae. *Ligula* brevissima, subfimbriato-membranacea. *Folia* angustissima, explanata linea dimidia vix latiora, saepissime involuta, digito breviora, circa ligulam saepe pilosula. E vagina suprema pedunculi interdum 2, satis longi, plerumque solitarius tantum s. culmus extremus ipse. *Spicae* terminales, 1—2—3, in axi circiter pollicari alternae, erecto-contractae, ad summum pollicares, e fusco vel rufescente viridique variae. *Articuli* sesquilineales, tenues, pilis sordide albis patentibus ipsorum longitudine ciliato-hirsuti. *Spicula inferior* sessilis, bilinealis, lineari-lanceolata, obtusiuscula, glabra. Gluma inferior dorso retuso dissite binervis; superior 3-nervis, carinato-compressa. Perianthium inversum, glumis paulo brevius. *Spiculae superioris* pedicellus articulo similis, sed paulo brevior. Spicula sessili paulo major, gluma inferiori 5-nervi. Valvulae 2.

*Andropogon virginicus L. sp. pl. ed.* 1. Spicis 2, digitatis (interdum iterum furcatis); Articulis pedicelloque spiculae tabescentis (interdum nullius) villosis: villis iisdem plus duplo longioribus; Culmo erecto, ramosulo; Foliis angusto-linearibus.

*Anatherum virginicum R. et S. II. p.* 809.

*Anatherum domingense R. et S.* ibid. (sine dubio).

V. spp. Doming. Brasil. et var. ustilaginosae (*N. ab Es. Agr. bras. p.* 322. γ.) spp. Brasil.

*b) Aristatae.*

*Andropogon glaucescens HbKth.* Spicis 2—4 digitatis laxis et (laxi-floris); Articulis pedicelloque spiculae masculae acuminatae minus dense villosis: villis (canescentibus) ipsis paulo longioribus; Arista spicula sua fere bis longiori; culmi erecti nodis glabris, foliis linearibus.

*Andropogon glaucescens.* R. et S. II. p. 824. N. ab Es. Agr. bras. p. 327.

V. spp. Brasil.

*Andropogon carinatus N. ab Es. Agr. bras. p.* 330. Spicis 2—3 digitatis; Articulis pedicelloque spiculae masculae subacuminatae dense villosis: villis (albis) ipsorum longitudine; Arista spicula sua sesquilongiori; Culmi erecti nodis glabris, foliis linearibus (ciliatulis).

V. spp. Brasil.

A priori, quo statura minor, spicis strictis, arcte floriferis, albo-pilosis facile distinguitur.

*Andropogon ternatus N. ab Es. Agr. bras. p.* 326. Spicis 2—3 digitatis; Articulis pedicelloque spiculae neutrius acuminatae dense villosis: villis iisdem bis longioribus; Arista spicula sua triplo longiori; Culmi erecti nodis glabris, foliis linearibus.

*Saccharum ternatum Sprgl.* S. V. I. p. 283.

V. spp. Bras.

*Andropogon macrothrix.* Spicis subquinis digitato-fasciculatis; Articulis pedicelloque spiculae tabescentis acutae villosis: villis iisdem subduplo longioribus; Arista (recta) spicula sua plerumque quintuplo (rarius duplo triplove tantum) longiori; Culmi erecti nodis glabris, foliis linearibus; culmis apice barbatis.

V. spp. Bras.

Similis *A. ternato*, praeter notas specificas dignoscitur spiculis duplo minoribus. — *Culmus* circiter sesquipedalis, simplex, trinodis. *Vaginae* glabrae. *Ligula* brevis, membranacea. *Folia* linearia, plana, carinata, glabra, versus apicem acutiusculum et in apice ipso barbata: inferiora pl. min. palmaria et lineas 2 lata, superiora multo breviora et angustiora. *Spicae* terminales vel rarius etiam in vagina superiori axillares, plerumque quinae, subdigitatae, patulae, sesquipollicares. *Articuli* tenues, lineam longi, superne villis albis bilinealibus patentibus satis dense et molliter lanati. *Spicula inferior* sessilis, non prorsus bilinealis, acutiuscula. Gluma inferior dorso retuso-complanata, dissite binervis, nervis

superne subalatis et hispidis; superior trinervis, interdum brevissime aciculata. Flosculi glumis breviores: inferior neuter, hyalinus, univalvis; superior hermaphroditus, bivalvis: valvula inferiore subchartacea, margine apiceque hyalino-membranacea, dorso emittens aristam rectam, spadicescentem, inferne parum tortam, plerumque 8-linealem, interdum vero multo minorem. *Spiculae superioris*, tabescentis, angustissimae, acuminatae, pedicellus ipsa articuloque paulo longior, trigonus, ad angulos articuli instar lanatus. Valvulae nullae.

*Andropogon lateralis N. ab Es. Agr. bras. p.* 329. Spicis 2—pluribus, subdigitato-fasciculatis: Articulis pedicelloque spiculae masculae acutae accrescendo-villosis: villis ipsorum longitudine; Arista spiculam suam longitudine aequante vel eadem breviori; Culmi erecti nodis glabris, foliis linearibus.

V. spp. Brasil.

Arista interdum brevissima, ita ut spiculae muticae videantur.

*Andropogon furcatus Schreb. Gr. II. p.* 130. Spicis 2—4 digitatis; Articulis pedicelloque spiculae masculae subacuminatae utrinque ciliato-pilosis: pilis iisdem brevioribus; Arista spicula sua sesquilongiori; Culmi erecti nodis glabris, foliis linearibus.

*Andropogon furcatus.* R. et S. II. p. 821. Mant. II. p. 453. Schreb. l. l. tab. 48.

V. spp. Am. bor.

*Andropogon lancifolius.* Spicis 2—6 subdigitatis; Articulis subaccrescendo-villosis: villis supremis iisdem aequilongis vel sublongioribus; Pedicello spiculaque superiore nullis; Arista spicula sua fere sesquilongiori; Culmi ramoso-decumbentis nodis barbulatis; Foliis oblongo-lanceolatis (vaginisque pubescentibus).

V. spp. Nepal.

*Culmus* tenuis, decumbens, radicans, pedalis et minor, e nodis plerumque omnibus patulo-ramosus. *Vaginae* laminas pl. min. aequantes, pubescendo-hirtae. *Ligula* brevis, membranacea, apice in pilos longiusculos soluta. *Folia* pollicaria l. breviora, oblongo-lanceolata, acuminata, lineas 2—3 lata, pl. min. pubescentia, basin versus margine interdum pilis longis ciliato-adspersa. E vagina

ramorum suprema pedunculi aliquot elongati, filiformes, pubescentes, 1-nodes et vagina longiori brevissime foliifera instructi. *Spicae* 2—6, subdigitato-alternae, semipollicares vel pollice breviores, pallide virides l. purpurascentes. *Articuli* vix lineales, praeter barbam baseos pilis hirsuti, quorum superiores ipsos longitudine aequant vel paulo superant. *Spicula inferior* subultrasesquilinealis, angusta. Gluma inferior 5-nervis, sub lente hispidula acuminata; superior 3-nervis, aciculata. Perianthium inversum, hyalinum; valvula neutra glumis duplo brevior, oblongo-lanceolata; hermaphrodita paulo longior, supra basin exserens aristam circiter trilinealem, medio geniculatam. *Spicula superior* nulla.

*Andropogon Ischaemum L. sp. pl. ed.* 1. Spicis 4—20 confertis, subfasciculatis: inferioribus brevipedunculatis; Articulis pedicelloque spiculae masculae acutae accrescendo-villoso-pilosis: pilis supremis iisdem longioribus; Arista spicula sua, inferne pilis adspersa, triplo quadruplove longiori; Culmi adscendendo-erecti nodis glabris, foliis linearibus (pilis adspersis).

*Andropogon Ischaemum.* R. et S. II. p. 822. excl. syn. LaM.

*Andropogon angustifolius Sm.*

V. spp. Germ. Gall. Sic. Cauc. Taur. Pers. Nov. Holl.

*Andropogon Bladhii Retz.* Spicis 3—8 confertis fasciculato-subalternis: inferioribus brevipedunculatis; Articulis pedicelloque spiculae neutrius obtusiusculae, praecipue ad margines pilosae, accrescendo-villosis pilis supremis iisdem longioribus; Arista spicula sua (bilineali), pilis inferne brevibus superne longis adspersa, quadruplo longiori; Culmi adscendentis? nodis barbatis, foliis linearibus (pilis adspersis),

*Andropogon Bladhii.* R. et S. II. p. 821. — Mant. II. p. 453?

An *Andropogon affinis Br.?*

V. spp. Ind. or.

Simillimus *A. Ischaemo.* — *Culmus* 3-pedalis, in speciminibus mihi visis erecto-ramosus. *Nodi* villoso-barbati. *Vaginae* glabrae. *Ligula* membrana-

cea, brevis, acuta, dorso lateribusque pilis stipata. *Folia* palmaria — spithamaea, lineas 2 lata, pagina superiore pilis brevissimis adspersa. *Spicae* in pedunculo longe nudo terminales, subfastigiato-confertae, fere 2-pollicares. *Articuli* circiter lineales, teretiusculi, utrinque ciliati. *Spicula inferior* sessilis, lineas 2 longa. Gluma inferior elliptica, obtusa, 7-nervis, marginem versus pilis longiusculis subciliato-adspersa, versus basin pilis brevissimis dorso hirsutiuscula; superior obtusiuscula, 3-nervis, glabra. Perianthium inversum. *Spiculae superioris*, sessili similis et subaequimagnae pedicellus articulo simillimus. Valvulae nullae.

*Andropogon annulatus Vahl.* Spicis 2—6 confertis fasciculato-subalternis: inferioribus brevipedunculatis; Articulis pedicelloque spiculae neutrius obtusiusculae, pilosulae, accrescendo-villosis: pilis supremis iisdem longioribus; Arista spicula sua (lineali) pilis brevibus adspersa quintuplo longiori: Culmi erecti nodis barbatis, foliis linearibus (pilis adspersis).

*Andropogon annulatus.* R. et S. II. p. 820 — Mant. II. p. 453.

*Dichanthium nodosum Willem.*

V. spp. Aegypt.

Ab *Andr. Bladhii* spicularum parvitate, ob quam spicae etiam minus villosae adparent, distinguendus.

*Andropogon koretrostachys.* Spicis 3—7 confertissimis, subdigitato-fasciculatis; Articulis pedicelloque sterili accrescendo-villosis: villis supremis iisdem sublongioribus; Arista spicula sua, pilis longiusculis adspersa, e glumae interioris apice setigera, sexies et ultra longiori; Culmi obliqui nodis foliisque angustissimis glabris.

V. spp. Manill.

*Culmus* pede brevior, 2—3-geniculatus, ex ima basi adpresso-ramosus, ramis floriferis. *Vaginae* glabrae. *Ligula* ciliaris, brevissima. *Folia* angusta, carinato-compressa, glabra, inferiora ultrapalmaria. *Spicae* ramorum breviorum pollicares, longiorum sesquipollicares, ob spiculas imbricatissimas et aris-

tas longas fasciculum densum constituentes. *Articuli* semilineales, pilis ciliati, quorum supremi ipsis aequilongi vel paulo longiores. *Spicula inferior* sessilis, lineari-oblonga, linealis, spadicea. Gluma inferior obtusiuscula, praeter nervos 2 dissitos obsolete nervata, inferne et ad margines superne pilis adspersa; superior 3-nervis, infra apicem obtusiusculum setam exserens ultrabilinealem. Perianthium inversum: valvula neutra lanceolato-oblonga, glumis duplo brevior; hermaphrodita ejusdem longitudinis, angustissima, bifida, inter lacinias excurrens in aristam 8-linealem, medio paulo geniculatam, inferne fuscam et ad margines tortos pilosam. *Pedicellus* ananthus, articulo similis, apice barba pilorum comatus.

*Andropogon amplexifolius.* Spicis 1—3—5 subdigitatis; Articulis pedicelloque (abbreviatissimo l. obsoleto) spiculae tabescentis (obsoletae l. nullius) glabris aut pilis brevissimis rarissimisque adspersis; Arista spicula sua paulo longiori; Culmi decumbentis nodis subbarbulatis, foliis lanceolato-ovatis, amplexicaulibus.

*Pleuroplitis Langsdorfii Tr.* Fund. agr. p. 174. Sprgl. n. Entd. II. p. 80. (descriptione emendanda).

*Deyeuxia japonica Sprgl.* S. V. I. p. 254.

*Lucaea gracilis Kth.* rev. gr. t. 159.

V. spp. Japon. et Nepal.

Error in descriptione ap. Sprgl. l. l. ex arista, fere e basi valvulae hermaphroditae, totius bipartitae, exserta. Valvula neutra lanceolato-oblonga, hyalina. — In planta Japonica pedicellus spiculae tabescentis (nullius) aut plane suppressus, aut adeo parvus est, ut non nisi oculo armato cognoscendus sit; in Nepalensi magis manifestus (spicula sessili duas tertias partes brevior), nunc prorsus ananthus, nunc squamula pusilla terminatus.

Affinis, spicula pedicellata forsan magis evoluta, videtur *Andr. lanceolatus Roxb.*

*Andropogon microphyllus.* Spicis (1—) 2 subdigitato-alternis: Articulis pedicelloque spiculae neutrius (subtabescentis) acutiusculae pilosulis: pilis brevibus, terminalibus longioribus; Arista spicula sua, e glumae interioris apice brevicuspidata, paulo longiori; Culmi inferne radicantis nodis glabris, foliis lanceolato-ovatis (minimis, vaginisque pilosis).

V. spp. Nepal.

Plantulae caespitosae *culmi* plurimi obliqui, digitales vel paulo longiores, simpliciusculi, filiformes, glabri, plurinodes. *Vaginae*, excepta suprema paulo elongata, laminam aequantes, laxae, pilis patentibus hirsutae. *Ligula* ob pilos obtegentes non manifesta. *Folia* lanceolato-ovata, acuta, ad summum lineas 3 longa et medio lineam lata, utrinque hirsuta. *Spicae* tam in culmorum apice quam in pedunculo, ex unius alteriusve culmi vagina superiori quadam prodeunte, brevi, nunc solitariae nunc binae, subalternae, lineas 3—4 longae, pallide virentes. *Articuli* fere lineales, pertenues, exceptis basi apiceque brevibarbatis nudiusculi. *Spicula inferior* sessilis, articulo paulo longior, lineari-lanceolata, glabra. Gluma inferior tenuissime 7-nervis, acuminata; superior carinato-compressa, aciculata, ad carinam hispidula. Perianthium inversum: valvulis hyalinis, oblongo-lanceolatis, aequalibus: hermaphrodita supra basin usque bifida et ex fissura aristam emittente 3-linealem, inferne tortam et fuscescentem, medio geniculatam. *Spicula superior* angusto-linearis, hinc hispida, pedicellum suum, articulo similem, paulo tamen densius et longius pilosum, longitudine aequans. Valvulae nullae.

*Andropogon cucnemis.* Spicis 2—3 confertis, subalternis; Articulis pedicelloque spiculae masculae acutae marginibus laxe villosulis: villis (raris) iisdem brevioribus; Arista spicula sua bis longiori; Culmi erecti nodis glabris, foliis angusto-linearibus.

V. sp. e Guinea.

*Culmus* (abscissus) forte bipedalis, internodiis strictis. *Vaginae* glabrae. *Ligula* membranacea, obtusa, bifida. *Folia* angusto-linearia, glabra, spitha-

maea. *Spicae* tam in apice culmi liberae quam intra vaginas superiores inclusae ultrabipollicares: juniores glaucescentes, adultae stramineae. *Articuli* fere bilineales, conici s. infundibuliformes, dorso convexo glabri et nitidi, inde plani, basi barbula pilorum brevissimorum stipati, margine villis raris paucisque adspersi, apice oblique truncati et ocrearum instar basin spiculae cingentes. *Spicula inferior* sessilis, trilinealis, lanceolata, glabra. Gluma inferior praeter nervos marginales subobsolete 5-nervata, superne hispida; superior carinato-compressa, 3-nervis, mucronato-acuta. Flosculus neuter hyalino-membranaceus, 1-valvis, lanceolatus, longitudine glumarum; hermaphroditus duplo brevior, bivalvis: Valvula inferiori membranacea, lateribus hyalinis fimbriata, bifida, supra medium dorsi emittente aristam pertenuem, 6–7-linealem, spadiceam, inferne tortam, medio flexuoso-geniculatam; valvula superior elliptico-lanceolata, hyalina. *Spiculae superioris* subaequilongae, masculae, pedicellus articulo similis, basi longius barbatus, apice emarginato-truncatus. Gluma inferior distincte 7-nervis, ad nervos hispida. Flosculi 2: inferior 1-valvis, neuter; superior 2-valvis, staminiferus.

*Andropogon mollicomus Kth.* Spicis 2—5 subdigitatis; Articulis pedicelloque spiculae masculae vel neutrius, cum inferiori pubescentis, obovatae, obtusae et multinervis, praesertim ad juncturas barbatis; Arista spicula sua fere quadruplo longiori; Culmi erecti nodis barbulatis, foliis linearibus.

*Andropogon incurvatus Koen.* (fide speciminis ex herb. Banksii, non, ut videtur, *Andr. incurvatus Retz.* R. et S. II. p. 822, cujus descriptio valde aliena).

*Andropogon mollicomus Kth.* rev. gr. Tab. 96. ubi v. descr.

V. spp. Ind. or. Inss. Mascaren. (Sieber Fl. Maurit. II. n°. 48.).

V. obs. sub *Andr. serrato.*

*Andropogon distachyos L. sp. pl. ed.* 1. Spicis 2 subdigitatis; Articulis pedicelloque spiculae masculae, inter lacinias glumae inferioris setigerae, villosulis: villis iisdem brevioribus: Arista spicula sua, e glumae superioris apice setigera, sesquilongiori; Culmi erecti nodis glabris, foliis linearibus.

*Pollinia distachya Sprgl.* R. et S. II. p. 830.

V. spp. Hisp. Gall. Terg. Tingit. Cret.

*Andropogon campestris.* Spicis 3 confertis subalternis l. subdigitatis (laxifloris); Articulis (praecipue superne) pedicelloque spiculae masculae acuminatae laxe pilosis: pilis vix eorum longitudine; Arista spicula sua breviori vel fere ejusdem longitudinis; Culmi erecti nodis glabris, foliis subfiliformi-involutis.

V. spp. Bras.

*Culmus* bipedalis et ultra, simplex, binodis. *Vaginae* glabrae. *Ligula* membranacea, satis brevis, truncata, apice tenuissime fimbriata. *Folia* erecta, involuta, retrorsum scabriuscula: fasciculorum dodrantalia — sesquipedalia, culmea breviora. *Spicae* 3, conferto-alternae, contractiusculae, tripollicares, laxiflorae, sordide fusco-rubentes. *Articuli* trigoni, bilineales, superne pilis brevibus canescentibus ad angulos. *Spicula inferior* sessilis, trilinealis, lineari-lanceolata. Gluma inferior obtusiuscula, 6-nervis, loco nervi septimi medii retusiuscula, ad nervos marginales fortiores superne hispidula; superior 3-nervis, ad carinam hispida. Flosculi 2, hyalino-membranacei: neuter 1-valvis, longitudine glumarum; hermaphroditus bivalvis: valvula inferiori neutra parum breviori, supra medium emittente aristam circiter 3-linealem, tortam, geniculatam et flexuosulam; valvula superior dimidio brevior, oblonga, apice fimbriata. *Spiculae superioris*, sessili simillimae, pedicellus articulo similis, pilis tamen longioribus hirsutus. Flosculi 2, ut in spicula sessili, sed mutici.

Conf. *Androp. brevis*, p. 268.

*Andropogon lithophilus.* Spicis 2 subdigitato-alternis (laxifloris); Articulis, pedicello spiculae masculae acuminatae, spiculisque ipsis pilosis: pilis iisdem brevioribus: Arista spicula sua sesqui- vel bis longiori; Culmi erecti nodis glabris, foliis angusto-linearibus (pl. min. involutis).

V. spp. Brasil.

*Culmus* fere 3-pedalis, 5-nodis. *Vaginae* glabrae. *Ligula* membranacea, linea longior, acutiuscula. *Folia* asperiuscula, fasciculorum erecta, angustissima,

plerumque involuta, pedalia; culmea patula: inferiora planiuscula et lineam lata vel paulo latiora (interdum itidem subinvoluta), ultrapedalia; superiora angustiora et breviora; suprema brevissima vel subnulla. E vaginis superioribus dissitis pedunculi unus vel duo, iterum vagina instructi. *Spicae* 2, bipollicares, fuscescendo-virides, laxae et laxiuscule floriferae. *Articuli* tenues, lineas 2 cum dimidia longi, utrinque pilis erectiusculis ipsis brevioribus ciliati. *Spicula inferior* sessilis; lineari-lanceolata, 4-linealis. Gluma inferior acuta, 5-nervis, pilis adspersa; superior carinato-compressa, 3-nervis, superne pilosula, infra apicem setam emittens, plerumque bilinealem et reflexam. Perianthium inversum, hyalino-membranaceum: valvula neutra longitudine glumarum, obtusiuscula, margine superne fimbriato-ciliata, tota amethystina; hermaphrodita angustissima, mox abiens in aristam 9-linealem, inferne tortam et spadicescentem, medio geniculatam. *Spiculae superioris*, similis sessili sed absque setula glumae, pedicellus articulo paulo angustior et minus dense pilosus. Valvulae 2, glumis non multum breviores.

*Andropogon ternarius Mchx.* Spicis 2—4 alternis, confertis; Articulis pedicelloque spiculae masculae subacuminatae ciliatis: pilis iisdem brevioribus; Arista longitudine spiculae suae (cum mascula glabrae, ad nervos hispidulae, vel pilosulae) aut eadem paulo longiori; Culmi erecti nodis glabris, foliis linearibus.

*Andropogon ternarius.* R. et S. II. p. 818. Mant. II. p. 450.

V. spp. Am. bor.

Specimina vidi 4-pedalia, fere a basi erecto- et folifero-ramosa, Foliis lineas 5 latis, spicis 5—6 pollicaribus. — *Spicae* e glauco et amethystino variae. Ad spicularum basin annulus pilorum brevium. *Articuli* subcuneati. *Flosculi* in utraque spicula 2: hermaphrodito 2-valvi: valvula superiori breviori, apice fimbriata.

## 3. Spicae in paniculae vaginosae radiolis vaginatis conjugatae (SCHOENANTHUS).

*a) Muticae.*

*Andropogon refractus Br.* Radiis dissite alternis, compositis; Spicis patentissimis refractisve, appressifloris; Articulis pedicelloque spiculae tabescentis margine brevipilosulis; Culmi nodis foliisque glabris.

*Andropogon refractus.* R. et S. II. p. 827.

*Anatherum refractum PB.*

V. spp. nov. Holl.

*Culmus* pl. min. sesquipedalis, simplex. *Vaginae* glabrae. *Ligula* membranacea, brevis. *Folia* angusto-linearia, carinato-subcompressa, palmaria — spithamaea, superiora breviora. *Pars* culmi *florifera* 5—6-nodis, e totidem vaginis (quarum inferiores valde dissitae, superiores aphyllae) emittit pedunculum brevem, compositum, radiolis singulis vaginatis, confertis. Spicae in quovis radiolo 2, conjugatae, patentissimae vel refractae, semipollicares l. pollice breviores, angustae, fuscae, basi callosa brevissime barbatae. *Articuli* circiter sesquilineales, subclavato-lineares, margine, praesertim altero latere, brevissime pilosi. *Spicula inferior* trilinealis, lineari-lanceolata, acuminata, glabra. Gluma inferior 7—9-nervis; superior paulo brevior, 3-nervis. Perianthium inversum: valvula neutra glumis paulo brevior, lineari-lanceolata; hermaphrodita paulo minor et angustior. *Spiculae superioris* lanceolato-linearis, bilinealis, inanis, pedicellus articulo similis, paulo brevior.

*Andropogon bicornis L. sp. pl. ed.* 1.*) Radiis corymboso-confertis, compositis; Spicis erecto-patulis; Articulis pedicelloque spiculae tabescentis longissime villosis; Culmi nodis foliisque glabris.

---

*) Rectius fortasse cum sequente *macrouro* sub sectione praecedente recensitus fuisset, ob spicas non conjugatas, sed digitato-alternas. Radioli vaginati paniculam vaginosam constituentes huc referre suaserunt.

*Anatherum bicorne PB.* R. et S. II. p. 809.

*Andropogon heteranthus Tr.* Fund. Agr. p. 186.

V. spp. Ind. occ. Brasil.

*b) Aristatae.*

*Andropogon macrourus Mchx.* Radiis corymboso-confertis, compositis: pedunculis occultis, lanatis; Spicis erecto-patulis; Articulis pedicelloque spiculae tabescentis vel obsoletae longissime villosis; Spiculae sessilis glumis pl min. acutis, nudis, arista setiformi iisdem quadruplo longiori; Culmi nodis foliisque glabris.

*Andropogon macrourus.* R. et S. II. p. 817. Mant. II. p. 450.

*Andropogon spathaceus Tr.* Fund. Agr. p. 186.

*Cinna glomerata Walt.*

V. spp. Am. bor. Doming.

*Andropogon trachypus.* Radiis dissitiuscule alternis, compositis: pedunculis subexsertis (gilvo-) hirsutis; Spicis demum refractis; Articulis pedicelloque spiculae masculae pilosis: pilis accrescentibus iisdem subbrevioribus; Spiculae sessilis glumis nudis, arista iisdem triplo longiori; Culmi nodis glabris, foliis inferne vaginisque hirsutis.

V. spp. Brasil.

Affinis quodammodo videtur *Trachypogoni rufo N. ab Es. Agr. bras. p.* 345. *Culmus* 4—5-pedalis, stricto-erectus, subramosus, parte foliifera 5-nodis. *Vaginae* carinatae, cum foliis rufo-fuscescentes, praesertim superne hirsutae. *Ligula* brevis, membranacea. *Folia* angusto-linearia, ad summum sesquilineam lata, inferne, praecipue in pagina superiori, sordide albo-hirsuta: inferiora ultrapedalia, superiora sensim breviora. *Pars* culmi *florifera*, pl. min. dodrantalis, 4—5-nodis, e quavis vagina emittit pedunculos 1—2, vaginatos et compositos: radiolis singulis e vaginula propria villosa et subaphylla exserentibus pedunculum brevem, superne gilvo-hirsutum, ferentem *spicas* 2 conjugatas basi hirsuto-barbatas, semipollicares, paucifloras, patulas, demum refractas, maxime fragiles. *Articuli* linea parum longiores, tenues, utrinque erecto-ciliati

pilis, quorum superiores ipsos longitudine fere aequant. *Spicula inferior* sessilis, lineari-lanceolata, lineas 2 cum dimidia longa. Glumae obtusiusculae: inferior brevi-bidentata, 5-nervis, nervis lateralibus fortioribus, superne hispidulis; superior 3-nervis, mucronulo terminata. Perianthium inversum, hyalinum: valvula neutra glumis paulo brevior, fimbriata; hermaphrodita subaequilonga, dorso fere a basi emittens aristam pollicarem, fulvo-hirtam, inferne tortam, medio geniculatam, superne flexuosam. *Spiculae superioris*, masculae, acuminatae, sessili aequilongae, pedicellus articulo similis. Valvulae 2, fimbriatae.

*Andropogon hirtus* ***L. sp. pl. ed.*** 1. Radiis pl. min. dissite alternis, simpliciusculis: pedunculis exsertis pubescentibus (pilosis); Spicis patulis; Articulis pedicelloque spiculae masculae (albo-) villosulis: villo ipsis subbreviori; Spiculae sessilis glumis obtusiusculis, villosis, arista iisdem fere quadruplo longiori; Culmi nodis foliisque glabris, hisve pilis adspersis.

*Andropogon hirtus.* R. et S. II. p. 818.

*Trachypogon hirtus* *N. ab Es.* Agr. bras. p. 346.

V. spp. Graec. Cors. Sard. Dalm. Hisp. Pyren. Teneriff. Jam. Cp. b. sp.

*Andropogon xanthoblepharis.* Radiis alternis, subcompositis: pedunculis tandem latere exsertis, glabris; Articulis, pedicello, spiculae masculae, spiculisque perbrevi (fulvo-) pilosis; Arista glumis quadruplo longiori; Culmi nodis foliisque glabris.

V. sp. e Congo.

*Culmus* videtur 3—4 pedalis. *Vaginae* glabrae. *Ligula* membranacea, lineam longa, pilis stipata. *Folia* linearia, inferne compressa, superne plana ibidemque lineas fere 3 lata, glabra, inferiora ultrapedalia. *Pars* culmi *florifera* ultrapedalis, lucida et laxiuscula, 6-nodis, e quavis vagina emittit radios 1—2, iterum nodosos et vaginulatos, vaginularum quavis involucrante pedunculum fere capillarem, glabrum, terminatum *spicis* 2 conjugatis, patulis, pollice brevioribus, spadicescentibus. *Articuli* lineales, utrinque ciliati pilis fulvis, ipsis brevioribus. *Spicula inferior* sessilis, bilinealis, lineari-lanceolata. Gluma

inferior obtusiuscula, praesertim inferne et ad margines pilis adspersa, 5-nervis, mucronulo terminata. Perianthium inversum, hyalinum: valvula neutra glumis parum brevior, lanceolato-linearis; hermaphrodita angustissima, brevior, abiens in aristam circiter 9-linealem, spadiceam, inferne tortam, medio geniculatam; *Spiculae superioris*, sessili aequilongae, perinde recto-pilosulae, masculae, pedicellus articulo similis. Valvulae 2.

*Andropogon bombycinus Br.* Radiis dissite alternis, subcompositis: pedunculis occultis, glabris; Spicis demum refractis; Articulis pedicelloque spiculae masculae densissime (albo-) villosis, villis accrescentibus ipsis sublongioribus; Glumis acutissimis nudis, arista iisdem breviori; Culmi nodis pl. min. barbatis, foliis glabris.

*Andropogon bombycinus.* R. et S. II. p. 827. — V. spp. nov. Holl.

*Culmi* partis superioris (quam solam vidi) nodi inferiores in speciminibus, quae coram sunt, nudiusculi, superiores vero tomentoso-barbati. *Vaginae* glabrae. *Ligula* membranacea, breviuscula. *Pars* culmi *florifera* circiter spithamaea, 2—3-nodis, interrupte emittens e quavis vagina radios 2—3 vel solitarios, tum subcompositos, breves, singulos vaginatos vaginulaeque occultantes pedunculum tenuissimum, glabrum, apice calloso et brevi-denseque barbato ferentem *spicas* 2 conjugatas, demum refractas, pollice (interdum multo) breviores. *Articuli* sesquilineales, undique densisime lanato-villosi: villis albis, ipsis paulo longioribus, patentibus. *Spicula inferior* sessilis, lineas 2 cum dimidia longa, lanceolata, acuta. Gluma inferior glabra vel pilo uno alterove adspersa, 7-nervis: nervis lateralibus crassis, apicem versus alatis, intermediis tenuissimis, inferne evanescentibus; superior subacuminata, 3-nervis, nervo carinali superne alato. Perianthium inversum: valvula neutra glumis paulo brevior; hermaphrodita perangusta, abiens in aristam circiter 3-linealem vel breviorem, rectiusculam, flexuosulam. *Spiculae superioris*, magnitudine sessilis l. paulo minoris, masculae, pedicellus articulo similis. Gluma inferior 9-nervis. Valvula 1.

*Andropogon lanatus Br.* Radiis dissitiuscule alternis, compositis: pedunculis occultis, glabris; Spicis demum refractis (?); Articulo pedicelloque spiculae masculae (?) densissime (albo-) villosis: villis accrescentibus ipsis sublongioribus; Glumis acuminatis, nudis, arista eosdem longitudine superante; Culmi nodis pubescentibus, foliis glabris.

*Andropogon lanatus.* R. et S. II. p. 827.

V. sp. nov. Holl.

*Culmi* partis superioris (qu. v.) *vaginae* glabrae. *Ligula* membranacea, brevis. *Folia* (superiora) involuta, glabra: vaginae infra paniculam extremae dodrantale, vaginarum floriferarum non nimis breviora. *Pars* culmi *florifera* circiter spithamaea. Vaginae spathiformes spicas involucrantes. *Spicae* pollice breviores, juniores (?) conniventes. *Articuli* lineis duabus breviores, dense lanati villis albis, patentibus, ipsis paulo longioribus. *Spicula inferior* sessilis, lanceolata, 3-linealis, acutissima, glabra. Gluma inferior 5-nervis: nervis lateralibus crassioribus; superior 3-nervis, mucronulata. Flosculi 2, hyalini: neuter 1-valvis, glumis paulo brevior; hermaphroditus 2-valvis: valvula inferiori neutra duplo minori, e dorso emittente aristam 6—7-linealem, flexuosulam; superiori perbrevi, tenerrima, apice in fimbrias soluta. *Spiculae superioris* bilinealis, angustae, acutae, pedicellus articulo similis. Valvulae in specimine nostro nullae.

*Andropogon Schoenanthus L. sp. pl. ed.* 1. Radiis approximato-alternis, compositis: pedunculis occultis, glabris; Spicis demum refractis; Articulis pedicelloque spiculae masculae (albo-) villosis, villis accrescentibus ipsorum longitudine; Glumis, nudis, arista iisdem fere bis longiori; Culmi nodis foliisque glabris.

*Cymbopogon Schoenanthus Sprgl.* R. et S. II. p. 833. excll. syn. Forsk., et in Mant. II. p. 458, Roxburghii.

*Andropogon Nardus Tr.* in Sprgl. n. Entd. II. p. 90.

*Andropogon aromaticus Sieb.* Fl. Maur. n°. 38.

*Andropogon pruinosus N. ab Es.* in Sieb. Fl. Maur. II. n°. 45.

V. spp. Mascar. Cp. b. sp. Senegal.

*Andropogon pachnodes.* Radiis (paniculae sublineari-elongatae) approximato-alternis, compositis: pedunculis occultis, glabris (apicem versus obsolete pubescentibus); Spicis patulis; Articulis pedicelloque spiculae masculae perbrevi (albo-) pilosis; Glumis nudis, arista iisdem bis longiori; Culmi nodis foliisque glabris.

V. sp. Nepal.

*Culmus* 4-pedalis, pruinosus, plurinodis. *Vaginae* glabrae. *Ligula* membranacea, brevissima. *Folia* lanceolato-linearia, basi subcordato-rotundata, glabra: majora pedem longa et lineas circiter 8 lata, superiora breviora et angustiora. *Pars* culmi *florifera* sesquipedalis et longior, sublineari-contracta. Radii e singula vagina solitarii, iterum nodosi et vaginati: radiolis singulis vaginula involucrantibus pedunculum tenuem, glabrum, ferentem *spicas* 2 conjugatas, pollice dimidio paulo longiores. *Articuli* lineam longi, pubescentes et utrinque pilis albis, ipsis brevioribus, villosuli. *Spicula inferior* sessilis, fere bilinealis, lineari-lanceolata, glabra. Gluma inferior obtusiuscula, 4-nervis, loco nervi quinti medio depressa; superior paulo acutior, 3-nervis. Perianthium inversum, hyalinum: valvula neutra glumis paulo brevior, lineari-lanceolata; hermaphrodita angustissima, mox abiens in aristam 5—6-linealem, inferne tortam et spadiceam. *Spiculae superioris*, magnitudine sessilis, acutioris, masculae, pedicellus articulo similis, sed latere altero brevissime, altero longius ciliatus. Gluma inferior 7-nervis. Valvula 1.

*Andropogon Iwarancusa Roxb.* Radiis (paniculae sublineari-elongatae) satis approximato alternis, compositis: pedunculis occultis glabris; Spicis demum saepe refractis; Articulis pedicello spiculae masculae densiuscule (sericeo-) villosis: villis iisdem sesquilongioribus; Glumis (subaciculato-acuminatis) nudis, arista iisdem breviori; Culmi nodis foliisque glabris.

*Cymbopogon? Iwarancusa Schult.* Mant. II. p. 458. — V. spp. Ind. or.

Spicae interdum iterum furcatae occurrunt.

## 4. Spicae paniculatae (AMPHILOPHIS).

*a) Muticae.*

*Andropogon muricatus Retz.* Radiis verticillorum pluribus (plurimis); Articulis, pedicello spiculae neutrius (?) acutae, cum fertili aculeolis erectis muricatae, Culmique nodis glabris; Foliis linearibus.

*Anatherum muricatum PB.* R. et S. II. p. 808. (excl. syn. Brownii); Mant. II. pag. 442.

*Andropogon squarrosus Willd.* (non L. fil.).

*Phalaris zizanoides L.* Mant.

V. spp. Ind. or. Inss. Mascar.

*Obs.* Alterum specimen panicula sesquipalmari, articulis rhacheos basi barbulatis, alterum panicula subdodrantali (atro-rubente), articulis nudis; fortasse e loci natalis differentia, ita ut glabra varietas aquatica sit. — Quamvis de Retzii syn. nullum sit dubium, tamen mirum, Ipsum in *Obs. fasc. V. p.* 21. hoc gramen suum ad *Andr. squarrosum L. sppl.*, diversissimum (*Panicum abortivum Br.*), retulisse.

(Varietas mutica *Andropogonis halepensis*, qu. v. infra).

*b) Aristatae.*

*Andropogon laguroides DeC.* Radiis paniculae oblongae confertae solitariis binisve, simplicibus aut bifidis, plerumque a basi floriferis; Articulis pedicelloque spiculae tabescentis longissime sericeo-villosis; Arista spicula sua, pilis brevibus adspersa, triplo longiori; Culmi nodis foliisque linearibus glabris.

*Andropogon laguroides.* R. et S. II. p. 816.

*Trachypogon laguroides N. ab Es.* Agr. bras. p. 349.

V. spp. Brasil. austr.

*Andropogon saccharoides Sw.* Radiis paniculae lineari-oblongae compactae solitariis binisve, simplicibus aut bifidis, a basi floriferis; Articulo pedicelloque spiculae

tabescentis (villosae), densissime sericeo-villosis: villis ipsis longioribus; Arista spicula sua villosissima bis longiori; Culmi nodis sericeo-barbatis, foliis linearibus, villosulis.

*Andropogon saccharoides.* R. et S. II. p. 815. (non *Roxb.*, Mant. II. p. 449.

*Trachypogon argenteus N. ab Es.* Agr. brasil. pag. 348, excll. synn. praeter Swartzii.

V. spp. Brasil. austr.

*Andropogon argenteus DeC.* Radiis paniculae lanceolato-oblongae patulae binis solitariisque, compositis, inferioribus inferne nudis; Articulis pedicelloque spiculae tabescentis (tenui-aculeolatae) accrescendo-villosis: villis supremis ipsis longioribus; Arista spicula sua nuda fere quinquies longiori; Culmi nodis barbatis, foliis linearibus, nudis vel inferne villosulis.

*Andropogon argenteus.* R. et S. II. p. 815.

*Saccharum argenteum Brouss.*

*Erianthus saccharoides Willd.* — V. cc.

*Andropogon caucasicus.* Radiis paniculae lanceolatae lucidae quaternis-binis, simplicibus l. subdivisis, inferne nudis; Articulis pedicelloque spiculae neutrius laxe pilosis: pilis iisdem subbrevioribus; Arista spicula sua (sub lente) brevissime et subaculeolato-pilifera, subtriplo longiori; Culmi nodis foliisque linearibús glabris.

V. spp. e Cauc. orient.

*Culmus* erectus, 2-pedalis, 3-nodis?, inferne erecto-ramosus. *Vaginae* glabrae. *Ligula* brevissima, in pilos soluta pilisque longioribus stipata. *Folia* linearia, acuminata, glabra, rufescendo-glauca, lineam vel lineas duas lata: inferiora dodrantalia, superiora breviora. *Panicula* lanceolata, palmaris, e fusco et pallide viridi varia. Axis pertenuis, glaberrimus. *Radii* semiverticillati, inferiores quaterni, superiores bini, erecti, simplices vel radiolum unum alterumve erectum emittentes, filiformes, basi barbulati. *Spicae* in radiis radiolisque terminales, angustae, pl. min. pollicares. *Articuli* angusti, lineales,

utrinque pilis erectis, ipsis paulo brevioribus ciliati. *Spicula inferior* sessilis, bilinealis, lanceolata, acuta. Gluma inferior obtusiuscula, 7-nervis, ad nervos praesertim laterales valde hispida, sub lente pilis brevissimis adpressis adspersa; superior subacuminata, 3-nervis. Perianthium inversum: valvula neutra lineari-oblonga, glumis duplo brevior; hermaphrodita angustissima, mox abiens in aristam fere 8-linealem, inferne spadiceam et tortam, medio geniculatam. *Spicula superior* lanceolata, neutra longitudine pedicelli sui pertenuis, articulo similis. Valvula 1.

*Andropogon comosus Sprgl.* Radiis paniculae (abbreviatae?) patentis binis, simplicibus, inferne nudis; Articulis pedicelloque spiculae neutrius obtusiusculae pilosis: pilis iisdem brevioribus; Arista spicula sua glabra triplo longiori; Culmi nodis pubescentibus, foliis linearibus glabris.

*Andropogon comosus Sprgl.* S. V. I. p. 287.

V. c.

*Andropogon punctatus Roxb.* Radiis paniculae contractiusculae pluribus, cum binis solitariisque, simplicibus vel inferioribus compositis, inferne nudis; Articulis pedicelloque spiculae neutrius acutiusculae subaccrescendo-pilosis: pilis iisdem brevioribus (l. superioribus longioribus); Arista spicula sua, medio scrobiculata, triplo quadruplove longiori; Culmi nodis pubescentibus glabrisve, foliis linearibus, glabris.

*Andropogon punctatus.* Schult. Mant. II. p. 450.

V. spp. Nepal. et Guin.

*Obs.* Specimen Africanum nodos glabros habet et pilos circa ligulam aut nullos aut breves; Nepalensia nodos pubescentes et pilos ligulam stipantes praelongos.

*Andropogon fulvibarbis.* Radiis verticillorum paniculae apertae plurimis, simplicibus, inferne nudis; Articulis pedicelloque spiculae masculae, e gluma inferiori setigerae, nudis; Arista spicula sua, e gluma superiori setigera, bis et ultra longiori; Culmi nodis foliisque linearibus (excepta basi), glabris.

V. sp. Guin.

*Culmus* 3—4-pedalis, 5-nodis, subramosus. *Vaginae* glabrae. *Ligula* brevissima, ciliaris. *Folia* angusta, carinato-compressa, glabra, basin versus margine ciliata: culmea inferiora pedalia, superiora breviora. *Panicula* (in specimine nostro) basi vagina involucrata, fere dodrantalis, laxa, subsecunda. Axis pertenuis cum radiis verticillatis filiformibus simplicibus apice spiciferis glaber. *Spicae* laxiuscule floriferae: inferiores cum radii parte inferiori anantha non prorsus tripollicares, superiores breviores. *Articuli* pertenues, glabri, lineas tres fere excedentes. *Spicula inferior* sessilis, barba brevi fulva stipata, angusto-lanceolata, 3-linealis. Gluma inferior tenui- 7-nervis, subaciculato-acuta, apicem versus pilis raris brevissimis adspersa; superior aequilonga, carinato-compressa, ad carinam superne pilis aliquot longiusculis et distantibus ciliata, infra apicem exserens setam ipsius longitudine, reflexam. Perianthium inversum, hyalinum, glumis paulo brevius: valvula neutra angusta, sublinearis, marginibus fimbriata; hermaphrodita angustissima, excurrens in aristam pollice paulo breviorem, inferne tortam et spadicescentem, medio geniculatam, superne flexuosulam. *Spiculae superioris*, masculae, angusto-lanceolatae, fere 4-linealis, pedicellus articulo similis, sed paulo brevior. Gluma inferior 5-nervis, apice excurrens in setam ipsa breviorem, flexuosulam; superior 3-nervis, brevissime aciculata. Valvulae 2, lanceolato-lineares, glumis breviores.

*Andropogon laxus Willd.* Radiis paniculae laxae binis, inferne nudis, inferioribus compositis; Articulis pedicelloque spiculae masculae nudiusculae pilosis: pilis iisdem brevioribus; Arista spicula sua pubescente (apice nudiuscula) bis longiori; Culmi nodis glabris, foliis sublanceolato-linearibus, margine hispidis.

*Andropogon laxus.* R. et S. II. p. 813. et Mant. II. p. 448. sub *Andr. serrato.*

V. c.

*Obs.* An idem sit cum *A. serrato Thbg.*, ex hujus descriptione non evinci potest.

*Andropogon stipoides HbKth.* Radiis paniculae sublineari-lanceolatae solitariis l. (pseudo-) binis ternisve, inferioribus plerumque a basi decompositis; Articu-

lis aut glabris aut cum pedicello anantho pl. min. (albo-) villosis; Arista spicula sua pl. min. villosa nunc breviori nunc bis et ultra longiori; Culmi nodis pubescendo-barbulatis, foliis linearibus, glabris.

Variat.: Axi pubescendo-villosulo:

*Andropogon stipoides.* R. et S. II. p. 816.

*Stipa microsperma Willd.* hb.

*Trachypogon stipoides N. ab Es.* Agr. bras. p. 351. (excl. syn. Brownii).

V. spp. Chil.

Axi glabro:

*Andropogon nutans Mühlenb.* (non *L.*). Schult. Mant. II. p. 447.

*Andropogon avenaceus Mchx.*

*Andropogon ciliatus Ell.*

V. spp. Am. bor. Brasil.

* Vaginis scaberrimis:

*Trachypogon scaberrimus N. ab Es.* Agr. bras. p. 354.

V. spp. Brasil.

*Andropogon tropicus Sprgl.* Radiis paniculae lanceolatae ternis, binis solitariisque, inferne nudis: omnibus simplicibus vel inferiorum uno alterove subcomposito; Articulis pedicelloque spiculae masculae villosulae (fulvo-) pilosis: pilis iisdem brevioribus; Arista spicula sua lanceolata, villosula, sesquilongiori; Culmi nodis dense barbatis, foliis linearibus, glabris,

*Andropogon tropicus Sprgl.* S. V. I. p. 287. Kunth rev. gr. tab. 97.

*Holcus fulvus Br.*

*Sorghum fulvum.* R. et S. II. p. 840.

V. spp. nov. Holl.

*Andropogon halepensis Sibth.* Radiis paniculae 4—3—2, decompositis, inferne pl. min. nudis; Articulis pedicelloque spiculae masculae vel subtabescentis (albo-) pilosis: pilis iisdem brevioribus; Arista (vaga) spicula sua ovata, pubes-

cendo-hirtula, nunc breviori nunc bis triplove longiori; Culmi nodis tenui-(saepe obsolete) pubescentibus, foliis lanceolato-linearibus, glabris.

*Sorghum halepense Pers.* R. et S. II. p. 839.

*Holcus halepensis L.* sp. pl. ed. 1.

*Holcus exiguus Forsk.*

*Andropogon arundinaceus Scop.*

*Andropogon avenaceus HbKth.*

*Blumenbachia halepensis Koel.*

*Trachypogon avenaceus N. ab Es.* Agr. bras. p. 354.

V. spp. Terg. Gall. Cauc. Armen. Aegypt. Inss. societ. Mascar. Bras.

*Spiculis aliis muticis, aliis aristatis:* Bras. — *Spiculis omnibus muticis:* (quae var. est *Andropogon decolorans HbKth.* R. et S. II. p. 838. sub *Sorgho*), Manill.

---

## ISCHAEMUM *L.*

*Spicae* aut solitariae, aut geminae pl. min. arcte conniventes. *Spicula sessilis* lanceolata vel ovato-oblonga, biflora: flosculo utroque bivalvi: inferiori neutro vel masculo, superiori hermaphrodito vel femineo. *Pedicellata* (rarissime nulla) a sessili nunc forma, nunc valvularum numero, nunc sexu, nunc armis discrepans.

*Gramina* orbi santiqui regionum calidiorum, praesertim tropicarum — quas in Africa orientali parum (*I. mastrucatum*), in Asia ulterius (*I. crinitum*) excedunt —, praecipue orientalium; pede minora — pedes 3 — 4 alta, erecta vel prostrata, plerumque ramosa.

*Folia* lanceolata vel linearia, interdum involuta.

*Ligula* plerumque membranacea, brevissima et truncata; interdum longior et acuta, imo elongata; rarissime fimbriato-ciliaris.

*Spicae* in apice culmi ramorumve terminales, solitariae vel binae, plerumque arctissime conniventes; rhachi articulata: articulis cum pedicello spiculae superioris interdum crassis et torosis, teretiusculis angulatisve, glabris pilosisve, bifloris.

*Spiculae* imbricatae, lanceolatae vel oblongae. *Sessilis* (aut pedicello s. crure brevissimo suffulta) biglumis, semper biflora, flósculo utroque semper bivalvi superiore fertili, aut aristato, aut, cum inferiori, mutico. *Pedicellata* nunc uninunc bi-flora (interdum nulla), quocumque modo a sessili differens (v. Char. gen.). — *Glumae* modo coriaceae s. (ut articuli) induratae, modo (rarius) chartaceae vel herbaceo-membranaceae tantum, plerumque aequales, flosculis pl. min. longiores: *inferior* 5 — 7 — 9-nervis, mutica: nervis ob compagem glumae duriorem interdum obsoletis, lateralibus fortioribus; *superior* 3 — 5-nervis, interdum setigera. *Perianthia* hyalina vel hyalino-membranacea, plerumque integra.

*Lodiculae* squamae ut in Andropogone; (apice non fimbriatae).

*Stamina* 1? — 2 — 3. *Antherae* lineares.

*Styli* 2. *Stigmata* plumosa, interdum filiformi-angusta.

*Semen* ut in Andropogone; scutello suo tertiam partem longius.

## 1. Spicae geminae.

*Ischaemum muticum L. sp. pl. ed.* 1. Pedunculo vagina incluso; Spicis geminis (pollice brevioribus); Articulis pedicolloque margine (sub lente) hispidulis; Spiculis muticis laevibus; superiori hemiologama vel tabescente; Culmi nodis glabris, foliis cordato-lanceolatis.

*Ischaemum muticum.* R. et S. II. p. 780.

*Ischaemum repens Roxb.* Schult. Mant. II. p. 429.

V. spp. Sumatr.

Graminis Sumatrensis, cui ambo nomina spicifica competere existimo, descriptionem, ut gnari judicent, uberiorem adjicio:

*Culmus* 1 — 2-pedalis, prostratus, crassitie pennae corvinae, subangulato-teretiusculus, glaber, per distantias ultrapollicares plurinodis: nodis glabris,

rarius paulo geniculatis, omnibus vaginiferis, nonnullis radicantibus (fibris albis validiusculis ramulosis) ramosque emittentibus obliquos?, spithamaeos — dodrantales; interdum iterum partitos, distiche foliiferos, rarius simul apice spicigeros. *Vaginae* totae fissae, laxiusculae, internodio plerumque laminaque paulo breviores, glabrae, margine brevissime et densiuscule ciliatae, fauce utrinque brevissime obtuso-auriculatae, ramorum floriferorum supremae aliquot tumidae, brevissime foliiferae, extrema subaphylla. *Ligula* brevissima, membranacea, apice truncato sub lente minutissime fimbriata. *Folia* patentia, lineari-lanceolata, acuminata, infra basin cordatam in pseudopetiolum minutum constricta, striata, glabra, marginibus spinuloso-hispida, in ramis bifaria, extima juniora laete viridia, adultiora cum culmo vaginisque sanguineo-rubentia, lineas 3 lata, sesqui — bi-pollicaria, rarius longiora. *Spicae* in ramorum paucioribus terminales, pedunculo vix e vagina suprema exserto, validiusculo, obsolete pubescente, apice quasi in par spicarum arcte conniventium fisso. Singula spica circiter 8-linealis, ex articulis 3 composita ideoque sexflora. *Articuli* solubiles, lineas 2 longi, coriacei, satis crassi, glabri, laevissimi, triquetri, latere interiori excavato-canaliculati, marginibus inferne sub lente aculeolis s. pilis rigidis brevissimis ciliatuli. Marginum alter basi productus in stipitem s. crus brevissimum, cui insidet spicula inferior, alter in pedicellum articulo simillimum, spiculam superiorem ferentem. *Spicula inferior* androgyna, 3-linealis. *Glumae* coriaceae, aequales, lanceolatae, acutae, glabrae, nitidae, cum rhachi flavendo-pallidae, enervis: inferior s. exterior dorso plano-convexa, marginibus chartaceis inflexis; superioris acutioris, dorso convexae, marginibus non inflexis. *Flosculi* 2: inferior masculus, bivalvis: valvulis membranaceis, lineari-lanceolatis, acutis, aequilongis, glumis parum minoribus: exteriori enervi, interiori tenuiori 1-nervi, marginibus hyalino-appendiculata. Stamina 3, filamentis brevissimis; antheris linearibus, flavis. Lodiculae squamae cuneatae, emarginatae, tenui membranaceae, nervatulae. Flosculus superior femineus, bivalvis, valvulis, ut masculini, enervibus. Ovarium obovato-oblongum.

Styli 2; stigmata dense plumosa, flava. Lodiculae squamae longiores quam in mare. *Spicula superior* s. pedicellata — rarius tabescens — hemiologama, sessili paulo minor. *Glumae* ut in sessili, superiori interdum dorso superne membranaceo-subalata. Flosculus inferior neuter, bivalvis: valvulis ut spiculae sessilis masculinae; superior hermaphroditus, valvulis ut spiculae sessilis femineae. Lodicula, Pistillum, Stamina, ut in spicula sessili. — (Vid. *obs.* sub sequenti specie).

*Ischaemum imberbe Retz.* Pedunculo longe nudo; Spicis geminis (pollicaribus); Articulo pedicellisque laevissimis; Spicula inferiori utrinque bitorulosa, breviaristata, superiori neutra, mutica; Culmi nodis glabris, foliis cordato-lanceolatis.

*Ischaemum aristatum L.* sp. pl. ed. 1.

*Meoschium aristatum PB.* R. et S. II. p. 789.

V. spp. Ind. or.

*Obs.* Adeo affine *mutico* ut potius varietatem, forte magis vegetam, crederes. Arista enim, setulam magis referens, sui similem habet in *I. mutici* valvula feminea inferiore aciculam, brevissimam quidem, sed plerumque satis manifestam. Imo specimen in herbario Academico asservatur e plantis olimPottianis, acicula illa adeo elongata, ut b. Pott. adscripserit *Isch. aristatum*, quamvis gluma torulis, reapse et in genuino *mutico* interdum pl. min. obsoletis, penitus careat.

*Ischaemum ciliare Retz.* Pedunculo nudo; Spicis geminis (ultra-pollicaribus); Articulis dorso ciliatulis; Pedicellis laevibus; Spicula utraque aristata: superiore neutra (?); Gluma inferiori apice utrinque alata, inter alas striata; Culmi nodis (superioribus) barbatis, foliis lanceolato-linearibus.

Apud R. et S. II. p. 790. sub *Arthraxo ciliari*, alienissimo.

V. spp. e China?

*Ischaemum paleaceum.* Pedunculo nudo; Spicis geminis (subsesquipollicaribus); Articulis pedicelloque anantho (fuscescendo) hirsutis; Spicula obtusissima,

2—4 mucronulata, nitido-laevi, mutica; Culmi nodis glabris, foliis lineari-lanceolatis.

V. spp. Nepal.

*Culmus* 1 — sesqui-pedalis, plurinodis, subramosus. *Vaginae*, exceptis superioribus, superne densiuscule hirsutae. *Ligula* membranacea, brevissima. *Folia* firmula, hirsutiuscula, majora lineis duabus latiora et pollices 2 longa. *Spicae* intime conniventes, pollice longiores aut fere sesquipollicares, nitido-fuscae. *Articuli* linea breviores, ad angulos laterales pilis, ipsis parum brevioribus, fusco-spadicescentibus ciliati. *Spicula inferior* sessilis, bilinealis. Gluma exterior subcuneato-oblonga, coriaceo-paleacea, subtruncato-obtusa, 7-nervis: nervis 2—4 in totidem mucronulos excurrentibus; inferior fere duplo angustior, paulo longior, 3-nervis. Flosculi mutici hyalini: inferior neuter, superior hermaphroditus. *Pedicellus* lineam longus, pilis fusco-spadicescentibus ipsius circiter longitudine hirsutus, ananthus.

*Ischaemum segetum.* Pedunculo nudo (clavato); Spicis geminis (sesqui — bi-pollicaribus); Articulis inflato-obovatis dorso-, pedicello (sublineari-triquetro) lateribus (albo-) villosulis; Spicula inferiori transverse rugulosa, aristata, superiori tabescente, mutica; Culmi nodis pubescentibus, foliis lanceolato-linearibus.

*Ischaemum rugosum Tr.* in Spr. n. Entd. II. p. 79. (ubi descript.).

V. spp. Manill.

*Obs. Ischaemum rugosum Gærtn.*, quantum ex icone et descriptione incompletis in Carpol. III. t. 181. videtur, differt articulis triquetris, nec ovato-inflatis, et spicula superiori mascula, aristata. *Ischaemum rugosum Roxb.* diversum culmo erecto (in nostro gramine laxo et sine dubio decumbente), foliis vix lanceolata„ nec" magna„ dicendis, et spicula pedicellata mascula aristata. — *Ischaemum rugosum Salisb.* mihi ignotum.

Folia non, ut l. l. descripta sunt, glabra, sed pilis brevibus adspersa, interdum manifeste hirsuta.

*Ischaemum gibbum.* Pedunculo nudo; Spicis geminis (sub 3-pollicaribus); Articulis pedicelloque linearibus (albo-) villosis; Spicula inferiori bigibbosula, aristata, superiori mutica; Culmi nodis glabris, foliis angusto-lanceolatis l. lanceolato-linearibus.

V. spp. Manill.

Affine videtur *Isch. barbato Retz.*; cui vero spiculae basi barbatae et gluma superior margine ciliata.

*Culmus* erectus 2—l. fere 4-pedalis, a basi subadpresso- et elongato-ramosus, pro altitudine sua satis tenuis, 5—6-nodis. *Vaginae* glabrae. *Ligula* membranacea, vaginarum inferiorum 3—4 lineas longa, decurrens, dorso pilis brevissimis stipata. *Folia* lanceolata, acuta, longiora inferne in petiolum longum attenuata, strictiuscula, glabra, marginibus pl. min. hispida, lineas 3 lata: inferiora interdum ultrapedalia, culmea dodrantalia (inferne non attenuata), sensim minora. *Spicae* in ramis strictis geminae, contractae, 3-pollicares, e pallide viridi fuscoque variae. *Articuli* lineas 2 longi, lineari-triquetri, ad angulos pilis erectis albis ipsis brevioribus villosi. *Spicula inferior* oblongo-lanceolata, acutiuscula, lineis duabus longior. Gluma exterior inferne coriacea, bitoruloso-gibbosula, glabra et enervis, apicem versus magis chartacea, 9-nervis: nervis medio et marginalibus (subalatis, hispidis) fortioribus, reliquis totidem quasi pliculas longitudinales formantibus; gluma interior aequilonga, angustior, acutissima, carinato-compressa. Flosculi 2: inferior masculus, valvulis oblongo-lanceolatis, acutis, subhyalinis; superior femineus: valvula inferiori inferne chartacea, superne subhyalino-bifida, ad fissuram emittente aristam 5—6-linealem, totam tortam, medio geniculatam. *Spiculae superioris*, inferiori paulo minoris, pedicellus articulo duplo brevior eique similis. Gluma inferior non gibba, flosculis aut ut in spicula inferiori, aut neutris, muticis.

*Ischaemum triticeum Br.!* Pedunculo nudo; Spicis geminis (5-pollicaribus); Articulis dorso ciliatis; Pedicello nudo; Spiculae inferioris laevis perianthio supe-

riori exserte aristato, superioris brevi-caudato; Culmi nodis barbatis, foliis lanceolatis.

*Meoschium triticeum* ***PB.*** R. et S. II. p. 790.

V. sp. nov. Holl.

*Vaginae* apicem versus e glandulis minimis hirsutiusculae. *Ligula* membranacea, acuta, bilinealis, decurrens, pilis brevibus stipata. *Spicae* validiusculae Triticum muticum referunt. *Articuli* lineari-triquetri, lineis 2 longiores, angulo dorsali albo-ciliati, pilis ipsis brevioribus. *Spicula inferior* 4–5-linealis, lanceolata, acuta, glabra. Gluma exterior 7-nervis: nervis inferne obsoletis, lateralibus subalatis, alis hispidis; interior paulo angustior, obsolete 3-nervis, fere paulo longior. Flosculus inferior masculus? superior femineus: valvulis omnibus membranaceis, aequalibus, lanceolatis, acutis: flosculi feminei inferiore superne bifida, ad fissuram arista circiter 5-lineali, parum geniculata. *Spiculae superioris*, inferiori similis, parum brevioris, neutrius vel masculae? pedicellus longitudine articuli, magis convexus quam angulatus, glaber. Perianthia 2, bivalvia: valvula superioris inferiori in setulam excurrente.

*Obs.* In specimine nostro spica altera basi bipartita.

## 2. Spicae solitariae.

*Ischaemum pectinatum.* Spica solitaria, hinc florifera; Articulis, pedicello spiculisque muticis glabris; Spicula inferiore marginibus pectinata, superiore tabescente; Culmi nodis glabris, foliis linearibus, obtusiusculis.

V. sp. e regno Birman.

*Culmus* decumbens? cum pedunculis fere bipedalis, his non computatis vix spithamaeus, valde compressus, flaccidulus, glaber, ad nodos 3 aequus, simplex. *Vaginae* compressae, glabrae. *Ligula* brevissima, membranacea. *Folia* linearia, firmula, a vagina geniculato-subrefracta et rectissima, inferne compressa, superne plana ibique lineam cum dimidia lata, obtusiuscula, striata, margine hispidula, parum inaequalia, dodrantalia et longiora, (*vid. infra Obs.*)

cum reliquis partibus sordide glaucescentia. E vagina culmi suprema prodeunt pedunculi (in nostro specimine 4), subfastigiati, ultrapedales, filiformes, uninodes, compressi, excepto nodo paulo geniculato rectissimi, glabri, inde a nodo, infra medium eorum sito, vagina elongata subaphylla vestiti, infra spicam longe nudi. *Spica* sesquipollicaris? recta, compressa, lineam cum dimidia lata, altero tantum latere florifera. Rhachis flexuosula. *Articuli* teretiusculi, subclavati, linea longiores, glabri. *Spiculae* imbricatae: *inferior* lineis duabus longior, ovato-oblonga. Gluma exterior convexiuscula, subherbaceo-coriacea, glabra, 7-nervis: nervis lateralibus crassioribus apice conniventibus in apicem acutum quidem, utrinque vero chartaceo-auriculatum, qua appendice, nervulosa, apice confluente, gluma truncato-obtusissima redditur; marginibus a basi ad appendicem usque pectinata ciliis aculeiformibus 10—12, horizontalibus, apicibus sursum curvatis. Gluma interior multo angustior, lanceolata, acuta, aequilonga, 3-nervis. Flosculi 2, membranaceo-hyalini, glumis breviores, bivalves, mutici, valvulis lanceolatis, subaequalibus: in flosculo superiori ovarium tantum inveni. *Spicula superior* nil nisi squamula inanis, insidens pedicello spathulato, antice convexiusculo, postice plano, glabro, ipsa triplo quadruplove longiori.

*Obs.* In herbario *Marsch. a Bieberstein*, nunc Academici parte, asservatur species, ab ill. possessore *Rottbölla ciliata* inscripta (a b. *Willd.* accepta), quoad spicam nostrae simillima, culmi parte inferiori autem diversissima. Folia (obtusa) enim brevissima sunt: infima vix sesquipollicaria, paulo superiora semipollicaria. E vagina superiori culmus ipse elongatus (nec pedunculi plures fasciculati). Pedicelli spicae inferiores aliquot in hoc specimine ferunt, non squamam inanem, sed spiculam sessili simillimam, cui iterum adstat pedicellus spiculam ferens, non amplius pectinatam, sterilem, cujusque gluma superior, *in novum articulum mutata*, iterum spiculam sustentat, eodem modo formatam; ita ut tali ratione spica abortiens enascatur, brevissima, ex articulis pusillis anthomorphis 4—5 formata (sicut *Epiphystin* nostram, ad Cyperaceas referendam, constructam esse olim demonstravimus). — An

hoc gramen, quod *Rottböllae muricatae Retz.* valde affinis videtur, et quod iconi Sprengelianae in act. Petropol. (Mémoires, Vol. II. Tab. 7.) quodammodo simile est, mera *Ischaemi pectinati* varietas?

*Ischaemum mastrucatum.* Spica solitaria, undique florifera; Articulis, pedicello spiculisque muticis (albo-) villosis; Spicula superiori inani; Culmi nodis glabris, foliis involutis, pungentibus.

*Triticum aegilopoides Forsk.*

*Rottböllia hirsuta Vahl.* R. et S. II. p. 784.

V. spp. Aegypt.

*Ischaemum laxum Br!* Spica solitaria, undique florifera; Articulis pedicelloque utrinque ciliatis; Spicula inferiori, e gluma superiori setigera, longe aristata, superioris muticae glumis subuliferis; Culmi nodis barbulatis, foliis linearibus, acuminatis.

*Ischaemum laxum.* R. et S. II. p. 781.

V. sp. nov. Holl.

*Vaginae* scabriusculae. *Ligula* brevis, in pilos densos soluta. *Folia* inferiora pedalia, acuminatissima, lineas fere 2 lata. *Articuli* bilineales, utrinque pilis mollibus, ipsis brevioribus, accrescendo-ciliati. *Spicula inferior* non computatis armis lineas 4 longa, glabra. Gluma exterior lineari-lanceolata, acuminata, 9-nervis, superne ad margines angustissime membranaceo-alata; interior tertiam partem brevior, sub-5-nervis, apice emittens setam erectam, fere semipollicarem. Flosculus inferior masculus; superior femineus?, arista sesquipollicari. *Spiculae superioris*, magnitudine sessilis, pedicellus articulo similis, paulo brevius ciliatus. Glumae brevi-caudato-subulatae: inferior 7-, superior 3-nervis. Flosculi 2, bivalves, ambo masculi.

*Ischaemum? crinitum.* Spicis solitariis, undique floriferis; Articulis pedicelloque villosis; Spicula utraque longissime setoso-aristata: superiori 1-flora, feminea; Glumis herbaceo-membranaceis, apice fimbriatis: superiori longissime setigera; Culmi nodis barbulatis, foliis lineari-lanceolatis.

*Andropogon crinitus Thunb.!*
*Saccharum paniceum LaM.*
*Perotis polystachya Willd.*
*Pogonatherum saccharoideum PB.*
*Pogonatherum polystachyum R. et S. II. p.* 497.
*Homoplitis crinita Trin.* fund. Agr. p. 166.
*Pollinia polystachys Sprgl.*

V. spp. Jap. Inss. Sandw. Manil. Nepal.

Glumarum tela quam in congeneribus tenerior; organisatio Ischaemi. Gluma inferior herbaceo-membranacea, lineari-oblonga, 5 — 7-nervis: nervis tribus longioribus; superior 1-nervis, subcarinato-compressa, e nervi apice setam emittens. Flosculi in *spicula inferiori* 2, bivalves: inferior masculus, superior hermaphroditus: valvulis hyalinis, subaequalibus. Stamina 2. In *spicula superiori*, pedicellata, flosculus 1, bivalvis, femineus. (V. quae de hoc gramine disseruimus in prooemio).

---

β) Spiculae homogeneae.

### Spodiopogon *Trin. Fund. Agr.*

*Spicae* nunc conferto-alternae vel subdigitatae, nunc paniculatae. *Spiculae* homomorphae, homogeneae, biflorae, perianthiis bivalvibus: flosculi fertilis valvula inferiori aristata.

*Gramina*, (spicarum habitu inter Andropogonem et Ischaemum intermedia), utriusque orbis regiones praecipue tropicas amantia: unica specie (sibirica) 50 gradus boreales transcendente; pedum 2 — 4 altitudine, plerumque erecta.

*Folia* pl. min. lanceolata, rarissime linearia, vel involuta.

*Ligula* membranacea, rarius apice in fimbrias breves soluta.

*Spicae* subdigitatae, aut conferto-alternae, paniculatae in specie sibirica: Articulis plerumque pilosis.

*Spiculae* imbricatae: pl. min. lanceolatae, homomorphae, homogeneae, altera sessilis vel (rarius) brevi-stipitata, altera pedicellata: utraque biflora et seminifera. *Glumae* aequales, coriaceo-l. herbaceo-chartaceae, flosculis parum longiores: altera interdum caudata: inferior 7—9—13-nervis; superior 3—5—7-nervis, carinato-compressa. *Flosculi* bivalves, pl. min. hyalini, valvula inferiori interdum, saltem inferne, chartaceo-membranacea: flosculus inferior masculus (an interdum neuter?) muticus; superior femineus vel hermaphroditus, e valvula inferiori, integra vel bifida, aristatus.

*Lodiculae* squamae cuneatae, truncatae, emarginatae.

*Stamina* 3. *Antherae* lineares.

*Styli* 2. *Stigmata* plumosa.

*Semen* . . . . .

*Spodiopogon angustifolius.* Spicis (2—4) subdigitatis; Articulis pedicelloque glabris, apice barbatis; Gluma inferiori tridenticulata, infra medium fasciculato-(gilvo-) barbata, superiori subhirsuta; Culmi nodis (ad vaginarum basin) puberulis, foliis (praelongis) angustissimis, involutis.

V. spp. Nepal.

*Culmus* erectus, sesquipedalis et altior, ima basi squamis tomentosis vestitus, simplex vel superne e vaginis pedunculiferus, 3-nodis. *Vaginae* glabrae, basi tantum pubescentes. *Ligula* brevissima, membranacea, apice truncato minutissime fimbriata. *Folia* erecta, firma, subfiliformi-involuta, culmum aequantia. *Spicae* 2—4, ad axin brevem subdigitato-alternae, flaventes. *Articuli* linea breviores, compressi, apice barba pilorum ipsis longiorum hirsuti. *Pedicellus* teretiusculus, articulo paulo longior, apice brevi-barbatus. *Spiculae* lanceolatae, bilineales. Gluma inferior acutiuscula, brevissime tridentata, 9-nervis, margine hirsuta et infra medium dorsi fasciculo pilorum gilvescentium barbata; superioris simillimae, carinato-compressae, pilis brevioribus et paucioribus, nervo dorsali plerumque in aciculam producto. *Flosculi*

subhyalini: inferior masculus, valvulis lineari-lanceolatis, enervibus; superior hermaphroditus, masculo similis, valvula inferiori autem arista fere 3-lineali, vix torta, geniculata.

*Spodiopogon Byronis.* Spicis (3–4) subdigitatis; Articulis pedicelloque (flavendo-) pilosis: pilis iisdem subbrevioribus; Glumis hirsutiusculis: superioribus caudato-setigeris; Culmi nodis glabris, foliis linearibus, planis.

V. sp. ex O-Wyhee (inss. Sandwich. — in sinu Byronis ll.).

*Culmus* bipedalis, erectus, ramosiusculus. *Vaginae* glabrae. *Ligula* membranacea, lineam longa, obtusa, exserta. *Folia* sublanceolato-linearia l. linearia tantum, lineam cum dimidia vel lineas 2 lata, glabra, spithamaea et breviora, supremum perbreve. *Spicae* erectae, subdigitatae, bipollicares, flaventes. *Articuli* subcuneati, crassiusculi, bilineales, triquetri, ad angulos erecto-hirsuti. *Pedicellus* minus crassus et minus breviusque pilosus. *Spiculae* lineis 3 breviores, ovato-lanceolatae. Gluma inferior 11–13-nervis, nervo medio excurrente in setulam, in spicula sessili paulo longiorem, pilis erectis albentibus, in spicula pedicellata brevioribus, hirsutiuscula; superior similis, carinato-compressa, obsolete plurinervis, nervo medio excurrente in setam, in spicula sessili longitudine glumae, geniculatam, in spicula pedicellata brevissimam. *Flosculi* membranaceo-hyalini: inferioris neutrius? valvulis lineari-lanceolatis: inferiore sub—7-nervi, superiori dissite binervi; flosculus superior hermaphroditus: valvula inferiore apice bifido-fimbriata, ad fissuram emittente aristam circiter 7-linealem (in spicula pedicellata nonnihil breviorem), inferne tortam, mox supra basin geniculatam.

*Spodiopogon petiolaris.* Spicis (pluribus) conferto-alternis; Articulis pedicelloque ad angulos brevi-ciliatis; Glumis glabris: inferiori obtusiuscula, superiori acuta; Culmi nodis pubescentibus, foliis lanceolatis in petiolum attenuatis.

V. sp. Nepal.

*Culmus* videtur 3-pedalis, plurinodis, infra spicas pubescens. *Vaginae* basi subtumidae ibique dorso hirtulae, superne solutae et pl. min. involutae.

*Ligula* chartacea, bifida, acuta, subinvoluta, lineas 4 longa, utrinque late decurrens. *Folia* a ligulae basi, cum qua subarticulata sunt, resupinantur petiolo tenui, pl. min. sesquipollicari, excurrente in laminam lanceolatam, compressam et in hoc statu lineas 2—4 latam, antrorsum falcatulam, spithamaeam, margine hispidulam. *Axis communis* circiter sesquipollicaris. *Spicae* purpurascentes, inferiores solitariae, superiores alternatim plures, fasciculatae: longiores pollices 3 excedunt. *Articuli* et *pedicelli* sesquilineales, subcuneato-lineares, triquetri, ad angulos pilis brevibus albis ciliati. *Spiculae* laxiuscule imbricatae, bilineales, lanceolatae. Gluma inferior obsolete 9-nervis, apice obtusiusculo subdenticulata, ad nervos marginales superne scabriuscula; superior carinato-compressa, acuta, 5-nervis. *Flosculus* inferior masculus, valvulis lanceolatis, acutis: inferiori obsolete 3-, superiori 2-nervi; superior femineus, masculo parum minor: valvula inferiori ovata, enervi, ad medium usque bifida, ad fissuram emittente aristam 3-linealem, inferne tortam, medio geniculatam.

*Spodiopogon latifolius N. ab Es. Agr. bras. p.* 360. Spicis (pluribus) digitatis (saepius in fasciculis 2, approximatissimis); Articulis pedicelloque, (ad articulationem propriam, spiculam inferiorem sustentantem, stellatim barbato) glabriusculis; Glumis acutis, apice dorsi barbatis; Culmi nodis glabris, foliis lanceolatis.

*Andropogon latifolius Sprgl.*

*Ischaemum latifolium Kth.* rev. gram. tab. 99.

V. spp. Ind. occ. Brasil.

*Spodiopogon chordatus.* Spicis (3—6) subdigitatis; Articulis pedicelloque breviciliatis; Spiculis glabris, caudato-acuminatis: gluma inferiori inferne laevi, superne (discolori) 9-striata; Culmi nodis barbatis, foliis lanceolatis.

V. spp. ex Iuss. Marian. et Carolin.

*Culmus* 2—4-pedalis, adscendendo-decumbens, parte prostrata valde ramosus, multinodis, ad nodos, praesertim superiores, subtomentoso barbatus.

*Vaginae* e glandulis pusillis pilis albis patentibus villoso-hirsutissimae. *Ligula* membranacea, obtusissima, linea brevior. *Folia* lanceolata vel lineari-lanceolata, majora fere pollicem dimidium lata, dodrantalia, spithamaea et breviora, glabra, margine hispida, basi plerumque pilis longiusculis adspersa. *Spicae* in ramis terminales, conferto-subdigitatae, contractae, longiores 4-pollicares, crassiusculae. *Articuli* et *pedicelli* subcuneato-lineares, crassi, ultralineales, triquetri, ad angulos brevi-ciliati. *Spiculae* lineas 2 cum dimidia longae, lanceolato-ovatae, acutae. Gluma inferior spiculae sessilis acutissima, inferne latius-, pedicellatae acuminata utrinque angustius coriaceo-chartacea, enervis, laevis, convexa et viridula, medio vero et superne depressa, chartacea, fuscescens et nervis 9 approximatissimis striata. Gluma superior carinato-compressa, tota chartacea, tenui- 7-nervis: spiculae sessilis paulo longius caudata: caudula ipsa breviori. *Flosculus* inferior masculus, valvulis membranaceis, lanceolatis, acutis: inferiori obsolete 5-, superiori dissite 2-nervi. Flosculus superior hermaphroditus, valvulis ut in masculo: inferiori supra medium dorsi e nervis 3 confluentibus emittente aristam circiter 4-linealem, inferne tortam, medio pl. min. geniculatam.

*Spodiopogon sibiricus Trn. Fund. Agr. p.* 192. Spicis paniculatis; Articulis, pedicello glumisque acutis villosis; Culmi nodis glabris, foliis lanceolatis.

V. spp. Ircut. Chin. bor.

*Culmus* pl. min. 3-pedalis, erectus, simplex, 6-nodis. *Vaginae* glabrae. *Ligula* membranacea, brevis, obtusa. *Folia* lanceolata, basi pilis adspersa, margine hispida, pollicem dimidium lata vel latiora, dodrantalia, inferiora et superiora breviora, laete viridia. *Panicula* erecta, contracta, spithamaea vel brevior; *Axis* tenuis, teretiusculus, flexuosulus, glaber. *Radii* 2—4 verticillati, erecti, tenuissimi, inferiores longius nudi, apice, ubi in spicam abeunt, cum hujus basi articulati, paulo incrassati et brevissime barbati. *Spicae* pollice pl. min. breviores, laxi- et patuliflorae. *Articuli* et *pedicelli* satis tenues, subclavati, bilineales, apice barbati et altero latere villosi pilis albis ipsis subbre-

vioribus. *Spiculae* ovato-lanceolatae, trilineales. Glumae herbaceo-chartaceae: inferior acuta, 9-nervis, villis albis erectis (in spicula pedicellata magis marginalibus) villosula; superior subacuminata, 7-nervis, itidem villosa. *Flosculus* inferior masculus: valvula inferiori membranacea, ovata, acuta, 5—7-nervi; superiori elliptico-lanceolata, paulo breviori, hyalina, obtusiuscula, enervi. Flosculus superior hermaphroditus (antheris abortivis): valvula inferior inferne chartaceo-membranacea, superne margineque hyalina, ad medium usque acute bilaciniata, ad fissuram exserens aristam pl. min. 4-linealem, inferne tortam, medio geniculatam. Valvula superior dilatata, hyalina, acuta, enervis, fere longitudine inferioris.

*Obs.* Praeter species enumeratas ad Spodiopogonem fortasse etiam referendi *Andropogones: tridentatus Roxb.* et *villosus Thunb.*

Huic generi maxime affinis est *Rottböllia digitata Sibth.*, genus sine dubio proprium constituens (*Pholiurus Nob.* in *Sprgl. n. Entd. II. p.* 67. — excludens vero *Pholiurum pannonicum Fund. Agr. p.* 132, Lepturi speciem). Differt a Spodiopogone spiculis muticis; pedicello spiculae superioris infra apicem articulato; lodiculae squamis oblique truncatis, altero latere cornuformi-productis; Ovario apice pubescente.

---

## POLLINIA. *)

*Spicae* subdigitatae vel conferto-alternae. *Spiculae* subhomomorphae, homogeneae, pseudunifiorae: valvula inferiori (neutra), mutica, (rarissime nulla), superiori (hermaphrodita) aristata.

*Gramina*, Andropogonis habitu, zonae orbis antiqui tropicae, prostrata, pl. min. ramosa.

---

*) Generis in Spreng. Pug. II. et in L. S. V. ed. XVI. minus apte compositi nomen memoriae celeberrimi Botanici Veronensis consecratum, mutato charactere, servare quam novum introducere malui.

*Folia* pl. min. lanceolata.

*Ligula* membranacea, brevis.

*Spicae* in ramorum apice subdigitato- l. alterno-confertae, articulis plerumque pilosis, saltem apice barbatis.

*Spiculae* lanceolatae, omnes ejusdem formae ac sexus, altera sessilis, altera pedicellata: utraque in perianthio inverso seminifera. *Glumae* chartaceae vel subcoriaceo-chartaceae; subaequales: inferior 3 — 5-, vel suppressione nervi medii, 2 — 4-nervis; superior subcarinato-compressa, 3-nervis, interdum setigera. *Flosculi* 2, univalves, hyalini: inferior neuter, paulo major; superior hermaphroditus, angustissimus, aristatus (in *Pollinia spectabili* valvula neutra suppressa).

*Lodicula* Andropogonis.

*Stamina* . . . . .

*Styli* 2. *Stigmata* plumosa.

*Semen* Andropogonis.

*Pollinia spectabilis.* Spicis (plurimis) digitatis: Articulis, basi barbatis, pedicelloque rariuscule pilosis: pilis ipsis brevioribus; Gluma inferiori superne utrinque pectinato-ciliata (Perianthio 1-valvi); Culmi nodis glabris, foliis lanceolatis.

V. spp. ex Inss. Carol.

*Culmus* pedes plures longus, prostratus, radicans, furcato-ramosus. *Vaginae* glabrae. *Ligula* membranacea, perbrevis, truncata. *Folia* lanceolata, basi in petiolum brevissimum attenuata, glabra, latiora lineas 8 lata, non multum inaequalia, longiora fere semipedalia. *Spicae* 20—40, arcte digitatae, tenues, circiter 3-pollicares. *Articuli* tenues, teretiusculi, fere 2-lineales, pilis adspersi ipsis brevioribus; *Pedicellus* similis, brevior. *Spiculae* basi annulo pilorum brevissimorum cinctae, lineis 2 breviores, angusto-lanceolatae. Gluma inferior subbidentato-acutiuscula, 5-nervis, superne utrinque brevi-ciliata pilis rigidiusculis: nervis in spicula pedicellata manifestioribus, et ciliis

brevioribus. Gluma superior acutissima, 3-nervis, carinato-compressa. *Perianthium* 1-valve, hermaphroditum: valvula angustissima in aristam capillaceam, rectiusculam, spicula circiter sesquilongiorem excurrens.

*Pollinia tenuis.* Spicis (3) subdigitatis; Articulis pedicelloque pilosis; pilis eosdem subaequantibus; Gluma spiculae sessilis superiori caudato-setigera; Culmi nodis glabris, foliis angusto-lanceolatis.

V. spp. Manill.

*Culmus* pedalis, prostratus, radicans, filiformis, inferne ramosus. *Vaginae* glabrae, longitudine laminae, superiores eadem longiores. *Ligula* membranacea, brevis, pilis brevibus albis stipata. *Folia* lanceolata, lineam ad lineas 2 cum dimidia lata, inferne margine denticulata: majora bipollicaria, reliqua pollice breviora. *Spicae* in ramorum apice plerumque ternae, subdigitatae, contractae, 6—8-lineales, pallidae. *Articuli* spiculis suis paulo breviores, triquetri, ad margines pilosi, pilis supremis ipsos longitudine subaequantibus. *Pedicelli* paulo longiores, eodem modo pilosi. *Spiculae* lanceolatae, vix lineam longae, albentes. Gluma inferior obtusiuscula, binervis, superne strigiloso-ciliatula; superior in spicula sessili caudata, cauda ipsius longitudine, in spicula pedicellata acuminata tantum. *Perianthium* inversum, hyalinum: valvula neutra linearis, acutiuscula; hermaphrodita brevissima, angustissima, bidentata, sub dentibus exserens aristam tortilem, geniculatam, spicula 3—4-plo longiorem.

*Pollinia ciliata.* Spicis (4) subdigitato-confertis; Articulis pedicelloque utrinque-, gluma inferiori bidentata superne ciliatis; (Perianthio bivalvi); Culmi nodis obsolete pubescentibus, foliis lanceolato-linearibus.

V. sp. Nepal.

Affinis *P. spectabili*, differt articulis crassioribus distincte ciliatis, Spicis multo paucioribus, alternis, Perianthio bivalvi, arista geniculata, ligula longiori, foliis multo angustioribus, nodis pubescentibus.

*Culmus* bipedalis et ultra, prostratus, radicans, subfiliformis, ramosus, multinodis, nodis pubescentibus. *Vaginae* glabrae. *Ligula* e vaginae lateribus formata, chartaceo-membranacea, linea brevior, bifida, obtusiuscula. *Folia* lanceolato-linearia, majora lineas 2 lata, glabra, parum inaequalia, vix palmaria. *Spicae* ad axin communem semipollicarem confertae: inferiori solitaria, superioribus fasciculatis, circiter 3-pollicares, purpurascentes, satis graciles. *Articuli* fere bilineales, crassitudine spiculae, dorso teretiusculi, utrinque ciliati pilis ipsis brevioribus. *Pedicelli* articulis tertiam partem breviores, eodem modo ciliati. *Spiculae* bilineales, lanceolatae, angustae, basi brevissime barbatae. Gluma inferior 4-nervis, apice in dentes 2 breves excurrens, a medio ad apicem utrinque breviciliata: ciliis in spicula pedicellata minus manifestis; superior carinato-compressa, trinervis, in mucronem l. aciculam brevissimam excurrens. *Perianthium* hyalinum, inversum, glumis multo brevius: valvula neutra oblonga, acutiuscula; hermaphrodita parum angustior, bidentata, ad dentium basin exserens aristam spicula circiter sesquilongiorem, inferne tortam, medio geniculatam.

*Pollinia nuda.* Spicis (3—4) alternis, subconfertis (laxifloris); Articulis pedicelloque glabris; Glumis acuminatis; Culmi nodis glabris?, Foliis subcordato-lanceolatis.

**V.** sp. Nepal.

*Culmus* decumbens, ultrabipedalis, tenuis, radicans, ramosus, (nodi ligulaque, quales sint, cum specimen non amplius praesto sit, non memini). *Vaginae* glabrae. *Folia* subamplexicaulia, basin versus lineas 3—4 lata, pl. min. pollicaria, aequalia, glabra. *Spicae* in apice ramorum ad axin tenuem, pollice breviorem, 3—4, confertiusculo-alternae, pollices duos et quod excedit longae, graciles, laxiflori, pallide virides. *Articuli* tenuissimi, triquetri, bilineales, cum *pedicello*, dimidio breviori, nudi. *Spiculae* lanceolatae, angustae, lineas fere 2 longae, glaberrimae. Glumae acuminatae: inferior 4-nervis, superior 3-nervis. *Perianthium* inversum, hyalinum: valvula neutra lineari-

lanceolata, acuta; hermaphrodita glumis fere duplo brevior, apice excurrens in aristam tenuissimam (fere capillarem) et versus apicem cirrosulam, spicula fere triplo longiorem.

An hujus generis etiam *Andropogon tristachyus Roxb.* (*And. trispicatus Schult.*)?

---

## SACCHARUM L.

*Spicae* paniculatae, compositae. *Spiculae* pl. min. lanceolatae, basi lana longa cinctae, homomorphae, homogeneae, biflorae: flosculo neutro univalvi; hermaphrodito bivalvi, mutico vel aristato (valvula inferiori in muticis saepe angustissima, subobsoleta).

*Gramina*, ut Andropogones geographice distributa, muticis speciebus tamen mere tropicis, plerumque elata (6–12, rarissime 2 tantum pedes alta), erecta, humida ripasque arenosas amantia.

*Folia* aut linearia, in aliis latiora, in aliis perangusta et subinvoluta; aut pl. min. lanceolato-linearia.

*Ligula* membranacea, plerumque brevis, apice interdum ciliari.

*Panicula* semper spectabilis, radiis verticillatis aut semiverticillatis, compositis: radiolis strictis, singulis spicifloris s. rhaches formantibus articulatas, demum maxime fragiles: articulis pl. min. tenuibus, nudis l. villosulis, ad juncturas lana longa barbatis.

*Spiculae* pl. min. lanceolatae (interdum ovato-lanceolatae), nudae vel villosulae, basi lana longa cinctae, ad quemvis articulum binae, homogeneae: altera sessilis (vel brevissime stipitata), altera pedicellata. *Glumae* pl. min. chartaceae (marginem versus interdum hyalino-membranaceae), acutae vel acuminatae, aequales: inferior 5–7-nervis: nervis saepissime margini propioribus, medio saepe obsoleto vel deleto: superior 3-, rarius 5-nervis, subcarinato-compressa. — *Flosculi* 2. hyalini vel submembranacei: *inferior* neuter, univalvis, muticus;

*superior* hermaphroditus, bivalvis: valvula inferior aut mutica, et tum angustissima, interdum obsoleta vel reapse suppressa; aut ex apice vel infra apicem aristata: arista rarius geniculata, plerumque recta, setiformi, nonnumque brevissima; superior brevior.

*Lodiculae* squamae cuneato-quadratae, emarginatae, pl. min. nervatae: in unica specie apice fimbriato-ciliatae.

*Stamina* 1—2—3. *Antherae* lineares.

*Styli* 2. *Stigmata* plumosa.

*Semen* ut in Andropogone.

## 1. Spiculae muticae (Saccharum).

*Saccharum officinarum L. sp. pl. ed.* 1. Articulis pedicelloque nudis; Glumis acutis, glabris, villo baseos subduplo brevioribus.

*Saccharum officinarum.* R. et S. II. p. 285.

V. spp. ex Inss. Sandw. et cult. ex Ind. occ.

*Obs.* In hac ut in sequente specie perianthii fertilis valvula inferior subfiliformis, haud raro obsoleta, interdum suppressa.

*Saccharum spontaneum L. sppl.* Articulis pedicelloque longissime sericeo-villosis; Glumis acuminatis, villo baseos plus duplo brevioribus: superiore tenuissime fimbriato-ciliata.

*Imperata spontanea PB.* R. et S. II. p. 289.

*Saccharum aegyptiacum Willd.* R. et S. II. p. 286.

*Saccharum biflorum Forsk.*

V. spp. Ind. or. Inss. Carol. Aegypt.

*Obs.* Nulla inter gramen aegyptiacum et indicum differentia. Distantia spicularum inter se (s. articulorum longitudo) maxime variabilis, ita, ut spicae aliae arcte-, aliae dissitiflorae in uno eodemque specimine inveniantur.

## 2. Spiculae aristatae (ERIANTHUS MCHX. *)

*Saccharum arundinaceum Retz.!* Articulis, pedicello glumisque acuminatis villosis; Spicula inferiori sessili; Perianthii acicula brevissima, glumas non excedente; Foliis lato-linearibus.

*Saccharum arundinaceum.* R. et S. II. p. 286.

V. sp. Ind. or.

*Saccharum pedicellare.* Articulis pedicelloque parce villosulis; Spicula inferiori brevissime pedicellata; Glumis acutissimis, glabris, pilis baseos dimidio brevioribus; Perianthii arista flexuoso-geniculata, longitudine spiculae; Foliis lato-linearibus.

V. spp. ex ins. Nukahiva.

*Culmus* 6—7-pedalis, inferne (cum vaginis) crassitie digiti, plurinodis, nodis glabris. *Vaginae* inferiores superne punctis exasperatae. *Ligula* membranacea, brevis. *Folia* linearia, pollicem non prorsus lata, glabra, margine hispida, inferiora fere tripedalia. *Panicula* sesquipedalis, densissima. Radii in quovis verticillo plures, erecti, a basi jam valde compositi, radiolo quovis spicam formante simplicem, palmarem aut longiorem, maxime fragilem. *Articuli* tenues, teretiusculi, 3-lineales, villis albis tenuissimis adspersi, ad juncturas lana ipsorum longitudine vel longiori, patente, barbati. *Pedicellus* similis, sed tertiam partem brevior. *Spiculae* lineari-lanceolatae, glabrae, bilineales: inferior, supra lanam articuli terminalem, pedicello peculiari brevissimo et nudo insidens, et supra eundem basi villis, ipsa fere duplo longioribus stipata. *Glumae* chartaceae: inferior acuta, in spicula inferiori 4-, in pedicellata 5-nervis; superior subacuminata, 3-nervis. *Flosculi* hyalini, apice et ad

---

*) Erianthus haud magis differt a Saccharo, quam Andropogon ab Anathero. Acicula adeo abbreviata in *Sacch. arundinaceo*, ut spiculae muticae videantur. Valvulae, teneriores quidem in Saccharo, non minus tenerae in *Sacch. pedicellari*, genuina Erianthi specie.

latera pl. min. fimbriati: inferior neuter, 1-valvis: valvula lineari-lanceolata, glumis paulo breviori; superior hermaphroditus, bivalvis: valvula inferior longitudine neutrius sed angustior, supra medium dorsi aristam exserens 4-linealem, flaventem, inferne geniculatam; valvula superior duplo brevior, oblongo-lanceolata. *Stamina* 1—2.

*Saccharum giganteum Pers.* Articulis pedicello spiculaque superiori villosis; Spicula inferiori sessili; Glumis acutis, pilis baseos dimidio brevioribus; Perianthii arista recta, spicula bis longiori; Foliis angusto-linearibus.

*Andropogon alopecuroides L. sp. pl. ed.* 1. (excl. Syn. Sloan.)

*Anthoxanthum giganteum Walt.*

*Erianthus saccharoides Mchx.* R. et S. II. p. 323.

*Erianthus giganteus Mühlenb.*

*Saccharum alopecuroides Nutt.*

V. spp. Am. bor. Brasil.

*Obs.* Quotquot hujus vidi specimina, omnia folia angusta (nec lineari-lanceolata, ut *Mühlenbergio*, nec lato-linearia, ut *Neesio* dicuntur) habebant.

*Saccharum brevibarbe Pers.* Articulis pedicelloque villosis; Spicula inferiori sessili; Glumis acuminatis, glabris, pilos baseos aequantibus; Perianthii arista recta, spicula sesquilongiori; Foliis lanceolato-linearibus.

*Erianthus brevibarbis Mchx.* R. et S. II. p. 324. Mant. II. p. 180.

V. spp. Am. bor.

*Obs.* Glumae lana non longiores in nostra planta (a celebri quodam Botanico Americano determinata); an itaque gramen Michauxianum? — Lodiculae squamae apice fimbriato-ciliatae.

*Saccharum brasilianum.* Articulis pedicelloque villosis; Spicula inferiori sessili; Glumis acutis, glabris, pilis baseos tertiam partem brevioribus; Perianthii arista recta, longitudine spiculae; Foliis subangusto-lanceolato-linearibus.

V. spp. Brasil.

*Culmus* videtur 4—5 pedes altus, strictus, inferne glaberrimus, infra paniculam lanato-pubescens. Nodi pilis brevissimis subobsolete barbati. *Vaginae* glaberrimae, radicales ima basi barbatae, una ulterave (rarius) marginem versus pilosula. *Ligula* chartacea, breviuscula, truncata, apice tenuissime ciliatula. *Folia* rigida et fere coriacea, undique glaberrima, parte inferiori (angustissima, superne profunde exarata et marginibus scabriuscula) quasi petiolum formantia, in foliis inferioribus pedalem, sensim dilatatum in laminam praelongam, in sicco gramine subinvoluto-compressam, expansam semipollice latiorem. *Panicula* circiter pedalis, densa, facie Sacchari gigantei. Radii in quovis verticillo plures, compositi et a basi floriferi, radiolo quovis spicam simplicem formante, maxime fragilem. *Articuli* subcuneato-lineares, lineam cum dimidia longi, triquetri, ad angulos villis breviusculis lucide ciliati. *Pedicellus* similis et aequilongus, longius villosus. *Spiculae* basi pilis dense cinctae, ipsis tertiam circiter partem longioribus, lineas 2 longae, lanceolatae, glabrae. *Glumae* chartaceae, acutae: inferior bidenticulata, praeter nervos marginales satis crassos enervis; superior 1-nervis, carinato-compressiuscula. *Flosculi* submembranacei: inferior neuter, 1-valvis, longitudine glumarum; superior hermaphroditus, bivalvis: valvula inferiore ex apice aristam emittente circiter 3-linealem, rectam, pallidam; valvula superior perparva.

*Saccharum Ravennae Murr.* Articulis pedicelloque villosis; Spicula inferiori sessili; Glumis acuminatis, glabris, lanam baseos aequantibus; Perianthii arista recta, spicula breviori; Foliis angusto-linearibus, subinvolutis.

*Andropogon Ravennae L. sp. pl. ed.* 2.

*Erianthus Ravennae PB.* R. et S. II. p. 323.

*Ripidium Ravennae Trin.* Fund. agr. — V. spp. Gall. Armen. Cret.

*Saccharum jamaicense.* Articulis pedicelloque villosis; Spicula inferiori sessili; Glumis subcaudatis, lanam baseos subaequantibus; inferiori ad latera villis adspersa; Perianthii arista recta, spicula breviori; Foliis latiuscule linearibus.

V. spp. Jamaic.

*Culmus* videtur 4-pedalis. *Vaginae* intus sericeo-villosae. *Ligulae* loco barba villorum. *Folia* linearia (lineas 3 lata), acuminatissima, subtus glauca, pagina superiori scabriuscula, margine hispida, inferiora circiter bipedalia. *Panicula* dodrante longior, lineari-lanceolata, lucida. Axis flexuosulus, asperiusculus. *Radii* subbini, alternatim semiverticillati, erecti, plerumque jam a basi lucide compositi radiolis s. spicis simplicibus, pl. min. pollicaribus, minus facile fragilibus. *Articuli* bilineales, tenues, lineares, villis ipsis longioribus adspersi, ad juncturas lana ipsorum longitudine cincti. *Pedicellus* idem, sed paulo brevior. *Spiculae* lanceolatae, trilineales, albentes. *Glumae* chartaceae, 3-nerves, subcaudato-acuminatae: inferior villis ipsius fere longitudine praesertim marginem versus adspersa, rarissime subglabra; superior epilis. *Flosculus* inferior neuter, 1-valvis, glumis similis sed membranaceus et tenuissime 5-nervis; superior hermaphroditus, hyalino-membranaceus, bivalvis: valvula inferior neutra paulo minor, subtilissime 3-nervis, apice exserens aristam setiformem, rectam, albam, longitudine valvulae. Valvula superior brevior, oblonga, bifido-dentata.

*Saccharum strictum Sprgl.* Articulis pedicelloque villosulis; Spicula inferiori sessili; Glumis obtusiusculis, pilis adspersis, lanam baseos aequantibus; Perianthii arista recta, spicula breviori; Foliis lanceolato-linearibus.

*Andropogon strictus W. et Kit.* R. et S. II. p. 815.

*Ripidium strictum Trin.* Fund. Agr.

V. spp. e Banatu.

*Saccharum obscurum.* Articulis pedicelloque nudis; Spicula inferiori sessili; Glumis acutiusculis, glabris, lana baseos sublongioribus; Perianthii arista rectiuscula, longitudine spiculae; Foliis angusto-linearibus, inferioribus subinvolutis.

V. sp. in herb. Academico, patria non indicata.

Similis *S. stricto*, differt lana alba, non colorata, panicula lucidiori, foliis angustioribus.

*

*Culmus* forte tripedalis, subramosus, nodis barbatis. *Folia* culmea plana, sesquilineam lata, glabra. *Ligula* membranacea, obtusiuscula, hirsutie brevi stipata. *Panicula* rubens, 4-pollicaris.

---

## ERIOCHRYSIS *P. B.*

*Spicae* paniculatae, compositae. *Spiculae* oblongae, obtusae, homomorphae, hermaphrodito-homogeneae (irregulariter interdum intermixtis masculis): aut inaequaliter aut aequali-pedicellatae: unica tum saepius sessili. *Flosculi* 2, valvulis 2 vel 3, muticis.

*Gramina* utriusque orbis tropica, erecta, plures pedes alta.

*Folia* lanceolato-linearia.

*Ligula* membranacea, brevis.

*Panicula* linearis, nunc densissime glomerato-compacta, nunc lucida, patens. Radii verticillati, compositi, radiolis singulis spicifloris s. rhaches formantibus articulatas, demum pl. min. fragiles, pilosulas et ad juncturas perbrevi-barbatas.

*Spiculae* oblongae, pl. min. obtusae et hirsutae, ad quemvis articulum binae, interdum ternae (imo plures): una aut sessili aut brevius pedicellata, altera vel reliquis longius-, rarius omnibus aequali-brevipedicellatis. — *Glumae* subcoriaceo-chartaceae, aequales: inferior 5-nervis: nervis, praeter utriusque lateris marginalem fortem, aut totis aut inferne pl. min. obsoletis; superior 3-nervis, subcarinato-compressiuscula. — *Flosculi* 2, mutici: inferior neuter, 1-valvis: valvula submembranacea, glumis vix breviori; superior hermaphroditus, paulo minor, subhyalinus, 1-vel 2-valvis.

*Lodiculae* squamae cuneato-quadratae, emarginatae.

*Stamina* 3. *Antherae* lineares.

*Styli* 2. *Stigmata* plumosula.

*Semen* . . . . .

*Eriochrysis cayennenis PB.* Panicula glomerato-compactissima; Spiculis (praeter sessilem) aequali-pedicellatis, inverse unifloris; Foliis villoso-pubescentibus.

*Eriochrysis cayennensis.* R. et S. II. p. 290.

V. spp. Brasil.

*Eriochrysis fusca.* Panicula patente lucida; Spiculis inaequali-pedicellatis, bifloris; Foliis glabris.

*Saccharum fuscum Roxb.*

*Tricholaena? fusca Schult.* Mant. II. p. 164.

V. sp. Ind. or.

---

b) *Articulus floriferus, in radiolis terminalis, solitarius.*

a) Articulus liber (spatha nulla involucratus).

## ARTHROPOGON *N. ab Es.*

*Panicula. Spicula* in apice radiolorum solitaria, biflora: flosculo inferiori masculo, superiori hermaphrodito: utroque bivalvi, mutico.

*Species* hucdum non nisi unica nota, Brasiliana, cui culmus 2—3-pedalis, erectus;

*Folia* lineari-lanceolata;

*Ligula* brevissima, ciliata;

*Paniculae* radii verticillati, radiolos emittentes paucos alternos, simplicissimos, apice spiculam ferentes et cum eadem articulatos.

*Spiculae* deciduae, basi pilis stipatae. *Glumae* subcoriaceo-chartaceae: inferior perangusta mox abiens in subulam; superior lanceolato-oblonga, compressa, 3-nervis, infra apicem setulam emittens. *Flosculi* 2, bivalves: inferioris, masculi, valvula inferior consistentia glumarum earumque superiorem (demta setula) aequans, 5-nervis; superior hyalina, aequilonga, linearis, bifida vel bidentata tantum. Flosculus superior hermaphroditus, valvulis hyalinis, muticis: superiori multo breviori.

*Lodiculae* squamae cuneato-quadratae.
*Stamina* 3. *Antherae* lineares.
*Styli* 2. *Stigmata* plumosula.
*Semen* oblongum, basi angustatum, compressum, liberum, glabrum, scutello suo dimidio longius.

*Arthropogon villosus N. ab Es. Agr. bras. p.* 320.
V. spp. Brasil.

---

### CHRYSOPOGON. *Trin. Fund. Agr.*

*Panicula. Spiculae* in apice radiorum vel radiolorum ternae: media sessili, hermaphrodito-hemiologama, duabus lateralibus pedicellatis, masculis.

*Gramina* orbis antiqui tropica (unica tantum specie ad 46 gradus latid. bor. descendente), plerumque erecta, pl. min. ramosa, et pedes aliquot alta.
*Folia* linearia.
*Ligula* brevissima (rarius breviuscula tantum), ciliata.
*Paniculae* radii verticillati, plerumque simplicissimi, in quibusdam radiolos emittentes paucos, alternos, simplicissimos.
*Spiculae* in apice radiorum aut radiolorum terminales et basi communi cum iisdem articulatae, tandem plerumque deciduae, ternae, basi communi pilis (plerumque aureis) stipatae, lanceolatae, biflorae: *media* sessili, flosculo neutro 1-valvi; hermaphrodito 1—2 valvi, aristato; *laterali utraque* pedicellata, mascula, valvulis muticis. — *Glumae* subcoriaceo-chartaceae, subaequales, flosculis pl. min. longiores: *inferior* (spicularum pedicellatarum interdum setigera) 1–3–5-nervis: nervis inter laterales mediis plerumque obsoletis; *superior* (spiculae sessilis interdum setigera) 1—3-nervis, pl. min. compressa. *Perianthia* hyalina.
*Lodiculae* squamae cuneato-quadratae.

*Stamina* 3. *Antherae* lineares.

*Styli* 2. *Stigmata* plumosula.

*Semen* Andropogonis.

*Chrysopogon aciculatus Trin. Fund. Agr. p.* 188. Paniculae radiis simplicibus, sursum hirsutis; Spiculae sessilis gluma inferiori acuminata, superiori bifido-dentata; Pedicellis culmique nodis glabris.

*Andropogon aciculatus Retz.* R. et S. II. p. 812.

*Raphis trivialis Lour.* Trin. ic. gram. I. tab. 8. 9.

*Centrophorum chinense Trin.* Fund. Agr. p. 106.

V. spp. Cap. virid. Inss. Nukahiv. Waahu, Jav.

*Obs.* Pedicellus ille, basi sua demum solutus et calcariformis, radiolus est apicem versus radio simplici enascens; de quo vid. *Ic. gram. l. l.*

*Chrysopogon Gryllus Trin. Fund. Agr. p.* 188. Paniculae radiis simplicibus, nudis; Spiculae sessilis gluma inferiori subacuminata, superiori spicularumque lateralium inferiori setigera; Pedicellis culmique nodis glabris.

*Pollinia Gryllus Sprgl.* R. et S. II. p. 828.

*Andropogon Gryllus L.* Amoen.

*Andropogon paniculatus LaM.*

*Apluda Gryllus Pal. B.*

*Holcus Gryllus Br.*

V. spp. Monsp. Terg. Dalm.

*Chrysopogon montanus Trin. in Sprgl. n. Entd. II. p.* 93. Paniculae radiis simplicibus, nudis; Spiculae sessilis gluma inferiori obtusa, superiori (dorso fulvo-pectinata) et plerumque etiam spicularum lateralium inferiori setigera; Pedicellis (abbreviatis) fulvo-pilosis; Culmi nodis glabris.

*Andropogon montanus Koen.!* (fide speciminis ex herbario Banksii).

*Andropogon monticola Schult.* (sec. Kth. rev. gr. p. 165.)

*Andropogon? Sprengelii Kth.* rev. gr. p. 166.

*Pollinia fulva Sprgl.*

V. spp. Ind. or.

*Chrysopogon serrulatus.* Paniculae radiis simplicibus, nudis; Glumis glabris: spiculae sessilis inferiori obtusiuscula, superiori spiculaeque lateralis alterius (vel utriusque) inferiori setigera: seta vaga; Pedicellis sursum pilosis; Culmi nodis glabris.

V. spp. Nepal.

*Culmus* ultra-bipedalis, erectus et erecto-ramosus, 7–8-nodis. *Vaginae* glabrae. *Ligula* brevissima, ciliaris. *Folia* linearia, glabra, margine serrulato-hispida, culmea inferiora dodrantalia, supremum angustissimum et brevissimum. *Panicula* erecta, contractiuscula, ultrapalmaris, fusco-purpurascens vel spadicescens. *Radii* in verticillis plurimi, simplices, capillaceo-tenuissimi, inaequales. Fasciculus spicularum terminalis cum radio articulatus, basi pilis spadiceis brevissimis cinctus. *Spiculae* lineari-lanceolatae, lineis duabus longiores: *Media subsessilis*, hermaphrodita. Gluma inferior angusta, obtusiuscula, 3-nervis; superior paulo latior, 3-nervis, infra apicem bidenticulatum excurrens in setam ipsius longitudine, (quandoque nullam). Perianthium hyalinum, inversum: valvula neutra glumis quartam partem minor, perangusta, linearis, obtusiuscula: hermaphrodita brevior, excurrens in aristam spadicescentem, inferne tortam, medio geniculatam, circiter 7-linealem. *Spicularum lateralium* pedicellus spicula hermaphrodita dimidio brevior, tenuis, teres, inferne glaber, superne altero latere paulo magis hirsutus pilis brevibus, aureis. Glumae lanceolatae: inferior 5—7-nervis, interdum aut in utraque aut in altera spicula tantum, setam ex apice emittens, nunc satis longam, nunc brevissimam; superior aequilonga, 3-nervis. Valvulae 2, perangustae, hyalinae, staminibus 3, flavis.

*Chrysopogon glabratus.* Paniculae radiis compositis, nudis; Spiculae sessilis gluma inferiori pl. min. acuta, margine serrulata, superiori aciculata; Pedicellis culmique nodis glabris.

V. sp. Nepal.

*Culmus* videtur 3-pedalis et altior, ad paniculam usque vaginatus. *Vaginae* glabrae. *Ligula* brevissima, ciliaris. *Folia* linearia, pagina superiori inferne et marginem versus pilis adspersa: inferiora pedalia. *Panicula* dodrantalis, in sicco gramine flavescens. *Radii* in verticillo plures, tenuissimi, inaequales (longioribus circiter 5-pollicaribus), cum axi communi hispidissimi (ceterum absque pilis), radiolos 2—3, alternos, distantes, appresso-erectos, satis longos et simplicissimos emittentes. Fasciculus spicularum in apice radiolorum pilis spadiceis brevissimis cinctus. *Spiculae* lanceolatae: *media subsessilis*, lineas 3 longa, hermaphrodita. Gluma inferior obsolete 5-nervis, acutiuscula, margine sursum serrulata; superior 3-nervis, apice brevissime aciculata. Perianthium inversum: valvula neutra glumis paulo brevior, hyalina, lineari-lanceolata; hermaphrodita brevissima et angustissima, mox abiens in aristam fuscescentem, inferne tortam, superne geniculatam, circiter 10-linealem. *Spicularum lateralium* pedicelli inaequales, sub-clavato-lineares, hinc convexi inde plani, glabri: alter spiculam hermaphroditam fere aequans. Spicula fere 5-linealis: glumae 3-nerves, acuminatae. Valvulae hyalinae, lanceolatae. Stamina 3. — Pedicellus longior interdum iterum fert spiculam hermaphroditam, adstante spicula mascula pedicellata.

*Chrysopogon violascens.* Paniculae radiis compositis, nudis; Glumis omnibus simpliciter acutis; Pedicellis pilosulis; Culmi nodis barbatis.

*Holcus parviflorus Br. β.* R. et S. II. p. 840.

*Andropogon violascens N. ab Es.* in Sieb. Agrostoth. n° 65.

V. spp. nov. Holl.

*Obs.* Aliae hujus generis species sunt: *Pollinia pallida Sprgl.; Pollinia depauperata Sprgl. R. et S. II. p.* 829. 830., *Andropogon verticillatus Roxb. Schult. Mant. II. p.* 447. *Androp. subulatus Presl rel. Haenk.* 1. *p.* 341., *Androp. alternans Presl l. l. p.* 342., *Androp. fuscus Presl ibid.*

*Articulus floriferus, (vel saltem ejusdem pedunculus) spatha involucratus.*

## ANTHESTERIA *L.*

*Panicula* vaginosa, composita. *Spiculae* legitime 7, in apice radiolorum fasciculatae: 4 sessiles (eorumve loco rarius totidem fasciculi pilorum) verticillatae, neutrae vel masculae, ambientes hermaphroditam brevistipitatam, cui adstant masculae vel neutrae 2, pedicellatae.

*Gramina* orbis utriusque, praecipue antiqui tropica (paucis forte speciebus ad 35—40 gradus lat. bor. descendentibus), longe plerumque erecta, pl. min. ramosa, pedes 1—12 alta.

*Folia* linearia l. sublanceolato-linearia.

*Ligula* membranacea, brevis.

*Panicula* vaginosa: e singuli axeos nodi vagina radiis aut aliquot, iterum nodosis et vaginosis, aut pluribus, 4—5—7—8, fasciculatis iisque tum plerumque simplicibus et brevibus, basi intra vaginam communem stipatis squamis (plerumque 4) lanceolatis, membranaceis, quarum una alterave interdum, ceu spatha propria, involvit squamulas alias (3), similes sed breviores. Radius quisque simplex (vel radiorum compositorum radiolus quisque simplex) apice fert vaginam spathaeformem, cum ipso articulatam, quae includit pedunculum, breviorem longioremve, apice exserentem fasciculum spicularum. *Spiculae*, legitime et plerumque septem, conniventes: 4 verticillatae, sessiles, aut (rarius) brevipedicellatae, reliquos 3 ambientes, lanceolatae, muticae, neutrae vel masculae: in unica specie aut omnibus aut tribus saltem, in totidem fasciculos pilorum abortientibus. Spicula intermedia fusiformi-cylindracea, conico-stipitata, pilis stipata, demum indurascens, hermaphrodita, aristata; huic adpositae sunt spiculae 2 pedicellatae, neutrae vel masculae, sessilibus similes: rarius aut plane nullae, aut solitaria tantum, aut alterius loco denuo hermaphrodita spicula, adjectis binis pedicellatis, masculis. — *Glumae* spicularum incompletarum membranaceae: inferior 5—7—9—11—13 nervis; superior paulo bre-

vior et angustior, 3 — 5-nervis. Glumae spiculae hermaphroditae demum coriaceae, subinvolutae: inferior obsolete 7 — 9-nervis, superior aequilonga, angustior, 3 — 5-nervis. — *Flosculi* hyalini: in spiculis incompletis 1 vel 2, uni- vel bi-valves, mutici; in spicula seminifera perianthium plerumque inversum: valvula hermaphrodita aristata.

*Lodiculae* squamae cuneatae, truncatae, emarginatae.

*Stamina* 3. *Antherae* lineares.

*Styli* 2. *Stigmata* plumosa.

*Semen* lineari-oblongum, antice sub-3-gonum, liberum, epile, scutello suo dimidio longius.

## 1. Spiculae 4 infimae integrae.

*Anthesteria prostrata Willd.* Paniculae radiis simpliciusculis; Pedunculo, plerumque e spatha (glabra) longe emerso, nudo, vel superne hispido; Spiculis incompletis 4 inferioribus brevius-, 2 superioribus longius pedicellatis; Hermaphrodito glabriusculo vel pilis raris adsperso; Culmi nodis glabris.

*Cymbopogon glandulosus Sprgl.* R. et S. II. p. 833.

*Andropogon prostratus L.* Mant.

V. spp. Ind. or.

Spicularum incompletarum superiorum altera saepissime in hermaphroditam, aristatam, iterumque duabus spiculis pedicellatis stipatam, mutata invenitur.

*Anthesteria imberbis Retz.* Paniculae radiis simpliciusculis; Pedunculo intra spatham (basi barbatam) glabro; Spiculis incompletis 4 inferioribus sessilibus cum 2 pedicellatis glabris; Hermaphrodito apicem versus hirtulo; Culmi nodis dense barbatis.

*Anthesteria imberbis.* R. et S. II. p. 842.

*Stipa arguens Thbg.*

V. sp. C. b. sp.

*

*Anthesteria australis Br.* Paniculae radiis 2—3-radiolosis; Pedunculo intra spatham (glabram pilosulamve) superne hinc barbato; Spiculis incompletis 4 inferioribus sessilibus cum 2 pedicellatis glabris; Hermaphrodito superne hirtulo; Culmi nodis glabris.

*Anthesteria australis.* R. et S. II. p. 844.

V. spp. nov. Holl.

*Anthesteria barbata Desf.* Paniculae radiis 2—3-radiolosis; Pedunculo intra spatham (pilis adspersam nudamve) glabro; Spiculis incompletis 4 inferioribus sessilibus superne irregulariter glanduloso-piliferis, pedicellatis 2 glabris; Hermaphrodito superne hirtulo; Culmi (erecti) nodis glabris l. adpresso pilosulis.

*Anthistiria barbata.* R. et S. II. p. 843. excll. synn. Willd. et Thunb.

V. spp. C. b. sp. Philipp. Mascar.

*Obs. Anth. barbata, imberbis* et, ut videtur, *ciliata Retz.* fortasse ad speciem unicam reduci poterunt.

*Anthesteria japonica Willd.* Paniculae radiis pluriradiolosis; Pedunculo intra spatham (densiuscule pilosam) glabro; Spiculis incompletis 4 inferioribus sessilibus cum pedicellatis 2 culmique nodis glabris; Hermaphrodito superne hirtulo.

*Anthistiria japonica.* R. et S. II. p. 843 sub *A. barbata.*

*Andropogon ciliatus Thbg.*

V. spp. Jap. Chin.

*Anthesteria villosa LaM.* Paniculae radiis pluriradiolosis; Pedunculo intra spatham (glabram) piloso; Spiculis incompletis 4 inferioribus sessilibus cum pedicellatis 2 culmique nodis glabris; Hermaphrodito dense (fusco-) hirsuto.

*Anthistiria villosa.* R. et S. II. p. 844.

V. spp. Javan.

Arista hermaphroditi fasciculorum in radiis radiolisque inferiorum brevissima, interdum obsoleta; terminalium plurium haud minus quam in congeneribus evoluta.

*Anthesteria arundinacea Roxb.* Paniculae radiis pluriradiolosis; Pedunculo intra spatham (glabram) pubescente; Spiculis incompletis 4 inferioribus sessilibus cum pedicellatis 2 (fulvo-) villosis; Hermaphrodito subsericeo-pubescente; Culmi nodis glabris?

*Anthistiria arundinacea. Kth.* rev. gr. tab. 95.

*Cymbopogon arundinaceus Schult.* Mant. II. p. 457.

V. sp. Ind. or.

*Anthesteria scandens Roxb.* Paniculae radiis multiradiolosis; Pedunculo intra spatham (glabram piliferamve) glabro: Spiculis incompletis 4 inferioribus sessilibus margine regulariter glanduloso-piliferis, pedicellatis 2 culmique (repentis) nodis glabris; Hermaphrodito superne hirtulo.

*Anthesteria scandens.* Schult. Mant. II. p. 464.

V. spp. Inss. Mascar.

## 2. Spicularum 4 infimarum loco totidem fasciculi pilorum.

*Anthesteria cymbaria Roxb.*

*Andropogon cymbarius L.* Mant.

*Cymbopogon elegans Sprgl.* R. et S. II. p. 833. Mant. II. p. 457.

V. spp. Ind. or.

*Spathae* horizontaliter patentes, cymbaeformes *pedunculum* occultant quoque horizontalem, superne hinc barbatum, apice ferentem fasciculos pilorum (3—) 4 aequilongos: uno plerumque mutato in spiculam neutram masculamve, lanceolatam, sessilem, biglumem, univalvem. E medio horum fasciculorum surgit *spicula hermaphrodita*, brevissime stipitata, e perianthii valvula inferiori longe aristata; cui tandem spiculae utrinque adstat *spicula mascula pedicellata:* pedicello breviciliato. — Omnes hae spiculae erectae marginem cymbae s. spathae horizontalis apicibus suis paulo excedunt.

Sed raro haec inflorescentia intacta reperitur. Sunt enim spathae, ubi spicularum pedicellatarum altera iterum hermaphrodita et aristata, comitata est

pedicellis duobus, quorum alter denuo spiculam hermaphroditam fert, adpositis spiculis 2 masculis pedicellatis. In aliis spathis, eodem modo spicigeris, hermaphroditarum spicularum non nisi unica aristata: altera, vel tertia insuper, muticis, pedicellis ipsis adpositis plane ananthis.

---

## APLUDA L.

*Panicula* vaginosa, composita. *Articulus* in apice radiolorum (spatha involucratus) 3-florus: Spicula inferiori sessili, duarum pedicellatarum altera tabescente.

*Gramina* orbis antiqui tropica, culmo decumbente aut scandendo-suberecto, ramoso, pedem vel pedes plures longo.

*Folia* lanceolato-linearia (vel lanceolata).

*Ligula* membranacea, exserta.

*Panicula* vaginosa, angustata, longe plerumque interrupto-lucida. *Radii* ad singulos nodos fasciculato- (saepissime subumbellato-) radiolosi: fasciculo radiolorum singulo vaginato et intra vaginam (spathaceam) basi squamis lanceolatis, membranaceis, plerumque 6 stipato. Radiolus quilibet apice vaginula s. spatha terminatus, includente articulum floriferum. *Articulus* spicula terminatus, hinc convexus, inde concavus, basi a parte concava inflatus in receptaculum, cui insidet Spicula sessilis et ipsi adstans pedicellus, articulo similis. *Spicula sessilis* oblongo-lanceolata, compressiuscula: *Glumae* subaequales: inferior demum cartilagineo-coriacea, 9-nervis; superior chartacea, latior, subcymbiformis, dorso superne retusa, 5-nervis. *Flosculi* 2, hyalini, bivalves: valvulae perianthii inferioris, nunc neutrius? nunc masculi, nunc feminei, aequales, lanceolatae, glumis paulo breviores; perianthii superioris hermaphroditi inferior forma glumae superioris, aut integra et mutica, aut bifida et aristata; valvula superior dimidio brevior, oblonga. — *Spicula articuli terminalis* sessili

similis, paulo minor: gluma utraque 9-nervi. Perianthia nunc 1, nunc 2, modo neutra? modo mascula, modo superius hermaphroditum, legitime muticum, tamen in *Apl. aristata* haud raro itidem aristatum. — *Pedicellus* terminatus squama brevissima, ovata, subcucullata, sterili.

*Lodiculae* squamae cuneatae, oblique repando-truncatae, altero latere in mucronulum exeuntes.

*Styli* 2. *Stigmata* plumosa, purpurascentia.

*Stamina* 3. *Antherae* lineares.

*Semen* obovato-oblongum, liberum, epile, compressiusculum, scutello suo dimidio longius.

*Apluda mutica L. sp. pl. ed.* 1. Perianthii hermaphroditi valvula inferiori integra, mutica.

*Calamina mutica PB.* R. et S. II. p. 810.

*Andropogon glaucum Retz.*

V. spp. Jav. Manill.

*Obs.* Quomodo ab hac differant *Apluda glauca Schreb.* et *Apl. geniculata Roxb.* e descriptionibus non liquet.

*Apluda aristata L. Amoen.* Perianthii hermaphroditi valvula inferiori bifida, aristata.

*Apluda aristata.* R. et S. II. p. 841. (excl. syn. Retz.).

* Radiis ita abbreviatis, ut radiolorum fasciculi verticillos sessiles axis communis referant: v. spp. Ceyl.

* Radiis inferioribus, aut ex eodem nodo aliis, elongatis, paniculam laxam et lucidam constituentibus: v. spp. Manill. — Ejusd. var. tenuioris, foliis basi pilis adspersis, v. spp. cult. e sem. Nepal.

* Radiis ut in praecedente, sed in panicula coarctata, densa; spiculis minoribus; culmo robustiori; foliis latioribus (medio fere pollicem dimidium latis), refer. figuram majorem *Schreb. Gram. Tab.* 42; v. sp. Nepal.

[Quae Andropogineis adnumerari solet,

XEROCHLOAE *Br.*,

ob glumas valvulis teneriores ad Panicea gramina potius referendae, organisationis descriptionem (*Xer. barbatae*) uberiorem hic addere non absque re erit.

*Spatha* s. *vagina universalis*, ad paniculae simplicis nodum quemvis enata, includit partes sequentes:

*a*) Ex ejusdem basi interiori exit *radiolus* (sustentans articulum suum floriferum), inter quem et spathae universalis latus interius:

*b*) Cavitati ejusdem spathae universalis dorso accumbens *squama membranacea*, binervis, e basi sua interiori emittens *pedicellum ananthum*, ipsi arcte adpressum.

*c*) Huic squamae (*b*) apposita est alterno situ *squama altera*, minor, binervis, pari modo obvolvens *pedicellum* (qui sustentat spiculam fertilem *superiorem*).

*d*) Huic squamae (*c*) iterum opposita est alterno situ *squama tertia*, brevissima stipitata, binervis, minor, loco pedicelli obvolvens e basi sua enatam *spiculam sterilem* biglumem et 1-valvem, parvam.

*e*) Huic demum opposita *squama quarta* s. potius *spathula propria*, magnitudine squamae *b*, brevi-stipitata, plurinervis, obvolvens:

*α*) squamam angustam, coriaceam, lineari-lanceolatam, subtriquetram, fronte canaliculatam, dorso hirsutam (cl°. *Brown* valvula interior [inferior?] flosculi masculi dictam, quam non esse posse e sequentibus elucebit).

*β*) *Spiculam fertilem*, *inferiorem*, arcte cum squama *α* coalitam. *Glumae* 2, tenui-membranaceae, biflorae, flosculis-breviores: *inferior* ovata, superiori duplo brevior, uninervis; *superior* lanceolato-ovata, trinervis. *Flosculus inferior* masculus, bivalvis: valvis longitudine subaequalibus chartaceis: inferiori latiori, crassius et fere coriaceo-, superiori angustiori, tenuius bi-nervi. *Stamina* 3, Antheris linearibus subsessilibus. *Lodicula* nulla. — *Flosculus superior* femineus, bivalvis: valvulis aequalibus, chartaceis, e basi ovata subulatis, conniventibus, involutis. *Lodicula* nulla. *Ovarium* lineari-oblongum. *Stylus* 1, satis longus. *Stigmata* 2, plumosa, exserta.

*f*) *Spicula superior*, insidens pedicello *c*, involucrata *spathula propria*, magnitudine squamae *b* vel *e*, includente

*α*) corpus idem, quod sub *α* descripsimus;

*β*) *spiculam* ipsam, cui *glumae* ut in spicula inferiori. *Flosculus inferior* neuter, bivalvis: valvulae utriusque nervis basi cartilagineis. *Flosculus superior* femineus, inferne cartilagineus, bivalvis, constructus ut in spicula inferiori; sed in eodem specimine jam maturus, semiferus: *Semen* ellipticum, liberum, eberbe, dorso minus, fronte magis convexum, scutello suo fere dimidio longius. *Lodicula* in utroque flosculo nulla.]

## II. SPICULAE AD AXIN (PARTIALEM) CONTINUUM S. NON ARTICULATUM SESSILES VEL PEDICELLATAE.

### 1. Spiculae cujusvis partis heterogeneae.

#### SORGHUM *Mönch.*

*Juba* panicularis. *Spiculae* ad radiolos inarticulatos alternatim binae: altera sessilis, ovato-oblonga (rotundata), seminifera; altera pedicellata, lanceolata, neutra.

*Gramina* utriusque orbis tropica vel regionum calidiorum, plures (5 — 12) pedes alta, erecta.

*Folia* lanceolata.

*Ligula* brevis, membranacea, ciliata.

*Axis* communis radii, ut radioli, sparsi, inarticulati, inferiores subverticillatim positi, jubam nec paniculam veram constituunt. *Spiculae* seminiferae in radiolis confertim alternae, sessiles, adposito singulis pedicello brevi, sustentante spiculam

multo minorem, sterilem: *Seminifera* ovata vel obovato-rotundata. *Glumae* chartaceae, subaequales, inferior 9—11—13-, superior 5—7—9-nervis: nervis interdum obsoletis. *Flosculi* 2, hyalini, forma glumarum, marginibus plerumque fimbriato-ciliati: inferior neuter, univalvis; superior hermaphroditus bivalvis: valvula inferiori plerumque supra dorsi medium e nervis 3 confluentibus aristam emittente breviusculam, tortilem et geniculatam, saepe tamen, praesertim in inferioribus jubae radiorumque spiculis, nullam. *Spicula neutra* pedicello brevi barbulato insidens, sessili multo angustior eamque non superans, mutica. Glumae lanceolatae, chartaceae: inferior 7-, superior 5-nervis: nervis interdum obsoletis. Valvula plerumque 1, hyalina, rarius 2, interdum nulla.

*Lodiculae* squamae subcuneato-quadratae, inferne herbaceae, apice truncato longo-ciliatae.

*Styli* 2. *Stigmata* plumosa.

*Stamina* 3. *Antherae* lineares.

*Semen* obovatum, liberum, eberbe, exsulcum, scutello suo fere dimidio longius.

Species sequentes, notis non satis definitis distinguendae, unius ejusdemque speciei varietates potius esse videntur.

*Sorghum cernuum Willd.* Juba compacta, cernua; Spiculis fertilibus villosis, neutrorum pedicello ipsis subaequilongo.

*Sorghum cernuum.* R. et S. II. p. 837.
*Holcus cernuus Ard.*
*Andropogon cernuus Roxb.* Schult. Mant. II. p. 461.
V. cc.

*Obs.* Jubam, seminibus vel jam perfectis, erectam, spiculasque glabratas vidi in quibusdam, e seminibus a genuino *S. cernuo* captis, enatis speciminibus, in horto Gorenkensi.

*Sorghum vulgare* **Pers.** Juba contracta, erecta; Spiculis fertilibus inferne superneque hirtis, neutrorum pedicello ipsis multo breviori.

*Sorghum vulgare.* R. et S. II. p. 836.

*Sorghum commune PB.*

*Holcus Sorghum L.*

*Holcus Durra Forsk.*

*Andropogon Sorghum HbKth.*

V. spp. Bras. Guin. Ind. or. et cc.

*Obs.* Vario modo ludens auctoribus dicitur *S. nigrum*, *bicolor*, *rubens*, *pyramidale*, *medium*.

*Sorghum saccharatum Pers.* Juba erecta, laxa, patente: Spiculis fertilibus villosis glabratisve, neutrorum pedicello ipsis multo breviori.

*Sorghum saccharatum.* R. et S. II. p. 837.

*Holcus saccharatus L.* Mant. II. (emendata definitione in sp. pl. ed. 1).

*Holcus Dochna Forsk.*

*Andropogon saccharatus Roxb.* R. et S. II. p. 462.

V. spp. inss. Sandw.? et cc.

*Obs.* Intermediae inter *S. vulgare* et *saccharatum* formae vix dubium de amborum origine communi relinquunt.

---

## 2. Spiculae omnes homogeneae.

*a) Pedicellatae.*

### IMPERATA *Cyr.*

*Jubae* thyrsiformis radii pl. min. compositi, cum radiolis racemiformes. *Spiculae*, pedicellis alternatim binis solitariisve suffultae, lineari-lanceolatae, lana longa cinctae, muticae.

*Gramina* regiones tropicas ad 47. grad. lat. bor. excedentia, erecta, 1–6-pedalia.

*

*Folia* pl. min. lanceolata, vel linearia et subinvoluta.

*Ligula* brevis, membranacea, interdum subbiloba.

*Juba* angustata, thyrsiformis, ex axi continuo radios emittens sparsos (inferioribus saepe subverticillatis), plerumque compositos, tam radiis simplicioribus ipsis quam radiolis racemiformibus, alternatim et altero praesertim latere emittentibus pedicellos cum radiolis villis adspersos, plerumque binatos: altero pl. min. longiori. *Spiculae* omnes aequales, lineari-lanceolatae, basi lana longa cinctae, deciduae. *Glumae* subaequales, tenui-membranaceae, pl. min. lanatae: inferior 5 — 7-nervis; nervis non percurrentibus; superior 3-nervis. *Flosculi* hyalini, glumis plerumque duplo breviores, mutici: inferior neuter, 1-valvis, lanceolato-ovatus, interdum apice varie excisus; superior hermaphroditus, bivalvis (rarissime 1-valvis): valvulis oblongis, apice pl. min. erosis.

*Lodicula* nulla.

*Stamina* 1 — 2. *Antherae* lineares.

*Styli* 2. *Stigmata* angusto-plumosa.

*Semen* obovatum, liberum, eberbe, exsulcum, scutello suo dimidio longius.

*Imperata arundinacea Cyr.* Juba thyrsode cylindracea, densa; Spiculis diandris, villis suis fere sesquibrevioribus; Culmi nodis glabris, foliis linearibus, pl. min. involutis.

*Imperata arundinacea.* R. et S. II. p. 288.
*Imperata cylindrica PB.*
*Lagurus cylindricus L.*
*Arundo epigeos Forsk.!*
*Calamagrostis Lagurus Koel.*
*Saccharum siska Cav.*
*Saccharum cylindricum LaM.*

V. spp. Hisp. Gall. Istr. Graec. Lit. mar. casp. et nigr.

*Imperata Koenigii PB.* Juba thyrsode cylindracea, densiuscula; Spiculis diandris, villis suis bis et ultra brevioribus; Culmi nodis barbatis, foliis planis, inferioribus lineari-lanceolatis.

*Imperata Koenigii.* R. et S. II. p. 289.

*Saccharum Koenigii Retz.*

*Saccharum spicatum Thunb.* (etsi specimini, a se misso, ill. vir adscripserit *Saccharum Thunbergii*).

V. spp. Sumatr. Jav. Nov. Holl.

*Imperata brasiliensis.* Juba thyrsode cylindracea, densiuscula; Spiculis monandris, villis suis duplo brevioribus (bivalvibus); Culmi nodis glabris, foliis lanceolatis.

V. spp. Brasil.

*Culmus* pedibus 2 longior, simplex, 4-nodis. *Vaginae* radicales et culmeae infimae tenerrime villosae l. pubescentes, superiores glabrae. *Ligula* brevissima, medio inciso-emarginata. *Folia* lanceolata, subcompressa, expansa (majora) pollicem dimidium lata, scabriuscula. *Juba* fere semipedalis, thyrsiformis, densiuscula. *Radii* compositi, cum radiolis villis longis adspersi. *Pedicelli* alterni, solitarii. *Spiculae* angustissimae, lineas 2 longae, lana tenuissima 4-lineali vestitae. *Glumae* aequales: inferior (praeter lanam) apice ciliatula, 5-, superior 3-nervis. *Flosculus neuter* 1-valvis, oblongo-lanceolatus, glumas fere aequans; *flosculus hermaphroditus* quoque univalvis, triplo brevior, truncatulus et apice erosus. *Stam.* 1.

*Imperata caudata.* Juba subthyrsode, elongata, laxiuscula; Spiculis monandris, villis suis bis et ultra brevioribus; Culmi nodis glabris, foliis lineari-lanceolatis.

*Saccharum contractum Poit.!* R. et S. II. p. 286.

*Saccharum caudatum Meyer.* Essequ.

V. spp. Ind. occ. Brasil.

Juba nunc linearis, nunc lanceolata, semper elongata.

## EULALIA *Kunth.*

*Racemi* subdigitati vel subjubati, simplices. *Spiculae*, alternatim binae, lineari-oblongae, pl. min. hirsutae, aristatae: aut utraque pedicellata, aut altera sessilis.

*Gramina* orbis antiqui, e tropicis ad 30 et qu. exc. grad. lat. bor. descendentia, erecta vel basi prostrata, 2—6-pedalia.

*Folia* pl. min. lanceolato-linearia.

*Ligula* membranacea, breviuscula, integra l. fimbriato-ciliatae.

*Inflorescentia* racemi, nunc fasciculato-digitati, nunc ad axin, ipsis breviorem, confertim sparsi, simplices aut ima basi fasciculatim connati, in omnibus hucusque cognitis speciebus fulvi. *Axis partialis* continuus, tenuis, subfiliformis. *Spiculae* alternatim binae (rarius solitariae), nunc utraque (tum altera longius-) pedicellata, nunc altera sessilis; lineari-oblongae, homomorphae, interdum basi villis cinctae. *Glumae* aequilongae, chartaceae, compage interdum satis firma: inferior pilis pl. min. longis hirsuta, subenervis, vel, cum superiori (spiculae inferioris interdum nuda) trinervis. *Flosculi* hyalini, typice 2: inferior neuter, 1-valvis (in *Eul. aurea* nullus); superior hermaphroditus, 2-valvis: valvula inferiori infra apicem bidentatum emittente aristam, aequam vel tortam et subgeniculatam; valvula superior minor, interdum pusilla.

*Lodiculae* squamae in speciebus, quibus spiculae teneriores, nullae, in validiori *japonica* cuneatae, emarginatae.

*Stamina* 3. *Antherae* lineares vel lineari-oblongae.

*Styli* 2. *Stigmata* pl. min. angusto-plumosa.

*Semen* ellipticum, liberum, eberbe, exsulcum, scutello suo duplo longius.

*Eulalia aurea Kunth.* Racemis subdigitatis; Spicularum (sesquilinealium) altera sessili altera pedicellata: pedicello hirsuto; Glumis pilis suis duplo-, arista torta quadruplo brevioribus.

*Eulalia aurea.* Kunth rev. gr. p. 359. Tab. 93.
*Andropogon aureus Bory.*
*Erianthus aureus PB.* R. et S. II. p. 324.
*Saccharum aureum Sprgl.*
V. sp. Borb.

*Eulalia nepalensis.* Racemis fasciculatis conferto-alternis; Spiculis (linea brevioribus) omnibus pedicellatis: pedicellis glabris; Glumis pilis suis subtriplo-, arista aequa quadruplo brevioribus.

V. sp. Nepal.

*Culmus* 3-pedalis, erectus, simplex, 5-nodis. *Vaginae* apice dorsi obsolete hirtulae vel pilosulae. *Ligula* membranacea, acutiuscula, circiter lineam longa. *Folia* sublanceolato-linearia, compressa, explanata lineas circiter 4 lata, glabra, culmea inferiora sesquipedalia. *Jubae* axis pollice longior. *Radii*, quorum plerique basi fasciculati, in radiolos s. racemos discedunt aequilongos, subfastigiatos, in tota juba circiter 20, fulvos, satis teneros, 3-pollicares vel paulo longiores. *Pedicelli* bini, alterni, glabri: alter ultralinealis, alter duplo brevior. *Spiculae* lineari-oblongae, duas tertias lineae partes circiter longae, fulvae pilisque fulvis erectis hirsutae, ipsis triplo longioribus. *Glumae* chartaceae, expansae ovato-oblongae, acutiusculae, 3-nerves, aequales: inferior hirsuta, superior glabra. *Flosculi* hyalini: inferior neuter, 1-valvis, glumarum forma iisque paulo brevior; superior hermaphroditus, bivalvis: valvula inferiori neutri similis, sed apice bidentata et infra dentes emittens aristam aequam, tenuem, rectam, 4—5-linealem, sub lente hispidam; valvula superior paulo brevior et angustior. *Lodiculae* squamae nullae. *Stamina* 3, antheris lineari-oblongis. *Stigmata* plumosa, purpurea.

*Eulalia japonica.* Racemis subsemiverticillatis alternis; Spiculis (bilinealibus) omnibus pedicellatis: pedicellis glabris; Glumis pilos suos subaequantibus, arista torta paulo brevioribus.

*Saccharum polydactylon Thbg.!* in fl. jap.

*Saccharum japonicum id.* in act. Linn.
*Erianthus japonicus PB.* R. et S. II. p. 324.
*Ripidium japonicum Tr.* fund. Agr.
V. spp. Japon.

---

*b*) Spiculae sessiles.

### DIMERIA *Br.*

*Racemi* 2 — plures, subdigitati. *Spiculae* axi continuo unilateraliter alternatim accumbentes, aristatae.

*Gramina* orbis antiqui tropica, erecta vel decumbentia, culmo simplici vel ramoso, spithamaea — bipedalia et longiora.

*Folia* linearia, angusta, plerumque pilosa.

*Ligula* brevis, membranacea.

*Racemi* terminales, plerumque bini subconjugati, rarius plures, subdigitati, vel ad axin communem brevissimum conferti. *Axis partialis* continuus, linearis, dorso planus et ananthus, fronte sub-trigono-angulatus, marginibus alternatim denticulatus pro exserendis spiculis fronti biseriatim adpressis. *Spiculae* lanceolato-lineares, compressae, sessiles, basi annulo pilorum brevissimorum adpressorumque cinctae, deciduae. *Glumae* subaequales, coriaceae vel coriaceo-chartaceae, valde compressae: inferior angustior, subenervis; superior fere duplo latior, plerumque mucronulata, 1-nervis, et dorso pilis paucioribus pluribusve ciliata. *Flosculi* hyalini, glumis paulo breviores 2: inferior (ubi adest) neuter, univalvis, (plerumque vero abesse videtur, saltem, intra glumam inferiorem angustissimam et arctissime compressam absconditus, oculo sese subducit); superior hermaphroditus, 2-valvis: Valvula inferiori infra apicem bidentatam exserente aristam tortam et geniculatam: valvula superior multo minor et angustior, interdum subobsoleta.

*Lodiculae* squamae . . . .

*Stamina* 2 — 3. *Antherae* lineares.
*Styli* 2. *Stigmata* angusto-plumosa.
*Semen* oblongo-lineare, liberum, epile, exsulcum, scutello suo plus duplo longius.

*Dimeria fuscescens.* Racemis binis conjugatis; Gluma latiori versus basin dorsi barbato-ciliata; Culmo simplici?; Foliis totis dorso pilosis.

V. spp. Nepal.

*Culmus* (abscissus) bipedalis et ultra, tenuis, simplex, 3-nodis: nodis glabris. *Vaginae* breviusculae: inferiores superne pilosae. *Ligula* membranacea, brevissima, truncata. *Folia* (culmea) brevia (2 — 1-pollicaria), angustissima, marginibus involuta, in pagina inferiori pilosa. *Racemi* 2, binati, patuli, tripollicares vel paulo breviores, fuscescentes: alter brevissime alter, paulo longius pedunculatus. *Spiculae* 3-lineales. *Gluma* superior s. latior versus dorsi basin pilis brevibus ciliato-barbata. *Flosculus neuter* 1-valvis, linearis. *Flosc. hermaphroditus* 2-valvis: arista valvulae inferioris circiter 4-lineali, tenuissima; valvula superior perangusta et brevissima.

*Dimeria tenera.* Racemis binis conjugatis; Gluma latiori aut toto dorso, aut infra apicem pilis tantum aliquot ciliata; Culmo infra ramoso; Foliis totis utrinque pilosis.

V. spp. Manill. et Nepal.

*Culmi* spithamaei vel ad summum dodrantales, ex eadem radice plures, prostrati, tenuissimi, inferne ramosi, superne longe nudi. *Vaginae* in gramine Nepalensi hirsutae, in Manillensi glabrae. *Ligula* membranacea, brevis, truncata. *Folia* lineam dimidiam lata, plana, majora sesquipollicaria, in utraque pagina pilosa. Racemi 2, ut in priori, contracti, pollicares vel paulo longiores, teneri. *Spiculae* sesquilineales. *Gluma* superior aut per totum dorsi nervum aut infra apicem tantum, tumque pilis non nisi 2 — 3, breviusculis ciliata. *Flosculum neutrum* non distinxi. *Hermaphroditi* arista 3-linealis, tenerrima; valvula superior pusilla.

*Dimeria ornithopoda Tr. Fund. Agr. p.* 167. Racemis binis conjugatis ternisve confertissimis: Gluma latiori infra apicem dorsi pilis 2 ciliata; Culmo ramoso; Foliis glabris vel basi tantum pilis adspersis.

V. spp. Ind. or.

*Culmus* bipedalis, ramosus, decumbens, tenuissimus. *Vaginae* glabrae. *Ligula* brevis, membranacea. *Folia* angustissima: inferiora ad summum tripollicaria, glabra vel basin versus pilis adspersa. Racemi bipollicares, rufescentes, patuli: tertius binis conjugatis superioribus proximus. *Spiculae* lineam longae. *Flosculus neuter* ...? *Hermaphroditi* arista 4-linealis, pertenuis. Valvula superior inferiore triplo brevior et multo angustior.

*Dimeria pilosissima.* Racemis subquinis, subdigitatis; Gluma utraque hirsuta; Culmo simplici; Foliis totis utrinque (vaginisque) hirsutis.

*Haplachne pilosissima Presl* rel. Haenk. 1. p. 235. tab. 38.

*Obs.* An sub una alterave specierum recensitarum lateat *Dim. acinaciformis Br.*, ex ejusdem definitione erui nequit. — *Andropogon conjugatus Roxb.* etiam hujus generis esse videtur.

---

## OROPETIUM *Trin. Fund. Agr.*

*Racemus* 1, terminalis, alternatim opposite floriferus. *Spiculae* axi continuo, utrinque profundo scrobiculatim excavato immersae, muticae.

*Speciei* unicae, Indicae, pusillae, erectae, fasciculato-ramosae *folia* subsetacea. *Ligula* membranacea, brevis. *Racemus* in quovis ramo terminalis. *Axis* continuus, compresso-tetragonus, utrinque alternatim profunde excavatus. *Spiculae* scrobiculis impressae, sessiles, pusillae. *Gluma* 1, coriacea, compressiuscula, 1-nervis, scrobiculum extus obtegens, flosculo longior. *Perianthium* hyalinum, basi in callulum brevissime barbatum contractum: Valvula inferior scrobiculo impressa, concava, obsolete 5-nervis; superior angustior, sublongior, nervis 2 approximatis notata. Hinc valvulae adpressus, e callo nascens,

processus cylindricus tenuissimus, pilis coronatus. *Lodiculae* squamae nullae? *Stamina* 3. *Styli* 2. *Stigmata* ramulosa. *Semen* oblongum, compressiusculum, liberum, eberbe, exsulcum, scutello suo plus dimidio (fere $\frac{2}{3}$) longius.

*Obs.* Si gluma altera, tenerior, scrobiculo impressa, a Kunthio descripta, imo a Roxburghio delineata, reapse in aliis speciminibus evoluta (nam in pluribus a me examinatis certissime desideratur), eaque tum inferior est — quod quidem, ob rudimentum flosculi superioris, facile crediderim; tum *Oropetium*, ab Andropogineis removendum, *Lepturo* proximum, Caduceatis (Hordeaceis) adnumerandum erit.

*Oropetium thomaeum Trin. fund. Agr. p.* 98.
*Nardus thomaea L. sppl.*
*Rottböllia thomaea Roxb.* R. et S. II. p. 783.
*Rottböllia pilosa Willd.*
V. spp. Ceyl.

# MÉMOIRE

SUR

## L'INTÉGRATION DES ÉQUATIONS A DIFFÉRENCES PARTIELLES RELATIVES AUX PETITES VIBRATIONS DES CORPS ÉLASTIQUES;

PAR

M. OSTROGRADSKY.

(Lu le 27 Juin 1582.)

I. Désignons par $a, b, c$, $x, y, z$ $\alpha$ des quantités quelconques indépendantes les unes des autres et, en faisant pour abréger

$$x^2+y^2+z^2=r^2,$$

considérons la fonction

$$\left[\left(\frac{x}{r}-\alpha ra\right)^2+\left(\frac{y}{r}-\alpha rb\right)^2+\left(\frac{z}{r}-\alpha rc\right)^2\right]^{-\frac{1}{2}}=Q.$$

Il n'est pas difficile de s'assurer, que la quantité $Q$ satisfait à l'équation différentielle

$$o=\frac{d^2Q}{da^2}+\frac{d^2Q}{db^2}+\frac{d^2Q}{dc^2};$$

par conséquant, si l'on suppose

(a) $$Q=P_0+P_1\alpha+P_2\alpha^2+\cdots+P_n\alpha^n+\text{etc.}$$

toutes les quantités $P$ vérifieront la même équation différentielle, ensorte que l'on aura

$$o=\frac{d^2P}{da^2}+\frac{d^2P}{db^2}+\frac{d^2P}{dc^2}$$

quel que soit le numéro que l'on donne à $P$.

On trouvera facilement la valeur suivante de $P_n$ en $ax+by+cz$:

$$P_n = \frac{1\cdot3\cdot5\cdots2n-1}{2\cdot4\cdot6\cdots2n}\,2^n(ax+by+cz)^n - \frac{1\cdot3\cdot5\cdots2n-3}{2\cdot4\cdot6\cdots2n-2}\,(n-1)2^{n-2}(ax+by+cz)^{n-2}r^2\varrho^2$$
$$+\frac{1\cdot3\cdot5\cdots2n-5}{2\cdot4\cdot6\cdots2n-4}\,\frac{(n-2)\,(n-3)}{1\cdot2}\,2^{n-4}\,(ax+by+cz)^{n-4}\,r^4\,\varrho^4 - \cdots\cdots$$
$$+(-1)^i\frac{1\cdot3\cdot5\cdots2n-2i-1}{2\cdot4\cdot6\cdots2n-2i}\,\frac{(n-i)(n-i-1)(n-i-2)\cdot(n-2i+1)}{1\cdot2\cdot3\cdots\cdots i}\,2^{n-2i}(ax+by+cz)^{n-2i}r^{2i}\varrho^{2i}+\cdots$$

et réciproquement la quantité $(ax+by+cz)^n$ peut s'exprimer au moyen des quantités $P$; car en changeant dans l'équation précédente $n$ successivement en $n-2$, $n-4$, $p-6\cdots\cdots$, on obtiendra autant d'équations qu'il en faudra pour éliminer toutes les puissances de $ax+by+cz$, excepté sa $n^{\text{me}}$ puissance. Mais pour parvenir plus simplement à l'expression de $(ax+by+cz)^n$ en $P$, supposons d'abord que $n$ soit pair et, remplaçant $n$ par $2n$, faisons

$$\text{(b)}\quad (ax+by+cz)^{2n} = A_{n.0}P_0r^{2n}\varrho^{2n} + A_{n.1}P_2r^{2n-2}\varrho^{2n-2} + A_{n.2}P_4r^{2n-4}\varrho^{2n-4} + \cdots$$
$$+ A_{n.i}P_{2i}r^{2n-2i}\varrho^{2n-2i} + \cdots\cdots + A_{n.n}P_{2n}.$$

Il est évident, d'après l'expression de $P_n$, que

$$\text{(c)}\qquad A_{n.n} = \frac{1\cdot2\cdot3\cdots2n}{1\cdot3\cdot5\cdots4n-1}.$$

Si l'on différencie l'équation (b) avec la caractéristique $\frac{d^2}{da^2}+\frac{d^2}{db^2}+\frac{d^2}{dc^2}$, on trouvera

$$n\,(2n-1)\,(ax+by+cz)^{2n-2} = n\,(2n+1)\,A_{n.0}\,P_0r^{2n-2}\,\varrho^{2n-2}$$
$$+(n-1)\,(2n+3)\,A_{n.1}\,P_2r^{2n-4}\,\varrho^{2n-4}+\cdots$$
$$+(n-i)(2n+2i+1)A_{n.i}P_{2i}r^{2n-2i-2}\,\varrho^{2n-2i-2}+\cdots+(4n-1)\,A_{n.n}\,P_{2n-2},$$

d'un autre côté

$$(ax+by+cz)^{2n-2} = A_{n-1.0}\,P_0r^{2n-2}\,\varrho^{2n-2} + A_{n-1.1}\,P_2r^{2n-4}\,\varrho^{2n-4}+\cdots\cdots$$
$$+A_{n-1.i}\,P_{2i}r^{2n-2i-2}\,\varrho^{2n-2i-2}+\cdots+A_{n-1\cdot n-1}\,P_{2n-2}.$$

Donc on aura

$$n\,(2n-1)\,A_{n-1.i} = (n-i)\,(2n+2i+1)\,A_{n.i},$$

ce qui donne

$$A_{n.i} = 2^i\,\frac{1\cdot3\cdot5\cdots4i+1}{1\cdot2\cdot3\cdots\cdot2i}\cdot\frac{n\,(n-1)\,(n-2)\cdots\cdots(n-i+1)}{(2n+1)(2n+3)(2n+5)\cdots(2n+2i+1)}\,A_{i.i}.$$

Or, en changeant $n$ en $i$ dans l'équation (c) on trouve

$$\frac{1\cdot3\cdot5\cdots\cdots4i-1}{1\cdot2\cdot3\cdots2i}\,A_{i.i}=1\,;$$

donc

$$A_{n.i}=2^i\,(4i+1)\,\frac{n\,(n-1)\,(n-2)\cdots(n-i+1)}{(2n+1)\,(2n+3)\cdots\cdots(2n+2i+1)},$$

ou bien

$$A_{n.i}=2^{2i}\,(4i+1)\,\frac{(n+i)\,(n+i-1)\,(n+i-2)\cdots(n-i+1)}{(2n+1)\,(2n+2)\,(2n+3)\cdots(2n+2i+1)},$$

Donc, en faisant pour abréger $r^2\varrho^2=\vartheta$,

$$(ax+by+cz)^{2n}=P_0\,\frac{\vartheta^n}{2n+1}+2^2\cdot5\,P_2\,\frac{(n+1)\,n\,\vartheta^{n-1}}{(2n+1)\,(2n+2)\,(2n+3)}$$
$$+\,2^4\cdot9P_4\,\frac{(n+2)\,(n+1)\,n\,(n-1)\,\vartheta^{n-2}}{(2n+1)\,(2n+2)\,(2n+3)\,(2n+4)\,(2n+5)}+\cdots\cdots$$
$$+\,2^{2i}(4i+1)\,P_{2i}\,\frac{(n+i)\,(n+i-1)\,(n+i-2)\cdots\cdots(n-i+1)\vartheta^{n-i}}{(2n+1)\,(2n+2)\,(2n+3)\cdots\cdots\cdots(2n+2i+1)}$$

Cette dernière équation mise sous la forme suivante:

$$(ax+by+cz)^{2n}=P_0\,\frac{\vartheta^n}{2n+1}+2^2\cdot5\,P_2\,\frac{d^2\,\vartheta^{n+1}}{(2n+1)\,(2n+2)\,(2n+3)\,d\vartheta^2}$$
$$+\,2^4\cdot9\,P_4\,\frac{d^4\,\vartheta^{n+2}}{(2n+1)\,(2n+2)\,(2n+3)\,(2n+4)\,(2n+5)\,d\vartheta^4}+\cdots\cdots$$
$$+\,2^{2i}\,(4i+1)\,P_{2i}\,\frac{d^{2i}\,\vartheta^{n+i}}{(2n+1)\,(2n+2)\,(2n+3)\cdots(2n+2i+1)\,d\vartheta^{2i}}+\cdots\cdots$$

multipliée par $\frac{(-1)^n}{1\cdot2\cdot3\cdot4\cdots2n}$ et intégrée avec la caractéristique $\Sigma$ depuis $n=o$ jusqu'à $n=\frac{1}{0}$ donnera la formule

$$(1)\qquad \cos.\,(ax+by+cz)=P_0R-2^2\cdot5\,P_2\,\frac{d^2R}{d\vartheta^2}+2^4\cdot9P_4\,\frac{d^4R}{d\vartheta^2}+\cdots\cdots$$
$$+\,(-1)^i\,2^{2i}\,(4i+1)\,P_{2i}\,\frac{d^{2i}R}{d\vartheta^{2i}}+\text{etc.}$$

dans laquelle on a fait pour abréger $R=\frac{\sin.\sqrt{\vartheta}}{\sqrt{\vartheta}}$.

Si l'on veut trouver $(ax+by+cz)^{2n+1}$ en $P$, on posera

$$(ax+by+cz)^{2n+1}=A_{n.0}P_1r^{2n}\varrho^{2n}+A_{n.3}P_3r^{2n-2}\varrho^{2n-2}+A_{n.5}P_5r^{2n-4}\varrho^{2n-4}+\cdots$$
$$+\,A_{n.i}\,P_{2i+1}r^{2n-2i}\varrho^{2n-2i}+\cdots\cdots$$

*

et, en différenciant avec la caractéristique $\frac{d^2}{da^2}+\frac{d^2}{db^2}+\frac{d^2}{dc^2}$, on trouvera

$$n(2n+1)(ax+by+cz)^{2n-1}=n(2n+3)A_{n.0}P_1r^{2n-2}\varrho^{2n-2}$$
$$+(n-1)(2n+5)A_{n.1}P_3r^{2n-4}\varrho^{2n-4}+\ldots\ldots$$
$$+(n-i)(2n+2i+3)A_{n.i}P_{2i+1}r^{2n-2i-2}\varrho^{2n-2i-2}+\ldots\ldots$$
$$+(4n+1)A_{n.n-1}P_{2n+1}$$

et il est facile de voir que l'on doit avoir

$$(n-i)(2n+2i+3)A_{n.i}=n(2n+1)A_{n-1.i}.$$

De là, en intégrant,

$$A_{n.i}=2^i\frac{1\cdot3\cdot5\cdots4i+3}{1\cdot2\cdot3\cdots2i+1}\cdot\frac{n(n-1)(n-2)\cdots(n-i+1)}{(2n+3)(2n+5)\cdots\cdots(2n+2i+3)}A_{i.i}.$$

Or l'expression de $P_n$ en $ax+by+cz$ donnera

$$\frac{1\cdot3\cdot5\cdots4i+1}{1\cdot2\cdot3\cdots2i+1}A_{i.i}=1;$$

donc

$$A_{n.i}=2^i(4i+3)\frac{n(n-1)(n-2)\cdots\cdots(n-i+1)}{(2n+3)(2n+5)\cdots\cdots(2n+2i+3)},$$

ou bien

$$A_{n.i}=2^{2i+1}(4i+3)\frac{(n+i+1)(n+i)(n+i-1)\cdots(n-i+1)}{(2n+2)(2n+3)(2n+4)\cdots\cdots\cdots(2n+2i+3)};$$

par conséquent

$$(ax+by+cz)^{2n+1}=2\cdot3P_1\frac{(n+1)\vartheta^n}{(2n+2)(2n+3)}+2^3\cdot7P_3\frac{(n+2)(n+1)n\vartheta^{n-1}}{(2n+2)(2n+3)(2n+4)(2n+5)}+\ldots$$
$$+2^{2i+1}(4i+3)P_{2i+1}\frac{(n+i+1)(n+i)(n+i-1)\cdots(n-i+1)\vartheta^{n-i}}{(2n+2)(2n+3)(2n+4)\cdots(2n+2i+3)}+\ldots\ldots,$$

ou bien

$$(ax+by+cz)^{2n+1}=2\cdot3P_1\frac{d\vartheta^{n+1}}{(2n+2)(2n+3)d\vartheta}$$
$$+2^3\cdot7P_3\frac{d^3\vartheta^{n+2}}{(2n+2)(2n+3)(2n+4)(2n+5)d\vartheta^3}+\ldots\ldots$$
$$+2^{2i+1}(4i+3)P_{2i+1}\frac{d^{2i+1}\vartheta^{n+i+1}}{(2n+2)(2n+3)(2n+4)\cdots(2n+2i+3)d\vartheta^{2i+1}}+\ldots$$

En multipliant par $\frac{(-1)^n}{1\cdot2\cdot3\cdots2n+1}$ et en sommant depuis $n=o$ jusqu'à $n=\frac{1}{0}$ on trouve

$$(2)\qquad \sin.(ax+by+cz) = -2\cdot 3\,P_1\,\frac{dR}{d\vartheta} + 2^3\cdot 7\,P_3\,\frac{d^3R}{d\vartheta^3} - \cdots\cdots$$
$$+ (-1)^{i+1}\,2^{2i+1}\,(4i+3)\,P_{2i+1}\,\frac{d^{2i+1}R}{d\vartheta^{2i+1}} + \text{etc.}$$

Il est très facile de trouver un développement semblable pour la fonction $e^{ax+by+cz}$; nous nous dispensons d'écrire ce développement.

Supposons $a = \varrho\cos.p'\sin.q'$, $b = \varrho\sin.p'\sin.q'$, $c = \varrho\cos.q'$
$x = r\cos.p\sin.q$, $y = r\sin.p\sin.q$, $z = r\cos.q$
$\cos.q\cos.q' + \sin.q\sin.q'\cos.(p-p') = \cos.\varphi$,

la fonction désignée par $Q$ deviendra

$$Q = (1 - 2\alpha r\varrho\cos.\varphi + \alpha^2 r^2 \varrho^2)^{-\frac{1}{2}}.$$

Or on sait que le radical $(1-2\alpha r\varrho\cos.\varphi + \alpha^2 r^2\varrho^2)^{-\frac{1}{2}}$ peut être développé en série

$$X_0 + X_1\,\alpha r\varrho + X_2\,\alpha^2 r^2\varrho^2 + \cdots + X_n\,\alpha^n r^n\varrho^n + \text{etc.},$$

dans laquelle le coëfficient $X_n$ du terme général est une fonction des trois quantités $\cos.p'\sin.q'$, $\sin.p'\sin.q'$, $\cos.q'$ rationelle, entière du degré $n$ et qui satisfait à l'équation

$$o = \frac{1}{\sin.q'}\cdot\frac{d\left(\sin.q'\,\frac{dX_n}{dq'}\right)}{dq'} + \frac{1}{\sin.^2 q'}\,\frac{d^2X_n}{dp'^2} + n(n+1)\,X_n.$$

Si donc on compare les coëfficients de $\alpha^n$ du développement précédent de la fonction $Q$ et celui du développement (a), on trouvera

$$P_n = X_n\,r^n\,\alpha^n.$$

En substituant dans les formules (1) et (2) pour $a$, $b$, $c$ leurs valeurs en $\varrho$, $p'$, $q'$, pour $x, y, z$ leurs valeurs en $r$, $p$, $q$, et en général pour $P_n$ sa valeur précédente, nous trouverons

$$(3)\qquad \cos.r\varrho\,[\cos.q\cos.q' + \sin.q\sin.q'\cos.(p-p')] = X_0 R - 2^2\cdot 5\,X_2\,\frac{d^2R}{d\vartheta^2}\,\vartheta$$
$$+ 2^4\cdot 9\,X_4\,\frac{d^4R}{d\vartheta^4}\,\vartheta^2 - \cdots + (-1)^i(4i+1)\,X_{2i}\,\frac{d^{2i}R}{d\vartheta^{2i}}\,\vartheta^i + \text{etc.}$$

$$(4)\quad \sin. r\varrho\,[\cos.q\,\cos.q' + \sin.q\,\sin.q'\,\cos.(p-p')] = -2\cdot 3X_1\frac{dR}{d\vartheta}\vartheta^{\frac{1}{2}}$$
$$+ 2^3\cdot 7X_3\frac{d^3R}{d\vartheta^3}\vartheta^{\frac{3}{2}} - 2^5\cdot 11X_5\frac{d^5R}{d\vartheta^6}\vartheta^{\frac{5}{2}} + \ldots\ldots$$
$$+ (-1)^{i+1}\,2^{2i+1}\,(4i+3)X_{2i+1}\frac{d^{2i+1}R}{d\vartheta^{2i+1}}\vartheta^{\frac{2i+1}{2}} + \text{etc.}$$

II. Proposons nous d'intégrer les équations

$$(5)\quad \begin{cases} \dfrac{d^2U}{dt^2} = K^2\left(\dfrac{d^2U}{dx^2}+\dfrac{d^2U}{dy^2}+\dfrac{d^2U}{dz^2}+2\,\dfrac{d\vartheta}{dx}\right)\\ \dfrac{d^2V}{dt^2} = K^2\left(\dfrac{d^2V}{dx^2}+\dfrac{d^2V}{dy^2}+\dfrac{d^2V}{dz^2}+2\,\dfrac{d\vartheta}{dy}\right)\\ \dfrac{d^2W}{dt^2} = K^2\left(\dfrac{d^2W}{dx^2}+\dfrac{d^2W}{dy^2}+\dfrac{d^2W}{dz^2}+2\,\dfrac{d\vartheta}{dz}\right)\end{cases}$$
$$\vartheta = \frac{dU}{dx}+\frac{dV}{dy}+\frac{dW}{dz},$$

équations que M. Poisson a trouvées pour les petites vibrations des corps élastiques.

En différenciant la première de ces équations par rapport à $x$, la seconde par rapport à $y$, la troisième par rapport à $z$, et prenant la somme des différentielles, on trouve

$$\frac{d^2\vartheta}{dt^2} = 3K^2\left(\frac{d^2\vartheta}{dx^2}+\frac{d^2\vartheta}{dy^2}+\frac{d^2\vartheta}{dz^2}\right).$$

Maintenant, on peut résoudre cette équation et trouver la quantité $\vartheta$, laquelle étant mise dans les équations (5) les rendra faciles à résoudre. En effet, comme $\vartheta$ est censé connu en $x, y, z$, les quantités $\frac{d\vartheta}{dx}$, $\frac{d\vartheta}{dy}$, $\frac{d\vartheta}{dz}$ seront aussi fonctions connues des mêmes variables $x, y, z$; par conséquent les équations (5) changeront en

$$(\text{d})\quad \begin{cases} \dfrac{d^2U}{dt^2} = K^2\left(\dfrac{d^2U}{dx^2}+\dfrac{d^2U}{dy^2}+\dfrac{d^2U}{dz^2}\right)+f(x,y,z)\\ \dfrac{d^2V}{dt^2} = K^2\left(\dfrac{d^2V}{dx^2}+\dfrac{d^2V}{dy^2}+\dfrac{d^2V}{dz^2}\right)+f_1(x,y,z)\\ \dfrac{d^2W}{dt^2} = K^2\left(\dfrac{d^2W}{dx^2}+\dfrac{d^2W}{dy^2}+\dfrac{d^2W}{dz^2}\right)+f_2(x,y,z)\end{cases}$$

Or, par la théorie des équations linéaires, pour trouver les valeurs de $U, V, W$ il suffira de satisfaire, par une solution quelconque, aux équations (d) et d'intégrer complètement les mêmes équations, privées de leurs membres $f(x,y,z)$, $f_1(x,y,z)$,

$f_2(x, y, z)$, c'est ce qu'on sait faire. Il ne restera, pour achever la solution de la question, que d'ajouter convenablement les intégrales complètes, dont on vient de parler, aux solutions particulières des équations (d). Nous ne faisons qu'indiquer une manière de résoudre les équations (5), nous allons maintenant les intégrer effectivement en faisant usage de la formule (3).

Supposons

$$U = \left(\frac{1}{2\pi}\right)^3 \int_{-\infty}^{+\infty} T \cos.\left[(x'-x)\,a + (y'-y)\,b + (z-z)\,c\right] dx'\,dy'\,dz'\,da\,db\,dc$$

$$V = \left(\frac{1}{2\pi}\right)^3 \int_{-\infty}^{+\infty} T_1 \cos.\left[(x'-x)\,a + (y'-y)\,b + (z'-z)\,c\right] dx'\,dy'\,dz'\,da\,db\,dc$$

$$W = \left(\frac{1}{2\pi}\right)^3 \int_{-\infty}^{+\infty} T_2 \cos.\left[(x'-x)\,a + (y'-y)\,b + (z'-z)\,c\right] dx'\,dy'\,dz'\,da\,db\,dc$$

$T, T_1, T_2$ désignant des fonctions de la quantité $t$ et des variables accessoires $a, b, c, x', y', z'$. En mettant ces valeurs dans les équations (5) on verra qu'on peut $y$ satisfaire en faisant

$$\varrho^2 = a^2 + b^2 + e^2, \quad M = aT + bT_1 + cT_2$$

$$(7) \quad \begin{cases} o = \dfrac{d^2T}{dt^2} + K^2(\varrho^2 T + 2aM) \\ o = \dfrac{d^2T_1}{dt^2} + K^2(\varrho^2 T_1 + 2bM) \\ o = \dfrac{d^2T_2}{dt^2} + K^2(\varrho^2 T_2 + 2cM). \end{cases}$$

En multipliant la première des équations (7) par $a$, la seconde par $b$, la troisième par $c$, puis les ajoutant ensemble et faisant pour abréger $K\sqrt{3} = K'$ on trouvera

$$o = \frac{d^2M}{dt^2} + K'^2 \varrho^2 M.$$

Donc, en intégrant

$$M = P \cos.\,K'\varrho t + \frac{Q \sin.\,K\varrho t}{K\varrho}$$

$P$ et $Q$ sont des quantités indépendantes de $t$.

On satisfera aux équations (7) en faisant

$$T = \frac{aM}{\rho^2}, \quad T_1 = \frac{bM}{\rho^2}, \quad T_2 = \frac{cM}{\rho^2};$$

par conséquent les intégrales complètes de ces équations seront

$$T = A \cos. K\rho t + \frac{B \sin. K\rho t}{K\rho} + \frac{aM}{\rho^2}$$

$$T_1 = A' \cos. K\rho t + \frac{B' \sin. K\rho t}{K\rho} + \frac{bM}{\rho^2}$$

$$T_2 = A'' \cos. K\rho t + \frac{B'' \sin. K\rho t}{K\rho} + \frac{cM}{\rho^2}.$$

Supposons que l'on ait pour $t = o$

$$U = f(x, y, z), \quad V = f_1(x, y, z), \quad W = f_2(x, y, z)$$

$$\frac{dU}{dt} = F(x, y, z), \quad \frac{dV}{dt} = F_1(x, y, z), \quad \frac{dW}{dt} = F_2(x, y, z);$$

on doit avoir, comme l'on sait, pour la même valeur $t = o$

$$T = f(x', y', z'), \quad T_1 = f_1(x', y', z'), \quad T_2 = f_2(x', y', z')$$

$$\frac{dT}{dt} = F(x', y', z'), \quad \frac{dT_1}{dt} = F_1(x', y', z'), \quad \frac{dT_2}{dt} = F_2(x', y', z');$$

par conséquent on aura aussi, toujours pour $t = o$,

$$M = af(x', y', z') + bf_1(x', y', z') + cf_2(x', y', z')$$

$$\frac{dM}{dt} = aF(x', y', z') + bF_1(x', y', z') + cF_2(x', y', z').$$

En faisant $t = o$ dans les valeurs de $M$, $U$, $V$, $W$, précédemment trouvées, ainsi que dans leur différence par rapport à $t$, on trouvera

$$P = af(x', y', z') + bf_1(x', y', z') + cf_2(x', y', z')$$

$$Q = aF(x', y', z') + bF_1(x', y', z') + cF_2(x', y', z')$$

$$f(x', y', z') = A + \frac{aP}{\rho^2}$$

$$f_1(x', y', z') = A' + \frac{bP}{\rho^2}$$

$$f_2(x', y', z') = A'' + \frac{cP}{\rho^2}$$

$$F(x', y', z') = B + \frac{aQ}{\rho^2}$$

$$F_1(x', y', z') = B' + \frac{bQ}{\rho^2}$$

$$F_2(x', y', z') = B'' + \frac{cQ}{\rho^2},$$

ce qui donne

$$T = f(x',y',z') \cos. K\varrho t + F(x',y',z') \frac{\sin. K\varrho t}{K\varrho} + \frac{aP}{\varrho^2} (\cos. K'\varrho t - \cos. K\varrho t) + \frac{aQ}{\varrho^2} \left(\frac{\sin. K'\varrho t}{K'\varrho} - \frac{\sin. K\varrho t}{K\varrho}\right)$$

$$T_1 = f_1(x',y',z') \cos. K\varrho t + F_1(x',y',z') \frac{\sin. K\varrho t}{K\varrho} + \frac{bP}{\varrho^2} (\cos. K'\varrho t - \cos. K\varrho t) + \frac{bQ}{\varrho^2} \left(\frac{\sin. K\varrho t}{K'\varrho} - \frac{\sin. K\varrho t}{K\varrho}\right)$$

$$T_2 = f_2(x',y',z') \cos. K\varrho t + F_2(x',y',z') \frac{\sin. K\varrho t}{K\varrho} + \frac{cP}{\varrho^2} (\cos. K'\varrho t - \cos. K\varrho t) + \frac{cQ}{\varrho^2} \left(\frac{\sin. K'\varrho t}{K'\varrho} - \frac{\sin. K\varrho t}{K\varrho}\right).$$

On trouvera ensuite

$$U = \left(\frac{1}{2\pi}\right)^3 \int_{-\infty}^{+\infty} \left[f(x',y',z') \cos. K\varrho t + F(x',y',z') \frac{\sin. K\varrho t}{K\varrho}\right] \cos. [(x'-x)a + (y'-y)b + (z'-z)c]\, dx'\, dy'\, dz'\, da\, db\, dc$$
$$+ \left(\frac{1}{2\pi}\right)^3 \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{aP}{\varrho^2} (\cos. K'\varrho t - \cos. K\varrho t) \cos. [(x'-x)a + (y'-y)b + (z'-z)c]\, dx'\, dy'\, dz'\, da\, db\, dc$$
$$+ \left(\frac{1}{2\pi}\right)^3 \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{aQ}{\varrho^2} \left(\frac{\sin. K'\varrho t}{K'\varrho} - \frac{\sin. K\varrho t}{K\varrho}\right) \cos. [(x'-x)a + (y'-y)b + (z'-z)c]\, dx'\, dy'\, dz'\, da\, db\, dc$$

$$V = \left(\frac{1}{2\pi}\right)^3 \int_{-\infty}^{+\infty} \left[f_1(x',y',z') \cos. K\varrho t + F_1(x',y',z') \frac{\sin. K\varrho t}{K\varrho}\right] \cos. [(x'-x)a + (y'-y)b + (z'-z)c]\, dx'\, dy'\, dz'\, da\, db\, dc$$
$$+ \left(\frac{1}{2\pi}\right)^3 \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{bP}{\varrho^2} (\cos. K\varrho t - \cos. K\varrho t) \cos. [(x'-x)a + (y'-y)b + (z'-z)c]\, dx'\, dy'\, dz'\, da\, db\, dc$$
$$+ \left(\frac{1}{2\pi}\right)^3 \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{bQ}{\varrho^2} \left(\frac{\sin. K'\varrho t}{K'\varrho} - \frac{\sin. K\varrho t}{K\varrho}\right) \cos. [(x'-x)a + (y'-y)b + (z'-z)c]\, dx'\, dy'\, dz'\, da\, db\, dc$$

$$W = \left(\frac{1}{2\pi}\right)^3 \int_{-\infty}^{+\infty} \left[f_2(x',y',z') \cos. K\varrho t + F_2(x',y',z') \frac{\sin. K\varrho t}{K\varrho}\right] \cos. [(x'-x)a + (y'-y)b + (z'-z)c]\, dx'\, dy'\, dz'\, da\, db\, dc$$

$$+\left(\frac{1}{2\pi}\right)^3 \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{cP}{\rho^2} (\cos. K'\rho t - \cos. K\rho t) \cos. [(x'-x)\,a + (y'-y)\,b + (z'-z)\,c]$$
$$dx'\,dy'\,dz'\,da\,db\,dc$$

$$+\left(\frac{1}{2\pi}\right)^3 \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{cQ}{\rho^2} \left(\frac{\sin. K'\rho t}{K'\rho} - \frac{\sin. K\rho t}{K\rho}\right) \cos. [(x'-x)\,a + (y'-y)\,b + (z'-z)\,c]$$
$$dx'\,dy'\,dz'\,da\,db\,dc.$$

III. Nous allons nous occuper de la réduction des intégrales précédentes. Nous pouvons considérer les quantités $U$, $V$, $W$ comme composées chacune de trois parties, et nous prendrons pour premières parties de ces quantités les termes de leurs expressions indépendants de $P$ et de $Q$. Ces termes se trouvent compris dans la formule

$$\left(\frac{1}{2\pi}\right)^3 \int_{-\infty}^{+\infty} \left\{ \varphi\,(x', y', z')\ \cos.\ K\rho t + \psi\,(x', y', z') \frac{\sin. K\rho t}{K\rho} \right\}$$
$$\cos. [(x'-x)\,a + (y'-y)\,b + (z'-z)\,c]\ dx'\,dy'\,dz'\,da\,db\,dc.$$

Nous prendrons pour les secondes parties de $U$, $V$, $W$ tous les termes qui dépendent de $P$ et qui se trouvent compris dans la formule

$$\left(\frac{1}{2\pi}\right)^3 \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{(Aa^2 + Bb^2 + Cc^2 + Dab + Eac + Fbc)}{\rho^2} (\cos. K'\rho t - \cos. K\rho t)$$
$$\cos. [(x' - x)\,a + (y' - y)\,b + (z' - z)\,c]\ dx'\,dy'\,dz'\,da\,db\,dc,$$

$A$, $B$, $C$, $D$, $E$, $F$ représentant des fonctions arbitraires des variables $x'$, $y'$, $z'$. Les termes restants formeront les troisièmes parties de $U$, $V$, $W$. Ils dépendent de la quantité $Q$, et si l'on intégrait la dernière formule par rapport à $t$ et à partir de $t = o$, on en obtiendrait une qui comprendrait les troisièmes parties des fonctions $U$, $V$, $W$.

Au reste il sera facile de voir quelles sont les valeurs, que l'on devra donner successivement aux fonctions arbitraires $A$, $B$, $C$, $D$, $E$, $F$, pour que l'expression

$$\left(\frac{1}{2\pi}\right)^3 \int_{-\infty}^{+\infty} \{Aa^2 + Bb^2 + Cc^2 + Dab + Eac + Fbc\}\ (\cos. K'\rho t - \cos. K\rho t)$$
$$\cos. [(x' - x)\,a + (y' - y)\,b + (z' - z)\,c]\ dx'\,dy'\,dz'\,da\,db\,dc$$

représente les termes de $U, V, W$ dépendants de $P$, et pour que l'intégrale $\int_o^t$ de cette expression représente les troisièmes parties des mêmes quantités $U, V, W$, ou leurs termes dépendants de $Q$. On peut aussi tirer ses derniers termes des secondes parties de $U, V, W$ en changeant $f, f_1, f_2$ respectivement en $F, F_1, F_2$, et en intégrant par rapport à $t$ depuis $o$ jusqu'à $t$.

Il s'agit donc, d'après ce qui précéde, d'opérer une réduction des intégrales dans les deux formules

$$\left(\frac{1}{2\pi}\right)^3 \int_{-\infty}^{+\infty} \left\{\varphi(x', y', z') \cos. K\rho t + \psi(x', y', z') \frac{\sin. K\rho t}{K\rho}\right\}$$
$$\cos. [(x'-x)a + (y'-y)b + (z'-z)c]\, dx'\, dy'\, dz'\, da\, db\, dc$$

$$\left(\frac{1}{2\pi}\right)^3 \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{(Aa^2 + Bb^2 + Cc^2 + Dab + Eac + Fbc)}{\rho^2} (\cos. K'\rho t - \cos. K\rho t)$$
$$\cos. [(x'-x)a + (y'-y)b + (z'-z)c]\, dx'\, dy'\, dz'\, da\, db\, dc.$$

Commençons par la première.

En observant que

$$\frac{\sin. K\rho t}{K\rho} = \frac{t}{4\pi} \int_o^\pi \int_o^{2\pi} \cos. [a \cos. p \sin. q + b \sin. p \sin. q + c \cos. q]\, Kt \sin. q\, dp\, dq,$$

l'intégrale

$$\left(\frac{1}{2\pi}\right)^3 \int_{-\infty}^{+\infty} \psi(x', y', z') \frac{\sin. K\rho t}{K\rho} \cos. [(x'-x)a + (y'-y)b + (z'-z)c]\, dx'\, dy'\, dz'\, da\, db\, dc$$

deviendra

$$\frac{t}{4\pi} \int_o^\pi \int_o^{2\pi} \sin. q\, dp\, dq \left\{\left(\frac{1}{2\pi}\right)^3 \int_{-\infty}^{+\infty} \psi(x', y', z') \cos. [(x'-x-Kt \cos. p \sin. q)\, a\right.$$
$$\left. + (y'-y-Kt \sin. p \sin. q)\, b + (z'-z-Kt \cos. q)\, c]\right\} dx'\, dy'\, dz'\, da\, db\, dc,$$

et, en vertu du théorème de Fourier, elle se réduira à

$$\frac{t}{4\pi} \int_o^\pi \int_o^{2\pi} \psi(x + Kt \cos. p \sin. q,\ y + Kt \sin. p \sin. q,\ z + Kt \cos. q) \sin. q\, dp\, dq.$$

En changeant $\psi$ en $\varphi$, et en différenciant relativement à $t$, on aura pour l'intégrale

$$\left(\frac{1}{2\pi}\right)^3 \int_{-\infty}^{+\infty} \varphi(x', y', z') \cos. K\rho t \cos. [(x'-x)a + (y'-y)b + (z'-z)c]\, dx'\, dy'\, dz'\, da\, db\, dc$$

la valeur suivante:

$$\frac{1}{4\pi} \frac{d}{dt}\, t \int_0^{\pi}\int_0^{2\pi} \varphi(x + Kt\cos.p \sin.q,\ \ y + Kt\sin.p \sin.q,\ \ z + Kt\cos.q) \sin.q\, dp\, dq,$$

en sorte que la formule

$$\left(\frac{1}{2\pi}\right)^3 \int_{-\infty}^{+\infty} \left\{ \varphi(x', y', z') \cos. K\rho t + \psi(x', y', z') \frac{\sin. K\rho t}{Kt} \right\}$$
$$\cos. [(x'-x)a + (y'-y)b + (z'-z)c]\, dx'\, dy'\, dz'\, da\, db\, dc,$$

qui comprend les premières parties des fonctions $U$, $V$, $W$, se réduira à celle-ci:

$$\frac{1}{4\pi} \frac{d}{dt}\, t \int_0^{\pi}\int_0^{2\pi} \varphi(x + Kt\cos.p \sin.q,\ y + Kt\sin.p \sin.q,\ z + Kt\cos.q) \sin.q\, dp\, dq$$

$$+ \frac{t}{4\pi} \int_0^{\pi}\int_0^{2\pi} \psi(x + Kt\cos.p \sin.q,\ y + Kt\sin.p \sin.q,\ z + Kt\cos.q) \sin.q\, dp\, dq,$$

qui est beaucoup plus simple.

Si l'on suppose successivement dans la formule précédente $\varphi = f$ et en même tems $\psi = F$, $\varphi = f_1$ et en même tems $\psi = F_1$, $\varphi = f_2$ et en même tems $\psi = F_2$, on obtiendra pour les premières parties de $U$, $V$, $W$ respectivement les valeurs suivantes:

$$\frac{1}{4\pi} \frac{d}{dt}\, t \int_0^{\pi}\int_0^{2\pi} f(x + Kt\cos.p \sin.q,\ y + Kt\sin.p \sin.q,\ z + Kt\cos.q) \sin.q\, dp\, dq$$

$$+ \frac{t}{4\pi} \int_0^{\pi}\int_0^{2\pi} F(x + Kt\cos.p \sin.q,\ y + Kt\sin.p \sin.q,\ z + Kt\cos.q) \sin.q\, dp\, dq;$$

$$\frac{1}{4\pi} \frac{d}{dt}\, t \int_0^{\pi}\int_0^{2\pi} f_1(x + Kt\cos.p \sin.q,\ y + Kt\sin.p \sin.q,\ z + Kt\cos.q) \sin.q\, dp\, dq$$

$$+ \frac{t}{4\pi} \int_0^{\pi}\int_0^{2\pi} F_1(x + Kt\cos.p \sin.q,\ y + Kt\sin.p \sin.q,\ z + Kt\cos.q) \sin.q\, dp\, dq;$$

$$\frac{1}{4\pi}\frac{d}{dt}\,t\int_0^\pi\int_0^{2\pi} f_2(x+Kt\cos.p\sin.q,\; y+Kt\sin.p\sin.q,\; z+Kt\cos.q)\sin.q\,dp\,dq$$

$$+\frac{t}{4\pi}\int_0^\pi\int_0^{2\pi} F_2(x+Kt\cos.p\sin.q,\; y+Kt\sin.p\sin.q,\; z+Kt\cos.q)\sin.q\,dp\,dq.$$

IV. Considérons maintenant la formule

$$\left(\frac{1}{2\pi}\right)^3\int_{-\infty}^{+\infty}\left(\frac{Aa^2+Bb^2+Cc^2+Dab+Eac+Fbc}{\rho^2}\right)(\cos.\,K\varrho t-\cos.\,K\varrho t)$$
$$\cos.\,[(x'-x)\,a+(y'-y)\,b+(z'-z)\,c]\,dx'dy'dz'da\,db\,dc,$$

qui comprend les secondes parties des fonctions $U$, $V$, $W$ et qui, par l'intégration relativement à $t$ entre les limites $o$ et $t$, donnera aussi leurs troisièmes parties.

Faisons

$$a=\varrho\cos.p'\sin.q',\quad b=\varrho\sin.p'\sin.q',\quad c=\varrho\cos.q',$$
$$x'=x+r\cos.p\sin.q,\quad y'=y+r\sin.p\sin.q,\quad z'=z+r\cos.q,$$
$$Y'_0=\frac{A+B+C}{3}$$
$$Y'_2=A\cos.^2p'\sin.^2q'+B\sin.^2p'\sin.^2q'+C\cos.^2q'+D\cos.p'\sin.p'\sin.^2q'$$
$$+E\cos.p'\cos.q'\sin.q'+F\sin.p'\cos.q'\sin.q'-\frac{A+B+C}{3};$$

notre formule deviendra

$$\left(\frac{1}{2\pi}\right)^3\int(Y'_0+Y'_2)\,(\cos.\,K\varrho t-\cos.\,K\varrho t)\cos.\,r\varrho\,[\cos.q\cos.q'+\sin.q\sin.q'\cos.(p-p')]$$
$$r^2\varrho^2\sin.q\,\sin.q'\,dr\,dp\,dq\,d\varrho\,dp'\,dq'.$$

Les quantités $A$, $B$, $C$, $D$, $E$, $F$, qui entrent dans $Y'_0$ et dans $Y'_2$ sont maintenant fonctions des variables $x+r\cos.p\sin.q$, $y+r\sin.p\sin.q$, $z+r\cos.q$; quant aux limites des intégrales contenues dans la dernière formule, elles sont $o$ et $\frac{1}{0}$ pour les variables $r$ et $\varrho$, $o$ et $\pi$ pour $q$ et $q'$, $o$ et $2\pi$ pour $p$ et $p'$.

Il est très facile d'effectuer les intégrations par rapport à $p'$ et $q'$. En effet, mettons pour $\cos.\,r\varrho\,[\cos.q\cos.q'+\sin.q\sin.q'\cos.(p-p')]$ sa valeur $X_0R-2^2\cdot5X\frac{d^2R}{2d\vartheta^2}\vartheta+$ etc. fournie par la formule (3), et observons que $Y'_0$ ne

dépend point des quantités $p'$ et $q'$, qu'au contraire $Y'_2$ est fonction de trois quantités cos. $p'$ sin. $q'$, sin. $p'$ sin. $q'$, cos. $q'$, rationelle, entière du second degré et vérifiant l'équation

$$o = \frac{1}{\sin. q'} \frac{d\left(\sin. q' \frac{dY'_2}{dq'}\right)}{dq} + \frac{1}{\sin.^2 q'} \frac{d^2 Y'_2}{dp'^2} + 6Y'_2.$$

Donc, en faisant usage de deux théorèmes connus

$$\int_0^\pi \int_0^{2\pi} Y'_n X_m \sin. q' \, dp' \, dq' = o$$

$$\int_0^\pi \int_0^{2\pi} Y'_n X_n \sin. q' \, dp' \, dq' = \frac{4\pi}{2n+1} Y_n,$$

$Y_n$ est ce que devient $Y'_n$ quand on y fait $p' = p$ et $q' = q$, nous pouvons sur-le-champ remplacer notre formule, qui renferme une intégrale sextuple, par celle-ci

$$\frac{1}{2\pi^2} \int \left(Y_0 R \vartheta - 4 Y_2 \frac{d^2 R}{d\vartheta^2} \vartheta^2\right) (\cos. K'\varrho t - \cos. K\varrho t) \sin. q \, d\varrho \, dr \, dq \, dp,$$

qui ne contient qu'une intégrale quadruple. Les limites par rapport aux variables $\varrho$, $r$, $p$, $q$ sont les mêmes que précédemment, c'est-à-dire $o$ et $\frac{1}{0}$ pour les deux premières, $o$ et $\pi$ pour $q$, $o$ et $2\pi$ pour la dernière; quant aux fonctions $Y_0$ et $Y_2$, elles sont respectivement ce que deviennent les quantités $Y'_0$ et $Y'_2$, quand on y change $p'$ en $p$ et $q'$ en $q$, de manière que

$$Y_0 = \frac{A+B+C}{3}$$

$$Y_2 = A \cos.^2 p \sin.^2 q + B \sin.^2 p \sin.^2 q + C \cos.^2 q + D \cos. p \sin. p \sin.^2 q$$
$$+ E \cos. p \cos. q \sin. q + F \sin. p \cos. q \sin. q - \frac{A+B+C}{3}.$$

Comme $\vartheta = r^2 \varrho^2$, $R = \frac{\sin. \sqrt{(\vartheta)}}{\sqrt{(\vartheta)}}$, nous aurons

$$R\vartheta = r\varrho \sin. r\varrho, \quad 4 \frac{d^2 R}{d\vartheta^2} \vartheta^2 = r\varrho \sin. r\varrho + 3 \cos. r\varrho - \frac{3 \sin. r\varrho}{r\varrho}.$$

En mettant ces valeurs dans la dernière intégrale quadruple, elle deviendra

$$\frac{3}{2\pi^2} \int Y_2 (\cos. K\varrho t - \cos. K'\varrho t) \frac{\sin. r\varrho}{r\varrho} \sin. q \, d\varrho \, dr \, dq \, dp$$

$$- \frac{3}{2\pi^2} \int Y_2 (\cos. K\varrho t - \cos. K'\varrho t) \cos. r\varrho \sin. q \, d\varrho \, dr \, dq \, dp$$

$$- \frac{1}{2\pi^2} \int (Y_0 + Y_2) (\cos. K\varrho t - \cos. K'\varrho t) r\varrho \sin. r\varrho \sin. q \, d\varrho \, dr \, dq \, dp.$$

Appelons $V$ l'expression précédente et remplaçons, pour abréger, $Y_2$ par $M$, et

$$Y_0 + Y_2 = A \cos.^2 p \sin.^2 q + B \sin.^2 p \sin.^2 q + C \cos.^2 q + D \cos. p \sin. p \sin.^2 q + E \cos. p \cos. q \sin. q + F \sin. p \cos. q \sin. q$$

par $N$, nous aurons

$$V = \frac{3}{2\pi^2} \int M (\cos. K\varrho t - \cos. K'\varrho t) \frac{\sin. r\varrho}{r\varrho} \sin. q \, d\varrho \, dr \, dp \, dq$$
$$- \frac{3}{2\pi^2} \int M (\cos. K\varrho t - \cos. K'\varrho t) \cos. r\varrho \sin. q \, d\varrho \, dr \, dp \, dq$$
$$- \frac{1}{2\pi^2} \int N (\cos. K\varrho t - \cos. K'\varrho t) r\varrho \sin. r\varrho \sin. q \, d\varrho \, dr \, dp \, dq.$$

Pour réduire autant que possible les intégrales que $V$ renferme, considérons l'équation

$$U = \int L (\cos. K\varrho t - \cos. K'\varrho t) \frac{\sin. \alpha r\varrho}{r\varrho} \sin. q \, d\varrho \, dr \, dq \, dp,$$

$L$ étant une fonction de $p$, $q$, $r$; $\alpha$ une quantité réelle et positive. Quant aux limites de $\varrho$, $r$, $q$, $p$, elles sont les mêmes que dans les intégrales contenues dans $V$.

En différenciant par rapport à $\alpha$ nous aurons

$$\frac{dU}{d\alpha} = \int L (\cos. K\varrho t - \cos. K'\varrho t) \cos. \alpha r\varrho \sin. q \, d\varrho \, dr \, dp \, dq$$
$$\frac{d^2U}{d\alpha^2} = -\int L (\cos. K\varrho t - \cos. K'\varrho t) r\varrho \sin. \alpha r\varrho \sin. q \, d\varrho \, dr \, dq \, dp.$$

On aura ensuite

$$V = U - \frac{dU}{d\alpha} + \frac{d^2U}{d\alpha^2},$$

pourvu que l'on fasse $\alpha = 1$, $L = \frac{3}{2\pi^2} M$ dans les fonctions $U$ et $\frac{dU}{d\alpha}$, et qu'on suppose $\alpha = 1$, $L = \frac{1}{2\pi^2} N$ dans $\frac{d^2U}{d\alpha^2}$.

On peut écrire la valeur de $U$ sous la forme suivante:

$$U = \int L \frac{\sin. q}{r} \, dp \, dq \, dr \int_0^\infty (\cos. K\varrho t - \cos. K\varrho t) \frac{\sin. \alpha r\varrho}{\varrho} \, d\varrho$$

ou bien

$$U = \tfrac{1}{2} \int L \frac{\sin. q}{r} \, dp \, dq \, dr \int_0^\infty \frac{\sin. (\alpha r - Kt) - \sin. (\alpha r - K't)}{\varrho} \, d\varrho.$$

Or il est facile de voir que l'intégrale

$$\int_0^\infty \frac{\sin. (\alpha r - Kt) - \sin. (\alpha r - K't)}{\varrho} \, d\varrho$$

est nulle, quand $ar - Kt < o$, ou quand $ar - K't > o$, et qu'elle a $\pi$ pour valeur depuis $ar - Kt = o$ jusqu'à $ar - K't = o$, pour les limites mêmes $ar - Kt = o$ et $ar - K't = o$ sa valeur est $\frac{\pi}{2}$, ensorte que la quantité $U$ renferme sous le signe $\int$ une fonction $\frac{L\,\text{sin.}\,q}{r}\int_o^{\infty}\frac{\text{sin.}\,(ar - Kt) - \text{sin.}\,(ar - K't)}{\rho}\,d\rho$ de $p$, $q$, $r$ de telle nature, qu'elle se réduit à zéro, quand $r$ est plus petit que $\frac{Kt}{a}$, ou plus grand que $\frac{K't}{a}$, et devient $\frac{\pi L}{r}$ sin. $q$, quand $r$ est compris entre les limites $\frac{Kt}{a}$ et $\frac{K't}{a}$. On pourra donc remplacer cette fonction par $\frac{\pi L\,\text{sin.}\,q}{r}$, pourvu que les limites $o$ et $\frac{1}{0}$ relatives à $r$ soient respectivement remplacées par $\frac{Kt}{a}$ et $\frac{K't}{a}$. Ainsi nous aurons

$$U = \frac{\pi}{2}\int_{\frac{Kt}{a}}^{\frac{K't}{a}}\int_o^{\pi}\int_o^{2\pi}\frac{L\,\text{sin.}\,q}{r}\,dp\,dq\,dr$$

A la vérité, pour avoir égard à ce qui arrive aux limites $r = \frac{Kt}{a}$ et $r = \frac{K't}{a}$, il faudrait écrire

$$U = \frac{\pi}{2}\int_{\frac{Kt}{a}}^{\frac{K't}{a}}\int_o^{\pi}\int_o^{2\pi}\frac{L\,\text{sin.}\,q\,dp\,dq\,dr}{r} + \frac{a\pi\,dr}{4t}\int_o^{\pi}\int_o^{2\pi}\left(\frac{L''}{K'} - \frac{L'}{K}\right)\text{sin.}\,q\,dp\,dq,$$

$L''$ et $L'$ sont respectivement ce que devient $L$, quand on y met $\frac{K't}{a}$ et $\frac{Kt}{a}$ pour $r$. Mais le terme $\frac{\pi L dr}{4t}\int_o^{\pi}\int_o^{2\pi}\left(\frac{L''}{K'} - \frac{L'}{K}\right)$ sin. $q\,dp\,dq$, ayant $dr$ pour facteur, n'est d'aucune considération et peut être supprimé.

Nous avons besoin des quantités $\frac{dU}{da}$ et $\frac{d^2U}{da^2}$. Pour les obtenir remarquons, que $U$ est fonction de $\frac{t}{a}$. Il est convenable d'exprimer les différentielles par rapport à $a$ par celles par rapport à $t$.

Or on a

$$\alpha \frac{dU}{d\alpha} = -t\frac{dU}{dt}, \quad \alpha^2 \frac{d^2U}{d\alpha^2} = \frac{d\left(t^2\frac{dU}{dt}\right)}{dt}.$$

Nous pouvons maintenant faire $\alpha = 1$; car il suffit d'avoir $U$ et ses différences pour cette valeur de $\alpha$: nous aurons

$$U = \frac{\pi}{2}\int_{Kt}^{K't}\int_0^{\pi}\int_0^{2\pi} \frac{L\sin.q}{r}\,dp\,dq\,dr$$

$$\frac{dU}{d\alpha} = -\frac{\pi}{2}\int_0^{\pi}\int_0^{2\pi}(L''-L')\sin.q\,dp\,dq$$

$$\frac{d^2U}{d\alpha^2} = \frac{\pi}{2}\frac{d}{dt}t\int_0^{\pi}\int_0^{2\pi}(L''-L')\sin.q\,dp\,dq.$$

Si l'on remplace $L$ par $\frac{3}{2\pi^2}M$ dans les deux premières équations et, par $\frac{1}{2\pi^2}N$, dans la dernière, et si l'on substitue les résultats dans la formule

$$V = U - \frac{dU}{d\alpha} + \frac{d^2U}{d\alpha^2},$$

on trouvera

$$\text{(A)}\quad V = \frac{1}{4\pi}\frac{d}{dt}t\int_0^{\pi}\int_0^{2\pi}(N''-N')\sin.q\,dp\,dq + \frac{3}{4\pi}\int_0^{\pi}\int_0^{2\pi}(M''-M')\sin.q\,dp\,dq$$
$$+\frac{3}{4\pi}\int_{Kt}^{K't}\int_0^{\pi}\int_0^{2\pi}\frac{M\sin.q}{r}\,dp\,dq\,dr$$

$M''$ et $M'$ sont respectivement ce que devient $M$, quand on y fait $r = K't$ et $r = Kt$: de même $N''$ est la valeur de $N$ pour $r = K't$ et $N'$ la valeur de $N$ pour $r = Kt$.

V. Nous avons reduit, autant qu'il était possible, et les premières parties des fonctions $U$, $V$, $W$ et une formule qui comprend leurs secondes parties; en intégrant cette dernière, comme il l'a été dit, par rapport à $t$ depuis $t = o$ jusqu'à $t$ quelconque, nous trouvons l'expression

$$\text{(B)}\quad +\frac{t}{4\pi}\int_0^{\pi}\int_0^{2\pi}(N''-N')\sin.q\,dp\,dq + \frac{3}{4\pi}\int_0^{t}\int_0^{\pi}\int_0^{2\pi}(M''-M')\sin.q\,dp\,dq\,dt$$
$$+\frac{3}{4\pi}\int_0^{t}\int_{Kt}^{K't}\int_0^{\pi}\int_0^{2\pi}\frac{M\sin.q}{r}\,dp\,dq\,dr\,dt$$

qui comprend les dernières parties de $U, V, W$. Il ne reste maintenant que de donner aux fonctions $A$, $B$, $C$, $D$, $E$, $F$ des valeurs convenables pour avoir les termes qui composent les secondes et les dernières parties de $U, V, W$. Nous écrirons, pour abréger, au lieu d'une fonction, telle que $\varphi(x+r\cos.p\sin.q,\ y+r\sin.p\sin.q,\ z+r\cos.q)$, simplement $\varphi$, et à la place de $\varphi(x+Kt\cos.p\sin.q,\ y+Kt\sin.p\sin.q,\ z+Kt\cos.q)$ et $\varphi(x+K't\cos.p\sin.q,\ y+K't\sin.p\sin.q,\ z+K't\cos.q)$ nous mettrons respectivement $\varphi'$ et $\varphi''$. Cela posé, pour avoir la seconde partie de $U$, il faut faire dans la formule (A)

$$A=f,\quad B=o,\quad C=o,\quad D=f_1,\quad E=f_2,\quad F=o,$$

et pour la troisième partie de la même quantité, on fera dans la formule (B)

$$A=F,\quad B=o,\quad C=o,\quad D=F_1,\quad E=F_2,\quad F=o,$$

ce qui donnera, en se rappelant que

$$\begin{aligned}M=&\,A\cos.^2p\sin.^2q+B\sin.^2p\sin.^2q+C\cos.^2q+D\cos.p\sin.p\sin.^2q\\&+E\cos.p\cos.q\sin.q+F\sin.p\cos.q\sin.q-\frac{A+B+C}{3}\\N=&\,A\cos.^2p\sin.^2q+B\sin.^2p\sin.^2q+C\cos.^2q+D\cos.p\sin.p\sin.^2q\\&+E\cos.p\cos.q\sin.q+F\sin.p\cos.q\sin.q\,;\end{aligned}$$

pour la seconde partie de $U$

$$\begin{aligned}&\frac{1}{4\pi}\frac{d}{dt}t\int_o^\pi\!\!\int_o^{2\pi}[(f''-f')\cos.p\sin.q+(f_1''-f_1')\sin.p\sin.q\\&\qquad\qquad+(f_2''-f_2')\cos.q]\cos.p\sin.^2q\,dp\,dq\\&+\frac{1}{4\pi}\int_o^\pi\!\!\int_o^{2\pi}\{3[(f''-f')\cos.p\sin.q+(f_1''-f_1')\sin.p\sin.q\\&\qquad\qquad+(f_2''-f_2')\cos.q]\cos.p\sin.q-(f''-f')\}\sin.q\,dp\,dq\\&+\frac{1}{4\pi}\int_{Kt}^{K't}\!\int_o^\pi\!\!\int_o^{2\pi}[3(f\cos.p\sin.q+f_1\sin.p\sin.q+f_2\cos.q)\cos.p\sin.q-f]\frac{\sin.q}{r}\,dp\,dq\,dr,\end{aligned}$$

et pour la troisième partie

$$\begin{aligned}&\frac{t}{4\pi}\int_o^\pi\!\!\int_o^{2\pi}[(F''-F')\cos.p\sin.q+(F_1''-F_1')\sin.p\sin.q\\&\qquad\qquad+(F_2''-F_2')\cos.q]\cos.p\sin.^2q\,dp\,dq\end{aligned}$$

$$+\frac{1}{4\pi}\int_0^t\int_0^\pi\int_0^{2\pi}\Big\{3[(F''-F')\cos.p\sin.q+(F_1''-F_1')\sin.p\sin.q$$
$$+(F_2''-F_2')\cos.q]\cos.p\sin.q-(F''-F')\Big\}\sin.q\,dp\,dq$$

$$+\frac{1}{4\pi}\int_0^t\int_{Kt}^{K't}\int_0^\pi\int_0^{2\pi}[3(F\cos.p\sin.q+F_1\sin.p\sin.q+F_2\cos.q)\cos.p\sin.q$$
$$-F]\frac{\sin.q}{r}\,dp\,dq\,dr\,dt.$$

La formule (A) en y faisant $A=o$, $B=f$, $C=o$, $D=f_1$, $E=o$, $F=f_2$, donnera pour la seconde partie de $V$

$$\frac{1}{4\pi}\frac{d}{dt}t\int_0^\pi\int_0^{2\pi}[(f''-f')\cos.p\sin.q+(f_1''-f_1')\sin.p\sin.q$$
$$+(f_2''-f_2')\cos.q]\sin.p\sin.^2q\,dp\,dq$$

$$+\frac{1}{4\pi}\int_0^\pi\int_0^{2\pi}\Big\{3[(f''-f')\cos.p\sin.q+(f_1''-f_1')\sin.p\sin.q+(f_2''-f_2')\cos.q]\sin.p\sin.q$$
$$-(f_1''-f_1')\Big\}\sin.q\,dp\,dq$$

$$+\frac{1}{4\pi}\int_{Kt}^{K't}\int_0^\pi\int_0^{2\pi}[3(f\cos.p\sin.q+f_1\sin.p\sin.q+f_2\cos.q)\sin.p\sin.q-f_1]\frac{\sin.q}{r}\,dp\,dq\,dr.$$

En changeant $f$ et $F$ et intégrant relativement à $t$ depuis $t=o$ jusqu'à $t$ quelconque, on trouvera pour la troisième partie de la quantité $V$

$$\frac{t}{4\pi}\int_0^\pi\int_0^{2\pi}[(F''-F')\cos.p\sin.q+(F_1''-F_1')\sin.p\sin.q$$
$$+(F_2''-F_2')\cos.q]\sin.p\sin.^2q\,dp\,dq$$

$$+\frac{1}{4\pi}\int_0^t\int_0^\pi\int_0^{2\pi}\Big\{3[(F''-F')\cos.p\sin.q+(F_1''-F_1')\sin.p\sin.q$$
$$+(F_2''-F_2')\cos.q]\sin.p\sin.q-(F_1''-F_1')\Big\}\sin.p\,dp\,dq\,dt$$

$$+\frac{1}{4\pi}\int_0^t\int_{Kt}^{K't}\int_0^\pi\int_0^{2\pi}[3(F\cos.p\sin.q+F_1\sin.p\sin.q+F_2\cos.q)\sin.p\sin.q$$
$$-F_1']\frac{\sin.p}{r}\,dp\,dq\,dr\,dt.$$

On aura enfin, en faisant $A=o$, $B=o$, $C=f_2$, $D=o$, $E=f$, $F=f_1$ dans la formule (A), et $A=o$, $B=o$, $C=F_2$, $D=o$, $E=F$, $F=F_1$, dans (B), la seconde partie de $W$ égale à

$$\frac{1}{4\pi}\frac{d}{dt}t\int_0^{\pi}\int_0^{2\pi}[(f''-f')\cos.p\sin.q+(f_1''-f_1')\sin.p\sin q$$
$$+(f_2''-f_2')\cos.q]\cos.q\sin.q\,dp\,dq$$

$$+\frac{1}{4\pi}\int_0^{\pi}\int_0^{2\pi}\{3[(f''-f')\cos.p\sin.q+(f_1''-f_1')\sin.p\sin.q$$
$$+(f_2''-f_2')\cos.q]\cos.q-(f_2''-f_2')\}\sin.q\,dp\,dq$$

$$+\frac{1}{4\pi}\int_{Kt}^{K't}\int_0^{\pi}\int_0^{2\pi}[3(f\cos.p\sin.q+f_1\sin.p\sin.q+f_2\cos.q)\cos.q-f_2]\frac{\sin.q}{r}dp\,dq\,dr$$

et la troisième partie égale à

$$\frac{t}{4\pi}\int_0^{\pi}\int_0^{2\pi}[(F''-F')\cos.p\sin.q+(F_1''-F_1')\sin.p\sin.q$$
$$+(F_2''-F_2')\cos.q]\cos.q\sin.q\,dp\,dq$$

$$+\frac{1}{4\pi}\int_0^{t}\int_0^{\pi}\int_0^{2\pi}\{3[(F''-F')\cos.p\sin.q+(F_1''-F_1')\sin.p\sin.q$$
$$+(F_2''-F_2')\cos.q]\cos.q-(F_2''-F_2')\}\sin.q\,dp\,dq\,dt$$

$$+\frac{1}{4\pi}\int_0^{t}\int_{Kt}^{K't}\int_0^{\pi}\int_0^{2\pi}[3(F\cos.p\sin.q+F_1\sin.p\sin.q+F_2\cos.q)\cos.q$$
$$-F_2]\frac{\sin.q}{r}dp\,dq\,dr\,dt\,.$$

En réunissant les trois parties de chaque quantité $U$, $V$, $W$, on trouve pour les mêmes quantités les valeurs suivantes:

$$U=\frac{1}{4\pi}\frac{d}{dt}t\int_0^{\pi}\int_0^{2\pi}f'\sin.q\,dp\,dq+\frac{t}{4\pi}\int_0^{\pi}\int_0^{2\pi}F'\sin.q\,dp\,dq$$

$$+\frac{1}{4\pi}\frac{d}{dt}t\int_0^{\pi}\int_0^{2\pi}[(f''-f')\cos.p\sin.q+(f_1''-f_1')\sin.p\sin.q$$
$$+(f_2''-f_2')\cos.q]\cos.p\sin.^2q\,dp\,dq$$

$$+\frac{t}{4\pi}\int_0^{\pi}\int_0^{2\pi}[(F''-F')\cos.p\sin.q+(F_1''-F_1')\sin.p\sin.q$$
$$+(F_2''-F_2')\cos.q]\cos.p\sin.^2q\,dp\,dq$$

$$+\frac{1}{4\pi}\int_0^{\pi}\int_0^{2\pi}\{3[(f''-f')\cos.p\sin.q+(f''_1-f'_1)\sin.p\sin.q$$
$$+(f_2''-f_2')\cos.q]\cos.p\sin.q-(f''-f')\}\sin.q\,dp\,dq$$

$$+\frac{1}{4\pi}\int_0^t\int_0^\pi\int_0^{2\pi}\{3[(F''-F')\cos.p\sin.q+(F_1''-F_1')\sin.p\sin.q$$
$$+(F_2''-F_2')\cos.q]\cos.p\sin.q-(F''-F')\}\sin.q\,dp\,dq\,dt$$

$$+\frac{1}{4\pi}\int_{Kt}^{K't}\int_0^\pi\int_0^{2\pi}[3(f\cos.p\sin.q+f_1\sin.p\sin.q+f_2\cos.q)\cos.p\sin.q-f]\frac{\sin.p}{r}dpdqdr$$

$$+\frac{1}{4\pi}\int_0^t\int_{Kt}^{K't}\int_0^\pi\int_0^{2\pi}[3(F\cos.p\sin.q+F_1\sin.p\sin.q$$
$$+F_2\cos.q)\cos.p\sin.q-F]\frac{\sin.p}{r}dpdqdrdt$$

$$V=\frac{1}{4\pi}\frac{d}{dt}t\int_0^\pi\int_0^{2\pi}f_1'\sin.q\,dp\,dq+\frac{t}{4\pi}\int_0^\pi\int_0^{2\pi}F_1'\sin.q\,dp\,dq$$

$$+\frac{1}{4\pi}\frac{d}{dt}t\int_0^\pi\int_0^{2\pi}[(f''-f')\cos.p\sin.q+(f''_1-f'_1)\sin.p\sin.q$$
$$+(f_2''-f_2')\cos.q]\sin.p\sin.^2q\,dp\,dq$$

$$+\frac{1}{4\pi}t\int_0^\pi\int_0^{2\pi}[(F''-F')\cos.p\sin.q+(F_1''-F_1')\sin.p\sin.q$$
$$+(F_2''-F_2')\cos.q]\sin.p\sin.^2q\,dp\,dq$$

$$+\frac{1}{4\pi}\int_0^\pi\int_0^{2\pi}\{3[(f''-f')\cos.p\sin.q+(f_1''-f_1')\sin.p\sin.q$$
$$+(f_2''-f_2')\cos.q]\sin.p\sin.q-(f_1''-f_1')\}\sin.q\,dp\,dq$$

$$+\frac{1}{4\pi}\int_0^t\int_0^\pi\int_0^{2\pi}\{3[(F''-F')\cos.p\sin.q+(F_1''-F_1')\sin.p\sin.q$$
$$+(F_2''-F_2')\cos.q]\sin.p\sin.q-(F_1''-F_1')\}\sin.q\,dp\,dq$$

$$+\frac{1}{4\pi}\int_{Kt}^{K't}\int_0^\pi\int_0^{2\pi}[3(f\cos.p\sin.q+f_1\sin.p\sin.q$$
$$+f_2\cos.q)\sin.p\sin.q-f_1]\frac{\sin.q}{r}dp\,dq\,dr$$

$$+\frac{1}{4\pi}\int_0^t\int_{Kt}^{K't}\int_0^\pi\int_0^{2\pi}[3(F\cos.p\sin.q+F_1\sin.p\sin.q$$
$$+F_2\cos p)\sin.p\sin.q-F_1]\frac{\sin.q}{r}dp\,dq\,dr$$

$$W=\frac{1}{4\pi}\frac{d}{dt}t\int_0^\pi\int_0^{2\pi}f_2\sin.q\,dp\,dq+\frac{t}{4\pi}\int_0^\pi\int_0^{2\pi}F_2\sin.q\,dp\,dq$$

$$+\frac{1}{4\pi}\frac{d}{dt}\,t\int_0^{\pi}\int_0^{2\pi}[(f''-f')\cos.p\sin.q+(f_1''-f_1')\sin.p\sin.q$$
$$+(f_2''-f_2')\cos.q]\cos.q\sin.q\,dp\,dq$$

$$+\frac{t}{4\pi}\int_0^{\pi}\int_0^{2\pi}[(F''-F')\cos.p\sin.q+(F_1''-F_1')\sin.p\sin.q$$
$$+(F_2''-F_2')\cos.q]\cos.q\sin.q\,dp\,dq$$

$$+\frac{1}{4\pi}\int_0^{\pi}\int_0^{2\pi}\{3[(f''-f')\cos.p\sin.q+(f_1''-f_1')\sin.p\sin.q+(f_2''-f_2')\cos.q]\cos.q$$
$$-(f_2''-f_2')\}\sin.q\,dp\,dq$$

$$+\frac{1}{4\pi}\int_0^{t}\int_0^{\pi}\int_0^{2\pi}\{3[(F''-F')\cos.p\sin.q+(F_1''-F_1')\sin.p\sin.q$$
$$+(F_2''-F_2')\cos.q]\cos.q-(F_2''-F_2')\}\sin.q\,dp\,dq\,dt$$

$$+\frac{1}{4\pi}\int_{Kt}^{K't}\int_0^{\pi}\int_0^{2\pi}[3(f\cos.p\sin.q+f_1\sin.p\sin.q+f_2\cos.q)\cos.q-f_2]\frac{\sin.q}{r}\,dp\,dq\,dr$$

$$+\frac{1}{4\pi}\int_0^{t}\int_{Kt}^{K't}\int_0^{\pi}\int_0^{2\pi}[3(F\cos.p\sin.q+F_1\sin.p\sin.q$$
$$+F_2\cos.q)\cos.q-F_2]\frac{\sin.q}{r}\,dp\,dq\,dr\,dt.$$

Ces valeurs coïncident avec celles que Mr. Poisson a données dans le mémoire qu'il a lu à l'Académie des sciences de Paris le 11 octobre 1830.

VI. On peut obtenir les valeurs des fonctions $U$, $V$, $W$ sous une autre forme en employant un autre moyen de réduction pour les intégrales sextuples du N°. II. Nous ne changerons rien dans la manière de réduire *les premières parties* de $U, V, W$; nous nous occuperons de leurs *secondes parties*. Pour les *troisièmes parties*, elles se tirent des secondes, en y changeant $f$ en $F$ et en intégrant par rapport à $t$ depuis $t=o$ jusqu'à $t$ quelconque. Or, si l'on suppose

$$-\Phi=\left(\frac{1}{2\pi}\right)^3\int_{-\infty}^{+\infty}P\left(\frac{\cos.K'\rho t-\cos.K\rho t}{\rho^2}\right)\sin.[(x'-x)a+(y'-y)b$$
$$+(z'-z)c]\,dx'dy'dz'\,da\,db\,dc,$$

on aura respectivement pour les secondes parties de $U$, $V$, $W$ les valeurs suivantes:

$$\frac{d\Phi}{dx}, \quad \frac{d\Phi}{dy}, \quad \frac{d\Phi}{dz}.$$

Comme $P = af(x', y', z') + bf_1(x', y', z') + cf_2(x', y', z')$, on pourra écrire

$$-\left[\frac{d}{dx} f(x',y',z') + \frac{d}{dy} f_1(x',y',z') + \frac{d}{dz} f_2(x',y',z')\right] \cos.\,[(x'-x)\,a + (y'-y)\,b + (z'-z)\,c]$$

à la place de $-P \sin.\,[(x'-x)\,a + (y'-y)\,b + (z'-z)\,c]$, et comme de plus

$$\frac{\cos.\,K'\rho t - \cos.\,K\rho t}{\rho^2} = -\int_{Kt}^{K't} \frac{\sin.\,\rho r}{\rho}\,dr,$$ nous aurons

$$\Phi = \int_{Kt}^{K't} dr \left\{ \left(\frac{1}{2\pi}\right)^3 \int_{-\infty}^{+\infty} \left[\frac{d}{dx} f(x',y',z') + \frac{d}{dy} f_1(x',y',z') + \frac{d}{dz} f_2(x',y',z')\right] \frac{\sin.\,\rho r}{r} \cos.\,[(x'-x)\,a + (y'-y)\,b + (z'-z)\,c]\,dx'dy'dz'dadbdc\right.$$

Or on a, comme l'on sait

$$\left(\frac{1}{2\pi}\right)^3 \int_{-\infty}^{+\infty} \varphi(x',y',z') \frac{\sin.\,\rho r}{\rho} \cos.[(x'-x)a + (y'-y)\,b + (z'-z)c]\,dx'dy'dz'\,dadbdc$$
$$= \frac{r}{4\pi} \int_0^{\pi}\int_0^{2\pi} \varphi(x + r\cos.\,\alpha,\; y + r\cos.\,\beta,\; z + r\cos.\,\gamma) \sin.\,q\,dp\,dq;$$

donc on aura aussi

$$\Phi = \frac{1}{4\pi} \int_{Kt}^{K't}\int_0^{\pi}\int_0^{2\pi} \left[\frac{d}{dx} f(x + r\cos.\,\alpha,\; y + r\cos.\,\beta,\; z + r\cos.\,\gamma)\right.$$
$$+ \frac{d}{dy} f_1(x + r\cos.\,\alpha,\; y + r\cos.\,\beta,\; z + r\cos.\,\gamma)$$
$$\left. + \frac{d}{dz} f_2(x + r\cos.\,\alpha,\; y + r\cos.\,\beta,\; z + r\cos.\,\gamma\right] r\sin.\,q\,dp\,dq\,dr.$$

On a mis, pour abréger, $\cos.\,\alpha$, $\cos.\,\beta$, $\cos.\,\gamma$ respectivement pour $\cos.\,p \sin.\,q$, $\sin.\,p \sin.\,q$, $\cos.\,q$.

Si l'on change $f$ en $F$, et qu'on désigne par $\Theta$ la valeur que prendra $\Phi$, en sorte que

$$\Theta = \frac{1}{4\pi}\int_{Kt}^{K't}\int_0^{\pi}\int_0^{2\pi}\Big[\frac{d}{dx}F(x+r\cos.\alpha,\ y+r\cos.\beta,\ z+r\cos.\gamma)$$
$$+\frac{d}{dy}F_1(x+r\cos.\alpha,\ y+r\cos.\beta,\ z+r\cos.\gamma)$$
$$+\frac{d}{dz}F_2(x+r\cos.\alpha,\ y+r\cos.\beta,\ z+r\cos.\gamma)\Big]\ r\sin.q\,dr\,dp\,dp\,,$$

on aura $\frac{d}{dx}\int_0^t \Theta\,dt$, $\frac{d}{dy}\int_0^t \Theta\,dt$, $\frac{d}{dz}\int_0^t \Theta\,dt$ respectivement pour les troisièmes parties de $U$, $V$, $W$.

Conservons toujours, pour abréger, les dénominations de l'article V[me] relativement aux fonctions $f$, $F$; nous aurons d'après ce qui précède

$$(8)\ \begin{cases} U = \frac{1}{4\pi}\frac{d}{dt}t\int_0^{\pi}\int_0^{2\pi} f'\sin.q\,dp\,dq + \frac{1}{4\pi}\int_0^{\pi}\int_0^{2\pi}F'\sin.q\,dp\,dq + \frac{d\Phi}{dx} + \int_0^t\frac{d\Theta}{dx}dt \\ V = \frac{1}{4\pi}\frac{d}{dt}t\int_0^{\pi}\int_0^{2\pi} f_1'\sin.q\,dp\,dq + \frac{t}{4\pi}\int_0^{\pi}\int_0^{2\pi}F_1'\sin.q\,dp\,dq + \frac{d\Phi}{dy} + \int_t^t\frac{d\Theta}{dy}dt \\ W = \frac{1}{4\pi}\frac{d}{dt}t\int_0^{\pi}\int_0^{2\pi} f_2'\sin.q\,dp\,dq + \frac{t}{4\pi}\int_0^{\pi}\int_0^{2\pi}F_2'\sin.q\,dp\,dq + \frac{d\Phi}{dz} + \int_t^t\frac{d\Theta}{dz}dt. \end{cases}$$

Si l'on voulait se débarasser des différentielles qui se trouvent sous les signes $\int$ dans $\Phi$ et $\Theta$, on y parviendrait facilement en opérant comme on va le faire. Ne considérons que $\Phi$, et pour plus de simplicité écrivons sa valeur comme il suit

$$\Phi = \frac{1}{4\pi}\int_{Kt}^{K't}\int_0^{\pi}\int_0^{2\pi}\left(\frac{df}{dx}+\frac{df_1}{dy}+\frac{df_2}{dz}\right)\frac{r^2\sin.q\,dp\,dq\,dr}{r}.$$

En faisant $x'=r\cos.\alpha$, $y'=r\cos.\beta$, $z'=r\cos.\gamma$, on trouvera

$$\Phi = \frac{1}{4\pi}\int\left(\frac{df}{dx}+\frac{df_1}{dy}+\frac{df_2}{dz}\right)\frac{dx'dy'dz'}{r}.$$

Les quantités $f, f_1, f_2$, qui étaient fonctions de $x+r\cos.\alpha$, $y+r\cos.\beta$, $z+r\cos.\gamma$, deviendront fonctions de $x+x'$, $y+y'$, $z+z'$ en sorte, qu'on pourra écrire

$$\Phi = \frac{1}{4\pi}\int\left(\frac{df}{dx'}+\frac{df_1}{dy'}+\frac{df_2}{dz'}\right)\frac{dx'dy'dz'}{r},$$

l'intégrale étant prise dans toute l'étendue du volume compris entre deux sphères dons les rayons sont $Kt$ et $K't$.

On a identiquement

$$\left(\frac{df}{dx'}+\frac{df_1}{dy'}+\frac{df_2}{dz'}\right)\frac{1}{r}=\frac{fx'+f_1y'+f_2z'}{r^3}+\frac{d\left(\frac{f}{r}\right)}{dx'}+\frac{d\left(\frac{f_1}{r}\right)}{dy'}+\frac{d\left(\frac{f_2}{r}\right)}{dz'}.$$

Donc

$$\Phi=\frac{1}{4\pi}\int(fx'+f_1y'+f_2z')\frac{dx'dy'dz'}{r^3}+\frac{1}{4\pi}\int\left[\frac{d\left(\frac{f}{r}\right)}{dx'}+\frac{d\left(\frac{f_1}{r}\right)}{dy'}+\frac{d\left(\frac{f_2}{r}\right)}{dz'}\right]dx'dy'dz'.$$

Or, ayant une intégrale triple

$$\int\left(\frac{dP}{dx'}+\frac{dQ}{dy'}+\frac{dR}{dz'}\right)dx'dy'dz'$$

prise dans l'étendue d'une couche comprise entre deux surfaces courbes données, on peut la réduire aux intégrales doubles au moyen de la formule

$$\int\left(\frac{dP}{dx'}+\frac{dQ}{dy'}+\frac{dR}{dz'}\right)dx'dy'dz'=\int(P\cos.\lambda+Q\cos.\mu+R\cos.\nu)\,ds$$
$$-\int(P\cos.\lambda'+Q\cos.\mu'+R\cos.\nu)\,ds',$$

dans laquelle $\lambda, \mu, \nu$ représentent les angles que la normale à la surface extérieure fait avec les axes coordonnés $\lambda', \mu', \nu'$. Les mêmes angles pour la surface intérieure $ds$ et $ds'$ sont respectivement les élémens des surfaces extérieure et intérieure. Les intégrales du second membre se rapportent, la première à tous les points de la surface extérieure, et la seconde à toute la surface intérieure.

Au moyen de cette formule générale l'intégrale

$$\int\left[\frac{d\left(\frac{f}{r}\right)}{dx'}+\frac{d\left(\frac{f_1}{r}\right)}{dy'}+\frac{d\left(\frac{f_2}{r}\right)}{dz'}\right]dx'dy'dz'$$

peut être remplacée par celle-ci:

$$K't\int_0^\pi\int_0^{2\pi}(f''\cos.\alpha+f_1''\cos.\beta+f_2''\cos.\gamma)\sin.q\,dp\,dq$$
$$-Kt\int_0^\pi\int_0^{2\pi}(f'\cos.\alpha+f_1'\cos.\beta+f_2'\cos.\gamma)\sin.q\,dp\,dq.$$

Donc nous aurons, en revenant aux coordonnées polaires,

$$\Phi = \frac{1}{4\pi}\int_{Kt}^{K't}\int_0^{\pi}\int_0^{2\pi}[\cos.\alpha f(x+r\cos.\alpha,\ y+r\cos.\beta,\ z+r\cos.\gamma)$$
$$+\cos.\beta f_1(x+r\cos.\alpha,\ y+r\cos.\beta,\ z+r\cos.\gamma)$$
$$+\cos.\gamma f_2(x+r\cos.\alpha,\ y+r\cos.\beta,\ z+r\cos.\gamma)]\sin.q\,dr\,dp\,dq$$
$$+\frac{K't}{4\pi}\int_0^{\pi}\int_0^{2\pi}[\cos.\alpha f(x+K't\cos.\alpha,\ y+K't\cos.\beta,\ z+K't\cos.\gamma)$$
$$+\cos.\beta f_1(x+K't\cos.\alpha,\ y+K't\cos.\beta,\ z+K't\cos.\gamma)$$
$$+\cos.\gamma f_2(x+K't\cos.\alpha,\ y+K't\cos.\beta,\ z+K't\cos.\gamma)]\sin.q\,dp\,dq$$
$$-\frac{Kt}{4\pi}\int_0^{\pi}\int_0^{2\pi}[\cos.\alpha f(x+kt\cos.\alpha,\ y+kt\cos.\beta,\ z+kt\cos.\gamma)$$
$$+\cos.\beta f_1(x+kt\cos.\alpha\cdots)+\cos.\gamma f_2(x+kt\cos.\alpha\cdots)]\sin.q\,dp\,dq$$

en changeant $f$ en $F$ on trouve

$$\Theta = \frac{1}{4\pi}\int_{Kt}^{K't}\int_0^{\pi}\int_0^{2\pi}[\cos.\alpha F(x+r\cos.\alpha\cdots)+\cos.\beta F_1(x+r\cos.\alpha\cdots)$$
$$+\cos.\gamma F_2(x+r\cos.\alpha\cdots)]\sin.q\,dp\,dq\,dr$$
$$+\frac{K't}{4\pi}\int_0^{\pi}\int_0^{2\pi}[\cos.\alpha F(x+K't\cos.\alpha\cdots)+\cos.\beta F_1(x+K't\cos.\alpha\cdots)$$
$$+\cos.\gamma F_2(x+K't\cos.\alpha\cdots)]\sin.q\,dp\,dq$$
$$-\frac{Kt}{4\pi}\int_0^{\pi}\int_0^{2\pi}[\cos.\alpha F(x+kt\cos.\alpha\cdots)+\cos.\beta F_1(x+kt\cos.\alpha\cdots)$$
$$+\cos.\gamma F_2(x+kt\cos.\alpha\cdots)]\sin.q\,dp\,dq.$$

Les valeurs précédentes de $\Phi$ et $\Theta$ peuvent être mises dans les intégrales (8).

VII. Les intégrales (8) font voir que la différentielle *)

$$udx+vdy+wdz$$

est exacte toutes les fois que $dx\,f(x,y,z)+dy\,f_1(x,y,z)+dz\,f_2(x,y,z)$ et $dx\,F(x,y,z)+dy\,F_1(x,y,z)+dz\,F_2(x,y,z)$, c'est-à-dire $udx+vdy+wdz$ (pour $t=o$), et $\frac{du}{dt}dx+\frac{dv}{dt}dy+\frac{dw}{dt}dz$ (pour $t=o$) le sont.

*) Voyez l'errata à la fin du mémoire.

Supposons :

$$dx f(x,y,z) + dy f_1(x,y,z) + dz f_2(x,y,z) = d\psi(x,y,z)$$

$$dx F(x,y,z) + dy F_1(x,y,z) + dz F_2(x,y,z) = d\Psi(x,y,z)$$

$$\frac{1}{4\pi}\frac{d}{dt}\,t\int_0^{\pi}\!\!\int_0^{2\pi}\psi(x+kt\cos.\alpha,\cdots)\sin.q\,dp\,dq+\frac{t}{4\pi}\int_0^{\pi}\!\!\int_0^{2\pi}\Psi(x+kt\cos.\alpha\cdots)\sin.q\,dp\,dq=M$$

nous aurons

$$\frac{1}{4\pi}\frac{d}{dt}\,t\int_0^{\pi}\!\!\int_0^{2\pi} f'\sin.q\,dp\,dq+\frac{t}{4\pi}\int_0^{\pi}\!\!\int_0^{2\pi} F'\sin.q\,dp\,dq=\frac{dM}{dx}$$

$$\frac{1}{4\pi}\frac{d}{dt}\,t\int_0^{\pi}\!\!\int_0^{2\pi} f_1'\sin.q\,dp\,dq+\frac{t}{4\pi}\int_0^{\pi}\!\!\int_0^{2\pi} F_1'\sin.q\,dp\,dq=\frac{dM}{dy}$$

$$\frac{1}{4\pi}\frac{d}{dt}\,t\int_0^{\pi}\!\!\int_0^{2\pi} f_2'\sin.q\,dp\,dq+\frac{t}{4\pi}\int_0^{\pi}\!\!\int_0^{2\pi} F_2'\sin.q\,dp\,dq=\frac{dM}{dz}$$

$$\Phi=\frac{1}{4\pi}\int_{Kt}^{K't} dr\left[\left(\frac{d^2}{dx^2}+\frac{d^2}{dy^2}+\frac{d^2}{dz^2}\right)\int_0^{\pi}\!\!\int_0^{2\pi}\psi(x+r\cos.\alpha,\ y+r\cos.\beta,\ z+r\cos.\gamma)\right] r\sin.q\,dp\,dq$$

Or, l'intégrale

$$\int_0^{\pi}\!\!\int_0^{2\pi}\psi(x+r\cos.\alpha,\ y+r\cos.\beta,\ z+r\cos.\gamma)\,r\sin.q\,dp\,dq=W$$

satisfait à l'équation

$$\frac{d^2W}{dr^2}=\frac{d^2W}{dx^2}+\frac{d^2W}{dy^2}+\frac{d^2W}{dz^2},$$

donc on aura

$$\Phi=\frac{1}{4\pi}\frac{d}{dt}\,t\int_0^{\pi}\!\!\int_0^{2\pi}\psi(x+k't\cos.\alpha,\cdots)\sin.q\,dp\,dq$$

$$-\frac{1}{4\pi}\frac{d}{dt}\,t\int_0^{\pi}\!\!\int_0^{2\pi}\psi(x+kt\cos.\alpha,\cdots)\sin.q\,dp\,dq.$$

En changeant $\psi$ en $\Psi$ on trouve

$$\Theta=\frac{1}{4\pi}\frac{d}{dt}\,t\int_0^{\pi}\!\!\int_0^{2\pi}\Psi(x+k't\cos.\alpha,\cdots)\sin.q\,dp\,dq$$

$$-\frac{1}{4\pi}\frac{d}{dt}\,t\int_0^{\pi}\!\!\int_0^{2\pi}\Psi(x+kt\cos.\alpha,\cdots)\sin.q\,dp\,dq.$$

En faisant, pour abréger, $M + \Phi + \int_0^t \Theta dt = \varphi$ on trouve, en vertu des formules précédentes,

$$u = \frac{d\varphi}{dx}, \quad v = \frac{d\varphi}{dy}, \quad w = \frac{d\varphi}{dz}$$

$$\varphi = \frac{1}{4\pi}\frac{d}{dt}\int_0^{\pi}\int_0^{2\pi}\psi(x + k't\cos.\alpha, \cdots)\, t\sin.q\, dp\, dq$$

$$+ \frac{1}{4\pi}\int_0^{\pi}\int_0^{2\pi}\Psi(x + k't\cos.\alpha, \cdots)\, t\sin.q\, dp\, dq$$

c'est ce qu'on peut voir aussi par l'intégration de l'équation

$$\frac{d^2\varphi}{dt^2} = K'^2\left(\frac{d^2\varphi}{dx^2} + \frac{d^2\varphi}{dy^2} + \frac{d^2\varphi}{dz^2}\right)$$

à laquelle $\varphi$ doit satisfaire.

Si $\frac{du}{dt}dx + \frac{dv}{dt}dy + \frac{dw}{dt}dz$ (pour $t = o$) était une différentielle exacte, et que $udx + vdy + wdz$ (pour $t = o$) ne le fût pas, on aurait eu, en faisant

$$\frac{du}{dt}dx + \frac{dv}{dt}dy + \frac{dw}{dt}dz = d\Psi(x, y, z),$$

les équations suivantes

$$u = \frac{1}{4\pi}\frac{d}{dt}\int_0^{\pi}\int_0^{2\pi} f'\, t\sin.q\, dp\, dq + \frac{d\Phi}{dx} + \frac{1}{4\pi}\frac{d}{dx}\int_0^{\pi}\int_0^{2\pi}\Psi(x + k't\cos.\alpha, \cdots)\, t\sin.q\, dp\, dq$$

$$v = \frac{1}{4\pi}\frac{d}{dt}\int_0^{\pi}\int_0^{2\pi} f_1'\, t\sin.q\, dp\, dq + \frac{d\Phi}{dy} + \frac{1}{4\pi}\frac{d}{dy}\int_0^{\pi}\int_0^{2\pi}\Psi(x + k't\cos.\alpha, \cdots)\, t\sin.q\, dp\, dq$$

$$w = \frac{1}{4\pi}\frac{d}{dt}\int_0^{\pi}\int_0^{2\pi} f_2'\, t\sin.q\, dp\, dq + \frac{d\Phi}{dz} + \frac{1}{4\pi}\frac{d}{dz}\int_0^{\pi}\int_0^{2\pi}\Psi(x + k't\cos.\alpha, \cdots)\, t\sin.q\, dp\, dq$$

Il est facile d'écrire ce qui arriverait si $udx + vdy + wdz$ (pour $t = o$) était une différentielle exacte, sans que $\frac{du}{dt}dx + \frac{dv}{dt}dy + \frac{dw}{dt}dz$ (pour $t = o$) le soit.

VIII. Il est bon de démontrer que les intégrales (8) satisfont aux équations (5) et aux conditions

$$(9)\qquad \left\{\begin{array}{ll} u = f(x,y,z), & \frac{du}{dt} = F(x,y,z) \\ v = f_1(x,y,z), & \frac{dv}{dt} = F_1(x,y,z) \\ w = f_2(x,y,z), & \frac{dw}{dt} = F_2(x,y,z) \end{array}\right\} \text{ pour } t = o.$$

Pour y parvenir plus facilement désignons par $P, P', P''$ respectivement les termes de $u, v, w$ qui dépendent de $f$, et par $Q, Q', Q''$ respectivement ce que deviennent $P, P', P''$ quand on y change $f$ en $F$, en sorte que

$$u = P + \int_0^t Q dt, \quad \frac{du}{dt} = \frac{dP}{dt} + Q$$

$$v = P' + \int_0^t Q' dt, \quad \frac{dv}{dt} = \frac{dP'}{dt} + Q'$$

$$w = P'' + \int_0^t Q'' dt, \quad \frac{dw}{dt} = \frac{dP''}{dt} + Q''$$

$$P = \frac{1}{4\pi}\frac{d}{dt}\int_0^\pi\int_0^{2\pi} f' \, t \sin. q \, dp \, dq + \frac{d\Phi}{dx}, \quad Q = \frac{1}{4\pi}\frac{d}{dt}\int_0^\pi\int_0^{2\pi} F' \, t \sin. q \, dp \, dq + \frac{d\Theta}{dx}$$

$$P' = \frac{1}{4\pi}\frac{d}{dt}\int_0^\pi\int_0^{2\pi} f_1' \, t \sin. q \, dp \, dq + \frac{d\Phi}{dy}, \quad Q' = \frac{1}{4\pi}\frac{d}{dt}\int_0^\pi\int_0^{2\pi} F_1' \, t \sin. q \, dp \, dq + \frac{d\Theta}{dy}$$

$$P'' = \frac{1}{4\pi}\frac{d}{dt}\int_0^\pi\int_0^{2\pi} f_2' \, t \sin. q \, dp \, dq + \frac{d\Phi}{dz}, \quad Q'' = \frac{1}{4\pi}\frac{d}{dt}\int_0^\pi\int_0^{2\pi} F_2' \, t \sin. q \, dp \, dq + \frac{d\Theta}{dz}$$

en faisant $t = o$ dans $P, P', P''$, on trouve sur le champ

$$P = f(x,y,z), \quad P' = f_1(x,y,z), \quad P'' = f_2(x,y,z)$$

donc, en changent $f$ en $F$, on aura, pour $t = o$,

$$Q = F(x,y,z), \quad Q' = F_1(x,y,z), \quad Q'' = F_2(x,y,z).$$

Il est facile de voir que $\frac{d\Phi}{dt}$ est nul pour $t = o$, donc on aura pour cet instant

$$\frac{dP}{dt} = \frac{1}{4\pi}\frac{d^2}{dt^2}\int_0^\pi\int_0^{2\pi} f' \, t \sin. q \, dp \, dq$$

Or, l'intégrale $\int_0^{\pi}\int_0^{2\pi} f'\,t\,\sin.\,q\,dp\,dq = W$ satisfait à l'équation

$$\frac{d^2W}{dt^2} = K^2\left(\frac{d^2W}{dx^2} + \frac{d^2W}{dy^2} + \frac{d^2W}{dz^2}\right),$$

donc, pour $t = o$,

$$\frac{dP}{dt} = \frac{t}{4\pi}\left(\frac{d^2}{dx^2} + \frac{d^2}{dy^2} + \frac{d^2}{dz^2}\right)\int_0^{\pi}\int_0^{2\pi} f'\,\sin.\,q\,dp\,dq = o.$$

On trouvera de la même manière que les différentielles $\frac{dP'}{dt}$, $\frac{dP''}{dt}$ sont nulles quand $t = o$, ensorte que l'on aura pour $t = o$

$$\frac{dP}{dt} = o,\quad \frac{dP'}{dt} = o,\quad \frac{dP''}{dt} = o,$$

et, en changent $f$ en $F$, on trouve pour le même instant

$$\frac{dQ}{dt} = o,\quad \frac{dQ'}{dt} = o,\quad \frac{dQ''}{dt} = o.$$

D'après ce qui précède il est facile de voir que les conditions (9) sont satisfaites. Pour nous assurer de ce qui en est par rapport aux équations (5), mettons les sous la forme suivante

$$(10)\quad \begin{cases} \frac{d^2u}{dt^2} = Au + Bv + Cw \\ \frac{d^2v}{dt^2} = A'u + B'v + C'w \\ \frac{d^2w}{dt^2} = A''u + B''v + C''w \end{cases}$$

$A$, $B$, $C$, $A'$ ..... étant des fonctions entières des caractéristiques $\frac{d}{dx}$, $\frac{d}{dy}$, $\frac{d}{dz}$.

En intégrant les équations (10) par rapport à $t$ et à partir de $t = o$, on trouve

$$(11)\quad \begin{cases} \frac{du}{dt} - \left(\frac{du}{dt}\right)_0 = A\int_0^t udt + B\int_0^t vdt + C\int_0^t wdt \\ \frac{dv}{dt} - \left(\frac{dv}{dt}\right)_0 = A'\int_0^t udt + B'\int_0^t vdt + C'\int_0^t wdt \\ \frac{dw}{dt} - \left(\frac{dw}{dt}\right)_0 = A''\int_0^t udt + B''\int_0^t vdt + C''\int_0^t wdt. \end{cases}$$

Les équations (11), dans lesquelles $\left(\frac{du}{dt}\right)_0$, $\left(\frac{dv}{dt}\right)_0$, $\left(\frac{dw}{dt}\right)_0$ sont respectivement les valeurs de $\frac{du}{dt}$, $\frac{dv}{dt}$, $\frac{dw}{dt}$ pour $t = o$, ont lieu en même tems que les équations (10), elles en sont une suite nécessaire. Si l'on mettait dans les équations (10), à la place de $u$, $v$, $w$ respectivement les intégrales $\int_o^t udt$, $\int_o^t vdt$, $\int_o^t wdt$, on trouverait les équations

$$\frac{du}{dt} = A\int_o^t udt + B\int_o^t vdt + C\int_o^t wdt$$

$$\frac{dv}{dt} = A'\int_o^t udt + B'\int_o^t vdt + C'\int_o^t wdt$$

$$\frac{dw}{dt} = A''\int_o^t udt + B''\int_o^t vdt + C''\int_o^t wdt$$

qui ne sauraient avoir lieu à moins qu'on n'eut $\left(\frac{du}{dt}\right)_0 = o$, $\left(\frac{dv}{dt}\right)_0 = o$, $\left(\frac{dw}{dt}\right)_0 = o$. Mais si les valeurs de $u$, $v$, $w$, satisfaisant aux équations (10), sont en même tems telles que $\left(\frac{du}{dt}\right)_0 = o$, $\left(\frac{dv}{dt}\right)_0 = o$, $\left(\frac{dw}{dt}\right)_0 = o$, les intégrales $\int_o^t udt$, $\int_o^t vdt$, $\int_o^t wdt$ mises respectivement à la place de $u$, $v$, $w$, satisferont aussi aux mêmes équations.

Nous avons vu que $\frac{dQ}{dt} = o$, $\frac{dQ'}{dt} = o$, $\frac{dQ''}{dt} = o$ (pour $t = o$) donc $\int_o^t Qdt$, $\int_o^t Q'dt$, $\int_o^t Q''dt$, mises respectivement à la place de $u$, $v$, $w$ dans les équations (5), leur satisferont, si $u = Q$, $v = Q'$, $w = Q''$ y satisfont. Or comme $Q$, $Q'$, $Q''$, sont ce que deviennent respectivement $P$, $P'$, $P''$ quand on y change les fonctions arbitraires $f$ en $F$, il est évident que les valeurs $u = Q$, $v = Q'$, $w = Q''$ satisferont aux équations (5), si $u = P$, $v = P'$, $w = P''$ leur satisfont. Donc si les valeurs $u = P$, $v = P'$, $w = P''$ satisfont aux équations linéaires (5), $u = \int_o^t Qdt$, $v = \int_o^t Q'dt$, $w = \int_o^t Q''dt$, et par conséquent, $u = P + \int_o^t Qdt$, $v = P' + \int_o^t Q'dt$, $w = P'' + \int_o^t Q''dt$ y satisferont aussi.

Tout se réduit à démontrer que les valeurs

$$u = P, \quad v = P', \quad w = P''$$

satisfont aux équations (5). Comme les fonctions $f, f_1, f_2$ qui entrent dans $P$, $P'$, $P''$ sont arbitraires et indépendantes les unes des autres, il est impossible qu'après la substitution de $u = P$ $v = P'$, $w = P''$ dans les équations (5), les termes qui proviendront d'une de ces fonctions puissent être détruits par ceux qui dépendront des deux autres; il faut donc que les termes qui dépendent de $f_1$ satisfassent seuls aux équations (5), comme les termes dépendans de $f_1$ et comme ceux qui dépendent de $f_2$. De plus, si l'on parvient à prouver que les termes dépendans d'une des fonctions $f$ satisfont aux équations (5), on est en droit de conclure que les termes qui dépendent des deux autres satisferont séparément aux mêmes équations. Car, en appliquant le calcul qu'on aura fait pour une des fonctions $f$, aux deux autres, on démontrera pour celles-ci ce qui a été établi pour la première.

Pour avoir moins à écrire, nous ferons

$$f_1 = o, \; f_2 = o, \; \frac{1}{4\pi}\frac{d}{dt}\int_o^\pi\int_o^{2\pi} f'\, t \sin.q\, dp\, dq = L, \; \frac{1}{4\pi}\int_o^\pi\int_o^{2\pi} f''\, t \sin.q\, dp\, dq = L'$$

$$\frac{1}{4\pi}\int_o^\pi\int_o^{2\pi} f\, r\, \sin.\, q\, dp\, dq = M$$

et nous démontrerons que

$$u = L + \int_{Kt}^{K't} \frac{d^2 M}{dx^2}\, dr; \quad v = \int_{Kt}^{K't} \frac{d^2 M}{dx\, dy}\, dr, \quad w = \int_{Kt}^{K't} \frac{d^2 M}{dx\, dz}\, dr$$

satisfont aux équations (5).

En observant que

$$\frac{d^2 L}{dt^2} = K^2\left(\frac{d^2 L}{dx^2} + \frac{d^2 L}{dy^2} + \frac{d^2 L}{dz^2}\right), \quad \frac{d^2 L'}{dt^2} = K'^2\left(\frac{d^2 L'}{dx^2} + \frac{d^2 L'}{dy^2} + \frac{d^2 L'}{dz^2}\right)$$

$$\frac{d^2 M}{dt^2} = \frac{d^2 M}{dx^2} + \frac{d^2 M}{dy^2} + \frac{d^2 M}{dz^2}$$

nous aurons

$$\vartheta = \frac{du}{dx} + \frac{dv}{dy} + \frac{dw}{dz} = \frac{dL}{dx} + \frac{d}{dx}\int_{Kt}^{K't}\left(\frac{d^2 M}{dx^2} + \frac{d^2 M}{dy^2} + \frac{d^2 M}{dz^2}\right) dr = \frac{dL'}{dx}$$

et les équations (5) deviendront

$$\left.\begin{aligned}
\frac{d^3u}{dt^2} &= K^2\left(\frac{d^2u}{dx^2}+\frac{d^2u}{dy^2}+\frac{d^2u}{dz^2}\right)+2K^2\,\frac{d^2L'}{dx^2}\\
\frac{d^2v}{dt^2} &= K^2\left(\frac{d^2v}{dx^2}+\frac{d^2v}{dy^2}+\frac{d^2v}{dz^2}\right)+2K^2\,\frac{d^2L'}{dx\,dy}\\
\frac{d^2w}{dt^2} &= K^2\left(\frac{d^2w}{dx^2}+\frac{d^2w}{dy^2}+\frac{d^2w}{dz^2}\right)+2K^2\,\frac{d^2L'}{dx\,dz}
\end{aligned}\right\}\ (5\text{ bis})$$

le terme $L$ de la quantité $u$ se détruit évidemment dans la première équation, on pourra donc mettre dans cette équation simplement $\int_{Kt}^{K't}\frac{d^2M}{dt^2}\,dr$ pour $u$ ce qui donnera

$$\frac{d^2u}{dx^2}+\frac{d^2u}{dy^2}+\frac{d^2u}{dz^2}=\frac{d^2L'}{dx^2}-\frac{d^2L}{dx^2}$$

$$\frac{d^2u}{dt^2}=K'^2\,\frac{d^2L'}{dx^2}-K^2\,\frac{d^2L}{dx^2}$$

$$\frac{d^2v}{dx^2}+\frac{d^2v}{dy^2}+\frac{d^2v}{dz^2}=\frac{d^2L'}{dxdy}-\frac{d^2L}{dx\,dy}$$

$$\frac{d^2v}{dt^2}=K'^2\,\frac{d^2L'}{dx\,dy}-K^2\,\frac{d^2L}{dx\,dy}$$

$$\frac{d^2w}{dx^2}+\frac{d^2w}{dy^2}+\frac{d^2w}{dz^2}=\frac{d^2L'}{dx\,dz}-\frac{d^2L}{dx\,dz}$$

$$\frac{d^2w}{dt^2}=K'^2\,\frac{d^2L'}{dx\,dz}-K^2\,\frac{d^2L}{dxdz}$$

En substituant ces valeurs dans les équations (5 bis) et en se souvenant que $K'^2=3K^2$, on verra immédiatement que les équations sont satisfaites, d'où l'on conclura que les intégrales (8) satisfont aux équations (5).

Nous nous proposons de revenir sur l'intégration des équations à différences partielles et de faire voir comment les formules de l'article I^er^ généralisées peuvent servir à trouver les intégrales d'équations plus composées que celles que nous avons traitées dans ce mémoire.

# E R R A T A.

Le lecteur est prié de mettre dans les sept premiers articles, à la place des lettres majuscules $U$, $V$, $W$, respectivement les lettres $u$, $v$, $w$.

Dans l'article IV$^{e}$, depuis „Appelons $V$ l'expression précédente" (pag. 353) et jusqu'à la fin de l'article, on laissera les lettres majuscules $V$ et $U$.

On mettra partout, à la place de $K$, la lettre $k$.

# ОБЪ
# ОСТАТОЧНЫХЪ СРАВНЕНІЯХЪ
## ТРЕТЬЕЙ СТЕПЕНИ.

СОЧИНЕНІЕ
В. БУНЯКОВСКАГО.

---

(Читано 12 Септ. 1832.)

Прежде нежели приступимъ къ изслѣдованіямъ, составляющимъ предметъ сего разсужденія, мы полагаемъ не излишнимъ объяснить читателямъ, неознакомленнымъ съ сочиненіемъ знаменитаго Гаусса: Disquisitiones arithmeticae, употребляемыя имъ знакоположенія, которыя очень часто будутъ встрѣчаться въ предлагаемыхъ здѣсь изысканіяхъ.

Когда разность двухъ чиселъ $b$ и $c$ дѣлится нà-цѣло на число $a$, то въ такомъ предположеніи числа $b$ и $c$ называются *равноостаточными* (congrui) относительно числа $a$. Въ противномъ же случаѣ, оныя называются *разноостаточными* (incongrui). Число $a$ именуется *модулемъ* (modulus).

Числа $b$ и $c$ могутъ быть или положительныя, или отрицательныя; но всегда должны быть цѣлыя. Что касается до модуля $a$, то ясно, что можно разсматривать оный какъ число отвлеченное, и не принимать въ разсужденіе его знака.

*

И такъ $+5$ и $+12$ *равноостаточны* относительно *модуля* 7. $+32$ и $-12$ *равноостаточны* по *модулю* 11, а *разноостаточны* относительно *модуля* 7.

Очевидно впрочемъ, что два числа равныя между собою и съ одинакими знаками, всегда будутъ равноостаточны по какому ни есть модулю.

Равноостаточность двухъ выраженій изображается знакомъ: $\equiv$, послѣ котораго пишется модуль, заключенный въ скобкахъ. И такъ, $12 \equiv 5$ (mod. 7). Мы будемъ называть уравненіе такого рода: *остаточнымъ сравненіемъ*, или, чаще, просто *сравненіемъ*. Читается же оное слѣдующимъ образомъ: 12 *равноостаточно съ* 5 *по модулю* 7.

Мы выпускаемъ здѣсь изложеніе нѣкоторыхъ основныхъ предложеній, относящихся къ остаточнымъ сравненіямъ, по причинѣ простоты сихъ правилъ и сходства оныхъ съ тѣми, которыя употребляются въ обыкновенныхъ уравненіяхъ.

Изобразимъ чрезъ $p$ *число простое* *) (nombre premier), то есть такое число, которое не дѣлится ни на какое другое цѣлое безъ остатка. Представимъ чрезъ $A$, $B$, $C$ и $D$ числа цѣлыя, положительныя или отрицательныя, нераздѣляющіяся на $p$. Цѣлію предлагаемыхъ изслѣдованій будетъ доказательство слѣдующей теоремы:

Теорема. *Всегда возможно удовлетворить остаточному сравненію*

$$(1) \qquad Ax^3 + By^3 + Cz^3 - D \equiv 0 \ (\text{mod. } p)$$

*величинами цѣлыми для* $x$, $y$ *и* $z$.

Здѣсь предстоитъ разсмотрѣть два случая. Первый, когда $p$ будетъ вида $3k+1$, а второй, когда $p = 3k+2$. Что касается до предположеній $p = 2$ и $p = 3$, то о сихъ случаяхъ будетъ упомянуто послѣ.

---

*) Такого рода числа не свойственно именуются у насъ *первыми*.

## 1ый СЛУЧАЙ. ($p = 3k + 1$).

Надлежитъ доказать возможность сравненія (1) для всѣхъ простыхъ чиселъ вида $3k+1$. Число $k$ должно быть всегда чётное, ибо, въ противномъ случаѣ, $3k+1$ не было бы число простое.

Замѣтимъ сперва, что въ остаточномъ сравненіи, которое имѣемъ въ виду изслѣдовать, можно будетъ всегда предположить, что $A$, $B$, $C$ и $D$ величины положительныя, и сверхъ того, что каждая изъ нихъ менѣе нежели $p$. Дабы пріуготовить такимъ образомъ упомянутое сравненіе, стоитъ только отнять отъ первой части онаго, или придать къ оной число $p$, взятое извѣстное число разъ, чрезъ что равенство между остатками въ разсматриваемомъ сравненіи не нарушится.

Изобразимъ теперь чрезъ $\varrho$ одинъ изъ *первообразныхъ корней* *) (racine primitive) какого ни есть простаго числа $p$. По свойству сихъ корней извѣстно, что если въ ряду

$$\varrho,\ \varrho^2,\ \varrho^3, \cdots\cdots \varrho^{p-1},$$

будемъ отбрасывать число $p$, взятое столько разъ, сколько сіе возможно, то получимъ всѣ числа, заключающіяся въ ряду натуральныхъ чиселъ

$$1,\ 2,\ 3,\ \cdots\cdots\ (p-1),$$

но вообще въ порядкѣ, отличномъ отъ сего послѣдняго. Или, иначе: если возьмемъ какое нибудь число $n$ во второмъ ряду, то всегда найдемъ въ первомъ такое, которое будетъ равноостаточно съ количествомъ $n$ по модулю $p$.

Полагая теперь

$$A \equiv \varrho^\alpha \ (\text{mod.}\, p),\ B \equiv \varrho^\beta \ (\text{mod.}\, p),\ C \equiv \varrho^\gamma \ (\text{mod.}\, p),\ D \equiv \varrho^\delta \ (\text{mod.}\, p),$$

и

(2) $$x \equiv \varrho^\lambda \ (\text{mod.}\, p),\ y \equiv \varrho^\mu \ (\text{mod.}\, p),\ z \equiv \varrho^\nu \ (\text{mod.}\, p),$$

сравненіе (1) обратится въ слѣдующее:

---

*) Мы приняли сіе наименованіе, хотя оное можетъ показаться и несвойственнымъ.

$$\varrho^{3\lambda+\alpha}+\varrho^{3\mu+\beta}+\varrho^{3\nu+\gamma}-\varrho^{\delta}\equiv 0 \ (\text{mod.}\, p),$$

или, что все равно,

$$\varrho^{3\lambda+\alpha-\delta}+\varrho^{3\mu+\beta-\delta}+\varrho^{3\nu+\gamma-\delta}-1\equiv 0 \ (\text{mod.}\, p).$$

Здѣсь $\alpha$, $\beta$, $\gamma$ и $\delta$ изображаютъ числа извѣстныя; а дабы вывести справедливость сего послѣдняго сравненія, должно доказать, что можно удовлетворить оному цѣлыми величинами для $\lambda$, $\mu$ и $\nu$, опредѣляющими, посредствомъ сравненій (2), числа $x$, $y$ и $z$.

Если которая нибудь изъ разностей $\alpha-\delta$, $\beta-\delta$, $\gamma-\delta$ будетъ дѣлиться на 3, то въ такомъ случаѣ срав. (1) имѣетъ мѣсто; и дѣйствительно, пусть на примѣръ $\gamma-\delta=3i$, гдѣ $i$ изображаетъ число цѣлое. Можно будетъ предположить $x\equiv o$ (mod. $p$) и $y\equiv o$ (mod. $p$); а для опредѣленія величины $z$, имѣемъ сравненіе

$$\varrho^{3(\nu+i)}-1\equiv o \ (\text{mod.}\, p),$$

которому удовлетворяемъ полагая $3(\nu+i)=p-1$, откуда: $\nu=\frac{p-1}{3}-i$; и такъ какъ $p=3k+1$, то и получимъ $z\equiv\varrho^{k-i}$ (mod. $p$). Посему предстоитъ разсмотрѣть тотъ случай, когда ни одна изъ разностей $\alpha-\delta$, $\beta-\delta$, $\gamma-\delta$ не дѣлится на 3; сіе условіе выражается слѣдующими предположеніями:

$$\alpha-\delta\equiv(1 \text{ или } 2) \ (\text{mod. } 3)$$
$$\beta-\delta\equiv(1 \text{ или } 2) \ (\text{mod. } 3)$$
$$\gamma-\delta\equiv(1 \text{ или } 2) \ (\text{mod. } 3).$$

Соображеніе сихъ различныхъ видовъ разностей $\alpha-\delta$, $\beta-\delta$, $\gamma-\delta$, приводитъ насъ къ четыремъ сравненіямъ, справедливость которыхъ надлежитъ доказать отдѣльно. Вотъ виды сихъ четырехъ сравненій:

a) $$\varrho^{3L+1}+\varrho^{3M+1}+\varrho^{3N+1}-1\equiv o \ (\text{mod.}\, p)$$

b) $$\varrho^{3L+2}+\varrho^{3M+2}+\varrho^{3N+2}-1\equiv o \ (\text{mod.}\, p)$$

c) $$\varrho^{3L+1} + \varrho^{3M+1} + \varrho^{3N+2} - 1 \equiv o \pmod{p}$$

d) $$\varrho^{3L+2} + \varrho^{3M+2} + \varrho^{3N+1} - 1 \equiv o \pmod{p},$$

гдѣ $L$, $M$ и $N$ изображаютъ цѣлыя числа.

### Доказательство возможности сравненія (a).

Сперва замѣтимъ, что если бы можно было всегда удовлетворить сравненію

(3) $$\varrho^{3M+1} + \varrho^{3N+1} - 1 \equiv o \pmod{p},$$

то остаточная формула (1), для случая a), была бы доказана; ибо, имѣли бы тогда $x \equiv o \pmod{p}$, а величины $y$ и $z$ опредѣлились бы посредствомъ величинъ $M$ и $N$, удовлетворяющихъ срав. (3). И такъ, положимъ что срав. (3) не удовлетворяется никакими цѣлыми величинами для $M$ и $N$.

Изобразимъ, для краткости, показателей вида $3K+1$ буквою $P$ съ нумерами внизу; такъ какъ въ настоящемъ случаѣ $p = 3k+1$, то очевидно, что показателей такого вида, и меньшихъ нежели $p$, будетъ числомъ $k$. Равнымъ образомъ, представимъ чрезъ $Q$ съ нумерами внизу показателей вида $3K+2$. Оныхъ будетъ числомъ также $k$. Показателей вида $3K$ означимъ чрезъ $R$ съ нумерами. Исключимъ изъ сего числа наибольшій изъ сихъ показателей, именно $3k$; слѣдовательно, показателей вида $R$ останется только $k-1$.

И такъ, получимъ, соотвѣтственно тремъ видамъ $3K+1$, $3K+2$, $3K$, слѣдующіе три ряда показателей:

$$\begin{array}{l} P_1,\ P_2,\ P_3,\ \cdots\cdots P_k \\ Q_1,\ Q_2,\ Q_3,\ \cdots\cdots Q_k \\ R_1,\ R_2,\ R_3,\ \cdots\cdots R_{k-1}. \end{array}$$

Возьмемъ теперь изъ перваго ряда который нибудь изъ показателей. Изобразимъ оный чрезъ $P$; пусть будетъ $\varrho^S = X$, гдѣ $S$ представляетъ

показателя, заключающагося въ ряду 1, 2, 3, ..... $(p-1)$, и предположимъ что $X$ означаетъ такое число, которое удовлетворяетъ сравненію

$$(4) \qquad \varrho^{P} + X - 1 \equiv 0 \ (\mathrm{mod.}\, p).$$

Подставляя въ сіе сравненіе вмѣсто $P$ каждую изъ величинъ $P_1$, $P_2$, $P_3 \cdots P_k$, получимъ и для $X$, $k$ различныхъ величинъ, которыя изобразимъ чрезъ $X_1$, $X_2$, $X_3$, ..... $X_k$. Замѣтимъ также, что ни одна изъ сихъ величинъ $X$ не можетъ быть равна количеству $\varrho^{3k}$; ибо, въ противномъ случаѣ, сравненіе (4) обратилось бы въ невозможное, именно въ слѣдующее: $\varrho^{P} \equiv 0 \ (\mathrm{mod.}\, p)$. Посему показатель $S$ не можетъ равняться $p - 1 = 3k$. Но, относительно $S$ можно сдѣлать три предположенія: или сей показатель, для опредѣленной величины $P$, будетъ вида $3K+1$, или вида $3K+2$, или наконецъ вида $3K$. Разберемъ сіи три предположенія.

Вопервыхъ, нельзя допустить предположенія $S = 3K+1$, или $X = \varrho^{3K+1}$, потому что, подставляя сію величину въ срав. (4), получили бы сравненіе одинаковаго вида съ срав. (3), которое было исключено выше; слѣдовательно, остаются только два предположенія: $S = 3K+2$ или $S = 3K$, которыя приводятъ къ одному изъ двухъ слѣдующихъ уравненій:

$$X = \varrho^{3K+2} \text{ или } X = \varrho^{3K}.$$

Докажемъ теперь, что въ ряду $X_1$, $X_2$, $X_3$, ..... $X_k$, будетъ находиться по крайней мѣрѣ одна величина, равная количеству вида: $\varrho^{3K+2}$. Для сего, вспомнимъ, что ни одна изъ сихъ самыхъ величинъ $X_1$, $X_2$, $X_3$, ..... $X_k$ не можетъ быть $= \varrho^{3k}$; сверхъ того, выраженіе $\varrho^{P}$ способно принять $k$ различныхъ значеній, именно: $\varrho^{P_1}$, $\varrho^{P_2}$, $\varrho^{P_3}$, ..... $\varrho^{P_k}$, а выраженіе $X = \varrho^{3K}$, можетъ принять только $k-1$ различныхъ между собою величинъ, то есть: $\varrho^{R_1}$, $\varrho^{R_2}$, $\varrho^{R_3}$, ..... $\varrho^{R_{k-1}}$. Но такъ какъ въ ряду

$$\varrho^{P_1}, \ \varrho^{P_2}, \ \varrho^{P_3}, \ \ldots\ldots \ \varrho^{P_{k-1}}$$

однимъ членомъ болѣе, нежели въ ряду

$$\varrho^{R_1},\ \varrho^{R_2},\ \varrho^{R_3},\ldots\ldots \varrho^{R_{k-1}},$$

слѣдовательно существуетъ по крайней мѣрѣ одна величина для $X$, которая не имѣетъ вида $\varrho^{3K}$; и какъ сверхъ того, мы исключили величины $X$, имѣющія видъ $\varrho^{3K+1}$, то и заключаемъ, что по меньшей мѣрѣ будетъ одна величина $X=\varrho^{3K+2}$, или, что все равно $X=\varrho^{Q}$, соотвѣтствующая нѣкоторому опредѣленному значенію показателя $P$. Симъ самымъ доказывается возможность остаточной формулы

$$\varrho^{P}+\varrho^{Q}-1\equiv o\ (\mathrm{mod.}\,p). \tag{5}$$

Теперь докажемъ, что всегда можно удовлетворить сравненію

$$\varrho^{P'}+\varrho^{P''}\equiv\varrho^{Q}\ (\mathrm{mod.}\,p), \tag{6}$$

гдѣ $P'$ и $P''$ изображаютъ показателей вида: $3K+1$. Когда сіе будетъ доказано, тогда можно будетъ заключить и о возможности сравненія a), ибо, по подстановленіи сей послѣдней величины для $\varrho^{Q}$ въ срав. (5), получимъ сравненіе одинаковаго вида съ срав. a).

Замѣтимъ, что нельзя предположить

$$\varrho^{P'}+\varrho^{P''}\equiv\varrho^{R}\ (\mathrm{mod.}\,p),$$

потому что отсюда произошло бы

$$\varrho^{P'-R}+\varrho^{P''-R}-1\equiv o\ (\mathrm{mod.}\,p),$$

что противно предположенію, ибо показатели $P'-R$ и $P'-R$ оба имѣютъ видъ $3K+1$. Ежели $R>P'$ или $R>P''$, то и тогда разности $P'-R$ и $P''-R$ можно принимать имѣющими видъ $3K+1$. Дѣйствительно, въ слѣдствіе Ферматовой теоремы, можно будетъ придать къ вышеупомянутымъ разностямъ число $p-1=3k$, и тогда величины $3k+P'-R$ и $3k+P''-R$ будутъ положительныя, и сохранятъ прежній видъ $3K+1$.

Итакъ, если не будемъ допускать справедливости сравненія (6), то останется только одно предположеніе, именно:

(7) $$\varrho^{P'} + \varrho^{P''} \equiv \varrho^{P'''} \text{ (mod. } p).$$

Возьмемъ теперь въ ряду показателей $P_1, P_2, P_3, \cdots P_k$ который нибудь изъ оныхъ: изобразимъ оный показатель чрезъ $P$, и составимъ слѣдующій рядъ выраженій:

(8) $$\varrho^P,\; 2\varrho^P,\; 3\varrho^P,\; 4\varrho^P \cdots\cdots k\varrho^P.$$

Замѣтимъ вопервыхъ, что ни одно изъ сихъ количествъ не дѣлится на $p$, а во вторыхъ, что всѣ сіи величины разноостаточны между собою по модулю $p$. Теперь легко удостовѣриться въ томъ, что если сумма $\varrho^{P'} + \varrho^{P''}$ не можетъ быть изображена иначе, какъ только выраженіемъ вида: $\varrho^{3K+1}$ (исключая тѣ случаи, когда оная дѣлится на $p$) то каждый изъ членовъ (8), начиная со втораго, можетъ изображать подобную сумму. Дѣйствительно, второй членъ можетъ быть представленъ въ видѣ

$$\varrho^P + \varrho^P$$

третій, въ видѣ

$$\varrho^P + 2\varrho^P,$$

четвертый, въ видѣ

$$\varrho^P + 3\varrho^P,$$

и проч. И какъ сверхъ того $2\varrho^P = \varrho^P + \varrho^P$ имѣетъ, по предложенію, видъ: $\varrho^{3K+1}$, то и сумма $\varrho^P + 2\varrho^P = 3\varrho^P \equiv \varrho^P + \varrho^{3K+1}$ должна имѣть подобный же видъ; итакъ, полагая $3\varrho^P \equiv \varrho^{3K'+1}$, увидимъ, что четвертый членъ ряда (8), приметъ также видъ: $\varrho^P + \varrho^{3K'+1}$; такимъ же точно образомъ докажется, что до послѣдняго члена $k\varrho^P$, такое разложеніе на сумму $\varrho^{P'} + \varrho^{P''}$, при допущенныхъ условіяхъ, должно имѣть мѣсто.

Теперь положимъ:

$$
(9)\qquad \left\{\begin{array}{l} \varrho^{P} \equiv p_1 \\ 2\varrho^{P} \equiv p_2 \\ 3\varrho^{P} \equiv p_3 \\ \cdots\cdots\cdots \\ k\varrho^{P} \equiv p_k \end{array}\right\} (\text{mod.}\ p).
$$

Изъ сказаннаго сей-часъ объ видѣ членовъ $2\varrho^{P}$, $3\varrho^{P}$, $\cdots k\varrho^{P}$, явствуетъ, что каждая изъ величинъ $p_2$, $p_3$, $\cdots p_k$ будетъ изображать количество вида: $\varrho^{3K+1}$; первое количество, то есть $p_1$, само по себѣ уже имѣетъ такой видъ; къ томужъ, мы видѣли выше, что всѣ члены ряда (8) разноостаточны между собою; слѣдовательно, величины $p_1$, $p_2$, $p_3$ $\cdots\cdots p_k$ будетъ не иное что́ изображать, какъ всѣ члены ряда: $\varrho^{P_1}$, $\varrho^{P_2}$, $\varrho^{P_3}$ $\cdots\cdots \varrho^{P_k}$, а посему будемъ имѣть

$$
p_1 + p_2 + p_3 + \cdots + p_k = \varrho^{P_1} + \varrho^{P_2} + \varrho^{P_3} + \cdots + \varrho^{P_k}.
$$

Сложивъ теперь всѣ сравненія (9), получимъ:

$$
(k+1)\,\frac{k}{2}\cdot\varrho^{P} \equiv \left\{\varrho^{P_1} + \varrho^{P_2} + \varrho^{P_3} + \cdots + \varrho^{P_k}\right\} (\text{mod.}\ p)
$$

Но сумма

$$
\varrho^{P_1} + \varrho^{P_2} + \varrho^{P_3} + \cdots\cdots + \varrho^{P_k} \equiv o\ (\text{mod.}\ p)\ ^{*})
$$

---

*) Справедливость сего сравненія доказывается слѣдующимъ образомъ:

Такъ какъ показатели

$$
P_1,\ P_2,\ P_3,\ \cdots\cdots P_k
$$

изображаютъ рядъ чиселъ

$$
1,\quad 4,\quad 7,\qquad p-3,
$$

то и будемъ имѣть

$$
\varrho^{P_1} + \varrho^{P_2} + \varrho^{P_3} + \cdots + \varrho^{P_k} = \varrho^{1} + \varrho^{4} + \varrho^{7} + \cdots + \varrho^{p-3};
$$

но

$$
\varrho^{1} + \varrho^{4} + \varrho^{7} + \cdots + \varrho^{p-3} = \varrho\,(1 + \varrho^{3} + \varrho^{6} + \cdots + \varrho^{p-4}) = \varrho\left(\frac{\varrho^{p-1}-1}{\varrho^{3}-1}\right).
$$

слѣдовательно

$$(k+1)\,\frac{k}{2}\cdot\varrho^{P}\equiv o\ (\mathrm{mod.}\,p).$$

Сіе послѣднее сравненіе не возможно, ибо множители $k+1$ и $\frac{k}{2}$ менѣе простаго числа $p$, а посему ихъ произведеніе не можетъ дѣлиться на $p$; третій же множитель $\varrho^{P}$, очевидно не дѣлится на $p$. И такъ, нельзя допустить предположеніе, что сумма $\varrho^{P'}+\varrho^{P''}$ исключительно имѣетъ видъ $\varrho^{3K+1}$; и какъ сверхъ того мы исключили видъ $\varrho^{3K}$, то и должно заключить, что упомянутая сумма, для одного или нѣсколькихъ значеній показателей $P'$ и $P''$, будетъ равноостаточна съ количествомъ вида $\varrho^{3K+2}$. Изобразивъ чрезъ $Q'$ сей показатель $3K+2$, окажется, что возможно удовлетворить сравненію

$$\varrho^{P'}+\varrho^{P''}\equiv\varrho^{Q'}\ (\mathrm{mod.}\ p). \qquad (10)$$

Возьмемъ теперь срав. (5), справедливость котораго была доказана выше. Положимъ, что частныя величины для $P$ и $Q$, удовлетворяющія сему сравненію, суть слѣдующія:

$$P=3l+1,\qquad Q=3m+2;$$

предположимъ также, что частныя значенія показателей $P'$, $P''$ и $Q'$, удовлетворяющія срав. (10), опредѣляются формулами

$$P'=3l'+1,\quad P''=3l''+1,\quad Q'=3m'+2.$$

Слѣдовательно, будемъ имѣть два сравненія справедливыя, именно:

$$\varrho^{3l+1}+\varrho^{3m+2}-1\equiv o\ (\mathrm{mod.}\,p)$$
$$\varrho^{3l'+1}+\varrho^{3l''+1}\equiv\varrho^{3m'+2}\ (\mathrm{mod.}\,p).$$

---

Числитель сей послѣдней дроби, $\varrho^{p-1}-1$ дѣлится на $p$, знаменатель же оной $\varrho^{3}-1$, по свойству первообразныхъ корней, не раздѣляется на $p$; слѣдовательно

$$\varrho\left(\frac{\varrho^{p-1}-1}{\varrho^{3}-1}\right)\equiv o\ (\mathrm{mod.}\,p),$$

а посему и сумма

$$\varrho^{P_1}+\varrho^{P_2}+\varrho^{P_3}+\cdots+\varrho^{P_k}\equiv o\ (\mathrm{mod.}\,p).$$

Помножая послѣднее сравненіе на $\varrho^{3(m-m')}$, получимъ:

$$\varrho^{3(l'+m-m')+1}+\varrho^{3(l''+m-m')}\equiv\varrho^{3m+2}\ (\mathrm{mod.}\,p);$$

подставляя сію величину для $\varrho^{3m+2}$ въ первое изъ приведенныхъ выше двухъ сравненій, будетъ:

$$\varrho^{3l+1}+\varrho^{3(l'+m-m')+1}\,\varrho^{3(l''+m-m')+1}-1\equiv o\ (\mathrm{mod.}\,p).$$

Сіе послѣднее сравненіе, возможность котораго теперь доказана, совершенно подобнаго вида съ срав. a). Дѣйствительно, стоитъ только взять

$$L=l,\quad M=l'+m-m',\quad N=l''+m-m'.$$

И такъ, сравненію a) всегда можно удовлетворить цѣлыми величинами для $L$, $M$ и $N$.

### Доказательство возможности сравненія (b).

Вопервыхъ замѣтимъ, что если бы можно было всегда удовлетворить сравненію:

(11) $$\varrho^{3M+2}+\varrho^{3N+2}-1\equiv o\ (\mathrm{mod.}\,p),$$

то теорема (1) для случая b) не требовала бы доказательства; ибо, срав. (1) разрѣшилось бы полагая $x\equiv o\ (\mathrm{mod.}\,p)$, а количества $y$ и $z$ опредѣлились бы посредствомъ величинъ $M$ и $N$, удовлетворяющихъ срав. (11).

Сохранимъ всѣ прежнія знакоположенія, и возьмемъ сравненіе

(12) $$\varrho^{Q}+X-1\equiv o\ (\mathrm{mod.}\,p).$$

Здѣсь $Q$ изображаетъ который нибудь изъ показателей въ ряду $Q_1$, $Q_2$, $Q_3$, .... $Q_k$, а количество $X$, число измѣняющееся вмѣстѣ съ $Q$, и удовлетворяющее сравненію (12).

Легко доказать, что будетъ по крайней мѣрѣ одна величина количества $X$, имѣющая видъ: $\varrho^{P}$, и удовлетворяющая срав. (12). Въ слѣдствіе чего заключаемъ о справедливости сравненія

(13) $$\varrho^{Q}+\varrho^{P}-1\equiv o\ (\mathrm{mod.}\,p).$$

Мы опускаемъ здѣсь доказательство сего предложенія, по причинѣ, что оное совершенно сходствуетъ съ тѣмъ, которое было приведено выше для сравненія (5).

За симъ докажется, какъ для срав. (6), что всегда можно удовлетворить слѣдующей остаточной формулѣ:

$$\varrho^{Q'} + \varrho^{Q''} \equiv \varrho^{P} \ (\mathrm{mod.}\, p);$$

подставляя же сію послѣднюю величину для $\varrho^P$ въ срав. (13), получимъ окончательно

$$\varrho^{Q} + \varrho^{Q'} + \varrho^{Q''} - 1 \equiv o \ (\mathrm{mod.}\, p),$$

что именно имѣли въ виду доказать.

### Доказательство возможности сравненія (c).

По принятымъ нами знакоположеніямъ, разсматриваемый теперь случай приводится къ доказательству возможности сравненія:

$$\varrho^{P} + \varrho^{P'} + \varrho^{Q} - 1 \equiv o \ (\mathrm{mod.}\, p).$$

Если бы можно было удовлетворить которому нибудь изъ двухъ сравненій

(14) $$\varrho^{P} + \varrho^{P'} - 1 \equiv o \ (\mathrm{mod.}\, p)$$

(15) $$\varrho^{P} + \varrho^{Q} - 1 \equiv o \ (\mathrm{mod.}\, p),$$

то и сравненіе (1), въ настоящемъ случаѣ, также бы удовлетворялось. Дѣйствительно, если бы напримѣръ срав. (14) имѣло мѣсто, то стоило бы положить $z \equiv o \ (\mathrm{mod.}\, p)$; если же (15) состоится, то будетъ $y \equiv o \ (\mathrm{mod.}\, p)$. Въ первомъ предположеніи, показатели $P$ и $P'$ служили бы для опредѣленія $x$ и $y$, а во второмъ, $x$ и $z$ опредѣлились бы посредствомъ $P$ и $Q$.

Но мы доказали, разсматривая случай a), что если срав. (14) не имѣетъ мѣста, то сравненію (15) всегда можно будетъ удовлетворить. Слѣдовательно, если срав. (1) относится къ виду c), то не только оное возможно, но сверхъ того видимъ, что которая нибудь изъ неизвѣстныхъ $x$, $y$, $z$ будетъ дѣлиться на $p$.

Доказательство возможности сравненія (d).

Справедливость сего сравненія будетъ доказана, когда покажемъ, что которое нибудь изъ двухъ слѣдующихъ:

(16) $$\varrho^{Q}+\varrho^{Q'}-1\equiv o \pmod{p}$$

(17) $$\varrho^{Q}+\varrho^{P}-1\equiv o \pmod{p}$$

необходимо состоится. Но, доказывая справедливость срав. b) мы видѣли, что если срав. (16) не имѣетъ мѣста, то срав. (17) будетъ всегда возможно. Слѣдовательно, всегда возможно удовлетворить срав. d). и сверхъ того, очевидно, что одна изъ величинъ $x, y, z$ будетъ дѣлиться на $p$.

И такъ, справедливость срав. (1) для простыхъ чиселъ вида $3k+1$ теперь вполнѣ доказана. Сверхъ того, приведенный разборъ доставляетъ средство для разрѣшенія срав. (1), то есть, для опредѣленія по крайней мѣрѣ одной системы цѣлыхъ величинъ $x$, $y$ и $z$, удовлетворяющихъ упомянутому сравненію (1). Приведемъ примѣръ для бо́льшей ясности.

Дана остаточная формула

(18) $$2x^3+5y^3+5z^3-6\equiv o \pmod{7};$$

надобно опредѣлить цѣлыя величины для $x, y, z$, удовлетворяющія оной.

Число 7 есть *число простое* вида $3k+1$, и имѣетъ два первообразныхъ корня, именно: 3 и 5; возьмемъ меньшій изъ нихъ, и положимъ въ слѣдствіе сего $\varrho=3$; потомъ составимъ сравненія:

(19) $$\left.\begin{array}{l}\varrho^1\equiv 3\\ \varrho^2\equiv 2\\ \varrho^3\equiv 6\\ \varrho^4\equiv 4\\ \varrho^5\equiv 5\end{array}\right\}\pmod{7}.$$

Предполагая

$$x\equiv\varrho^{\lambda} \pmod{7},\quad y\equiv\varrho^{\mu} \pmod{7},\quad z\equiv\varrho^{\nu} \pmod{7},$$

и наблюдая, что въ настоящемъ случаѣ

$$2 \equiv \varrho^2 \,(\mathrm{mod.}\,7),\quad 5 \equiv \varrho^5 \,(\mathrm{mod.}\,7),\quad 6 \equiv \varrho^3 \,(\mathrm{mod.}\,7),$$

увидимъ, что остаточная формула (18) обратится въ слѣдующую:

$$\varrho^{3\lambda+2} + \varrho^{3\mu+5} + \varrho^{3\nu+5} - \varrho^3 \equiv o \,(\mathrm{mod.}\,7),$$

или, по раздѣленіи на $\varrho^3$,

$$(20)\qquad \varrho^{3(\lambda-1)+2} + \varrho^{3\mu+2} + \varrho^{3\nu+2} - 1 \equiv o \,(\mathrm{mod.}\,7).$$

Сіе послѣднее сравненіе очевидно относится къ случаю b); слѣдовательно, прежде всего надлежитъ разсмотрѣть, не возможно ли удовлетворить сравненію

$$\varrho^{3M+2} + \varrho^{3N+2} - 1 \equiv o \,(\mathrm{mod.}\,7).$$

Соображеніе 2-й и 5-й изъ формулъ (19), показываетъ неразрѣшимость сего сравненія. Посему ищемъ величины для $Q$ и $P$, $Q'$ и $Q''$, удовлетворяющія формуламъ

$$\varrho^{Q} + \varrho^{P} - 1 \equiv o \,(\mathrm{mod.}\,7)$$
$$\varrho^{Q'} + \varrho^{Q''} \equiv \varrho^{P} \,(\mathrm{mod.}\,7),$$

которыя, какъ то выше было доказано, всегда возможны, въ томъ предположеніи, что срав. (11) не имѣетъ мѣста.

Одного взгляда на срав. (19) достаточно, чтобы составить слѣдующія два сравненія:

$$\varrho^{5} + \varrho^{1} - 1 \equiv o \,(\mathrm{mod.}\,7)$$
$$\varrho^{5} + \varrho^{5} \equiv \varrho^{1} \,(\mathrm{mod.}\,7),$$

откуда выводимъ:

$$\varrho^{5} + \varrho^{5} + \varrho^{5} - 1 \equiv o \,(\mathrm{mod.}\,7).$$

Сравнивая сію послѣднюю остаточную формулу съ (20), получимъ

$$3(\lambda-1)+2 = 5,\quad 3\mu+2 = 5,\quad 3\nu+2 = 5;$$

слѣдовательно

$$\lambda = 2,\qquad \mu = 1,\qquad \nu = 1,$$

и наконецъ

$$x \equiv \varrho^2 \,(\mathrm{mod.}\,7),\quad y \equiv \varrho^1 \,(\mathrm{mod.}\,7),\quad z \equiv \varrho^1 \,(\mathrm{mod.}\,7).$$

или

$$x \equiv 2 \,(\mathrm{mod.}\,7),\quad y \equiv 3 \,(\mathrm{mod.}\,7),\quad z \equiv 3 \,(\mathrm{mod.}\,7).$$

И такъ, между прочими предположеніями, можно принять

$$x = 2, \quad y = 3, \quad z = 3.$$

Дѣйствительно, сими величинами удовлетворяемъ срав. (18), и окажется что

$$2 \cdot 2^3 + 5 \cdot 3^3 + 5 \cdot 3^3 - 6 = 280 = 7 \cdot 40 \equiv o \; (\text{mod.}\, 7).$$

## 2$^{\text{ой}}$ СЛУЧАЙ. ($p = 3k + 2$).

Надобно доказать возможность остаточной формулы

(21) $$Ax^3 + By^3 + Cz^3 - D \equiv o \; (\text{mod.}\, p),$$

когда $p = 3k + 2$.

Сей случай представляетъ ту примѣчательность, что всегда можно будетъ удовлетворить предложенному сравненію, полагая, что двѣ изъ трехъ неизвѣстныхъ величинъ $x, y, z$, напримѣръ $x$ и $y$, дѣлятся на $p$. Или, иначе, можно будетъ всегда удовлетворить сравненію

(22) $$Cz^3 - D \equiv o \; (\text{mod.}\, p).$$

Изобразимъ чрезъ $\varrho$, какъ въ 1-мъ случаѣ, одинъ изъ первообразныхъ корней простаго числа $p$. Потомъ положимъ:

$$C \equiv \varrho^\gamma \; (\text{mod.}\, p), \quad D \equiv \varrho^\delta \; (\text{mod.}\, p), \quad z \equiv \varrho^\nu \; (\text{mod.}\, p).$$

Величины $\gamma$ и $\delta$ будутъ извѣстныя, а количество $\nu$ неизвѣстное. Срав. (22) приметъ видъ

$$\varrho^\gamma \cdot \varrho^{3\nu} - \varrho^\delta \equiv o \; (\text{mod.}\, p)$$

или

$$\varrho^{3\nu + \gamma - \delta} - 1 \equiv o \; (\text{mod.}\, p).$$

Разсмотримъ сіе послѣднее сравненіе въ трехъ различныхъ видахъ, въ которыхъ оное можетъ представиться, а именно: 1-й, когда $\gamma - \delta = 3n + 1$; 2-й, когда $\gamma - \delta = 3n + 2$; 3-й, когда $\gamma - \delta = 3n$. Докажемъ отдѣльно возможность каждаго изъ трехъ сравненій, происходящихъ отъ сего различія. Оныя будутъ:

$$(23)\qquad \varrho^{3(\nu+n)+1}-1\equiv o\ (\text{mod.}\,p)$$
$$(24)\qquad \varrho^{3(\nu+n)+2}-1\equiv o\ (\text{mod.}\,p)$$
$$(25)\qquad \varrho^{3(\nu+n)}-1\equiv o\ (\text{mod.}\,p).$$

Очевидно, что первому изъ сихъ трехъ сравненій удовлетворяемъ полагая

$$3(\nu+n)+1=p-1=3k+1,$$

откуда выводимъ

$$\nu=k-n,$$

и слѣдовательно

$$z\equiv\varrho^{k-n}\ (\text{mod.}\,p).$$

Если $n>k$, то въ такомъ случаѣ можно будетъ, какъ извѣстно, придать къ показателю $k-n$, величину $p-1=3k+1$, и тогда получимъ

$$z\equiv\varrho^{4k+1-n}\ (\text{mod.}\,p).$$

Положимъ напримѣръ, что дано сравненіе

$$7z^3-11\equiv o\ (\text{mod.}\ 17).$$

Наименьшій первообразный корень числа 17, есть 3; полагая $\varrho=3$, составимъ слѣдующую таблицу:

$$\left.\begin{matrix}\varrho^1\equiv3\ , & \varrho^2\equiv9\ , & \varrho^3\equiv10, & \varrho^4\equiv13, & \varrho^5\equiv5\\ \varrho^6\equiv15, & \varrho^7\equiv11, & \varrho^8\equiv16, & \varrho^9\equiv14, & \varrho^{10}\equiv8\\ \varrho^{11}\equiv7\ , & \varrho^{12}\equiv4\ , & \varrho^{13}\equiv12, & \varrho^{14}\equiv2\ , & \varrho^{15}\equiv6\end{matrix}\right\}(\text{mod.}\ 17)$$

И такъ

$$7\equiv\varrho^{11}\ (\text{mod.}\ 17),\quad 11\equiv\varrho^7\ (\text{mod.}\ 17).$$

Слѣдовательно, данное сравненіе приметъ видъ,

$$\varrho^{3(\nu+1)+1}-1\equiv o\ (\text{mod.}\ 17).$$

Сличая сіе сравненіе съ (23) видимъ, что $n=1$; но какъ $17=3\cdot5+2$, то будетъ $k=5$, а посему $\nu=5-1=4$, и наконецъ

$$z\equiv\varrho^4\ (\text{mod.}\ 17)\equiv13\ (\text{mod.}\ 17).$$

Можно взять просто $z=13$; и дѣйствительно, сія величина удовлетворяетъ предложенному сравненію, ибо имѣемъ:

$$7\cdot13^3-11=15368=17\cdot904\equiv o\ (\text{mod.}\ 17).$$

Сравненія (24) и (25), какъ сей-часъ будетъ доказано, весьма легко могутъ быть приведены къ виду (23), а посему и не требуютъ дальнѣйшаго изслѣдованія.

Сравненіе (24) приводится къ виду (23), вычитая изъ показателя $3(\nu+n)+2$ количество $p-1=3k+1$, что не нарушаетъ равноостаточности. Такимъ образомъ получимъ:

$$\varrho^{3(\nu+n-k)+1}-1\equiv o \pmod{p};$$

потомъ, полагая $3(\nu+n-k)+1=3k+1$, найдемъ

$$\nu=2k-n.$$

*Примѣръ.* Дано сравненіе

$$6z^3-13\equiv o \pmod{17};$$

имѣемъ:

$$6\equiv\varrho^{15} \pmod{17},\quad 13\equiv\varrho^4 \pmod{17};$$

слѣдовательно $n=3$; и какъ сверхъ того $k=5$, то и получимъ

$$\nu=2\cdot5-3=7.$$

Посему

$$z\equiv\varrho^7 \pmod{17}\equiv 11 \pmod{17}.$$

Можно взять $z=11$; подстановленіе сей величины въ данное сравненіе, доставляетъ:

$$6\cdot11^3-13=7973=17.469\equiv o \pmod{17}.$$

Сравненіе (25) приводится къ виду (23), вычитая изъ показателя $3(\nu+n)$ количество $2(p-1)=2(3k+1)$; такимъ образомъ получимъ:

$$\varrho^{3(\nu+n-2k-1)+1}-1\equiv o \pmod{p};$$

потомъ, полагая

$$3(\nu+n-2k-1)+1=3k+1,$$

выведемъ

$$\nu=3k+1-n;$$

слѣдовательно

$$z\equiv\varrho^{3k+1-n} \pmod{p}.$$

*Примѣръ.* Дано сравненіе

$$16z^3-9\equiv o \pmod{17}.$$

Имѣемъ:

$$16\equiv\varrho^8 \pmod{17},\quad 9\equiv\varrho^2 \pmod{17};$$

посему $n = 2$, а

$$\nu = 3 \cdot 5 + 1 - 2 = 14.$$

И такъ

$$z \equiv \varrho^{14} \pmod{17} \equiv 2 \pmod{17}.$$

Можно просто взять $z = 2$; подставляя сію величину въ данное сравненіе, найдемъ:

$$16 \cdot 2^3 - 9 = 119 = 17 \cdot 7 \equiv o \pmod{17}.$$

Замѣтимъ сверхъ того, что срав. (21) можно будетъ всегда удовлетворить такъ, что ни одна изъ величинъ $x$, $y$, $z$ не будетъ дѣлиться на $p$. Ограничимся рѣшеніемъ частнаго случая, потому что общій случай рѣшается совершенно подобнымъ образомъ.

Возьмемъ сравненіе

$$9x^3 + 5y^3 + 7z^3 - 12 \equiv o \pmod{17};$$

будемъ имѣть

$$9 \equiv \varrho^2 \pmod{17}, \quad 5 \equiv \varrho^5 \pmod{17}, \quad 7 \equiv \varrho^{11} \pmod{17}.$$

Сверхъ того, положимъ

$$x \equiv \varrho^\lambda \pmod{17}, \quad y \equiv \varrho^\mu \pmod{17}, \quad z \equiv \varrho^\nu \pmod{17};$$

данное сравненіе обратится въ слѣдующее:

$$(26) \qquad \varrho^{3\lambda+2} + \varrho^{3(\mu+1)+2} + \varrho^{3(\nu+3)+2} - 12 \equiv o \pmod{17}.$$

Теперь возьмемъ три числа такія, чтобы ихъ сумма, безъ 12, дѣлилась на́-цѣло на 17. Сіе можно будетъ сдѣлать многоразличными образами; выберемъ, напримѣръ, три числа: 16, 10, 3, и составимъ сравненіе:

$$16 + 10 + 3 - 12 = 17 \equiv o \pmod{17}.$$

Но такъ какъ

$$16 \equiv \varrho^8 \pmod{17}, \quad 10 \equiv \varrho^3 \pmod{17}, \quad 3 \equiv \varrho^1 \pmod{17},$$

то и получимъ

$$\varrho^8 + \varrho^3 + \varrho^1 - 12 \equiv o \pmod{17}.$$

Сличая сіе сравненіе съ (26), замѣчаемъ, что первые ихъ члены, по виду показателей, подобны между собою; и дѣйствительно, полагая $3\lambda + 2 = 8$, выводимъ $\lambda = 2$. Чтобы вторые ихъ члены были подобны, стоитъ только придать къ показателю 3, количество $2(p-1) = 32$; такимъ

образомъ получимъ $3(\mu+1)+2=35$, откуда $\mu=10$; наконецъ, чтобы членъ $\varrho^{3(\nu+3)+2}$ былъ подобенъ члену $\varrho^1$, стоитъ только къ показателю 1, придать количество $p-1=16$, послѣ чего можно будетъ положить $3(\nu+3)+2=17$, и слѣдовательно $\nu=2$. И такъ

$$x \equiv \varrho^2 \ (\text{mod. } 17) \equiv 9 \ (\text{mod. } 17)$$
$$y \equiv \varrho^{10} (\text{mod. } 17) \equiv 8 \ (\text{mod. } 17)$$
$$z \equiv \varrho^2 \ (\text{mod. } 17) \equiv 9 \ (\text{mod. } 17).$$

Можно будетъ взять

$$x=9, \quad y=8, \quad z=9.$$

И въ самомъ дѣлѣ, окажется что

$$9\cdot 9^3+5\cdot 8^3+7\cdot 9^3-12=14212=17\cdot 836\equiv o \ (\text{mod. } 17).$$

Изъ сего примѣра видимъ, какимъ образомъ должно поступать вообще при рѣшеніи срав. (21) въ томъ предположеніи, что ни одна изъ величинъ $x$, $y$, $z$ не дѣлится на $p$.

Остается еще показать справедливость теоремы, выражаемой срав. (1) для $p=2$ и $p=3$. Здѣсь можно сдѣлать то же замѣчаніе, которое относилось къ случаю: $p=3k+2$, а именно: не только возможно удовлетворить сравненіямъ

$$Ax^3+By^3+Cz^3-D\equiv o \ (\text{mod. } 2)$$
$$A'x'^3+B'y'^3+C'z'^3-D'\equiv o \ (\text{mod. } 3),$$

но даже и простѣйшимъ, то есть:

$$Cz^3-D\equiv o \ (\text{mod. } 2)$$
$$C'z'^3-D'\equiv o \ (\text{mod. } 3).$$

Легко усмотрѣть, что сіи два сравненія будутъ всегда возможны; дѣйствительно, въ первомъ изъ оныхъ всегда можно положить $C=1$, $D=1$; слѣдовательно, всѣ нечетныя величины для $z$ будутъ удовлетворять оному. Во второмъ сравненіи можно сдѣлать четыре предположенія: 1$^e$. $C'=1$, $D'=2$; въ такомъ случаѣ, изобразивъ чрез $E$ произвольное цѣлое число, найдемъ что $z'=2+3E$. 2$^e$. $C'=2$, $D'=1$;

найдемъ $z' = 1 + 3E$. 3$^e$. $C' = 1$, $D' = 1$; опять будетъ $z' = 1 + 3E$. 4$^e$. $C' = 2$, $D' = 2$; окажется также, что $z' = 1 + 3E$. Отрицательныхъ же величинъ $C$ и $D$, $C'$ и $D'$. нѣтъ надобности принимать въ разсмотрѣніе, ибо, какъ мы замѣтили выше, оныя всегда могутъ быть приведены къ положительнымъ.

Вотъ полное доказательство теоремы, выражаемой сравненіемъ (1). Соображеніе всего сказаннаго, приводитъ насъ къ тому заключенію, что нетолько всегда возможно удовлетворить формулѣ

$$Ax^3 + By^3 + Cz^3 - D \equiv o \ (\text{mod.}\, p),$$

но, въ бо́льшей части случаевъ, можно будетъ удовлетворить даже простѣйшимъ формуламъ, а именно, одной изъ двухъ

$$Cz^3 - D \equiv o \ (\text{mod.}\, p)$$

$$By^3 + Cz^3 - D \equiv o \ (\text{mod.}\, p).$$

Въ заключеніе скажемъ, что доказанная нами теорема для сравненій третьей степени, можетъ быть распространена и на сравненія высшихъ степеней; изслѣдованія, относящіяся къ сему послѣднему предмету, мы намѣрены изложить въ другомъ Разсужденіи, которое будетъ служить продолженіемъ предлагаемыхъ здѣсь изысканій.

# SUR L'EXISTENCE
## D'UN
# OXIDE COBALTOSO-COBALTIQUE,

PAR

M. HESS.

(Lu le 27 Juin 1832.)

Il existe plusieurs méthodes pour extraire l'oxide cobaltique des minéraux cobaltifères, et en particulier du *cobalt gris* des minéralogistes. Celles qui mènent le plus directement au but sont celle de M. Wöhler, et celle qui fut proposée en dernier lieu par M. Quesneville. Celle de M. Wöhler est assez connue pour qu'il suffise de la nommer; si on est obligé d'opérer sur des quantités assez considérables, elle mérite la préférence sur toute autre, vu la facilité avec laquelle on parvient à séparer l'arsénic. Elle exige pourtant des précautions, en ce que, si la fusion a été opérée à un degré de chaleur un peu trop fort, on a de la peine ensuite à enlever tout le sulfure alcalin par le lavage.

La méthode de M. Quesneville consiste à dissoudre le minéral dans l'acide nitrique, et à évaporer la dissolution pour chasser l'excès d'acide. On dissout ensuite la masse saline dans l'eau, et on ajoute du carbonate potassique, tant qu'il produit un précipité d'arséniate ferrique. Après avoir filtré le liquide, on y ajoute une dissolution saturée et bouillante de suroxalate potassique, tant que son addition produit encore un précipité. Ce précipité est de l'oxalate cobaltique; il est exempt d'arsé-

nic, et ne contient, selon M. Quesneville, qu'une trace de nickel qu'on peut extraire par l'ammoniaque.

C'est de cette méthode, que je me suis servi pour préparer l'oxide cobaltique pour mes expériences; elle mérite la préférence toutes les fois qu'il ne s'agit que de préparer de petites quantités pour des recherches analytiques, vu la promptitude avec laquelle elle mène au but. Il ne faut pourtant pas se fier à la pureté de l'oxalate que l'on obtient de cette manière; il est vrai que le sel obtenu ne contient point d'arsénic; mais si le minérai contenait du cuivre, ce qui arrive souvent, la majeure partie s'en retrouverait dans l'oxalate. Je ne saurais dire s'il se forme un sel double d'oxalate cuprique et cobaltique, ou si le précipité est simplement un mélange; dans tous les cas l'oxalate cobaltique prédomine. Si après avoir bien lavé ce sel on le décompose par la chaleur sans le contact de l'air, le cobalt ainsi obtenu se dissout sans résidu dans l'acide hydrochlorique. La dissolution un peu acide est précipitée en brun par le sulfide hydrique. Ce précipité est du sulfure de cuivre qui, dans mes expériences, ne contenait point d'arsénic.

C'est d'une dissolution ainsi purgée de toute matière étrangère, et après m'être assuré de l'absence du nickel, que je me suis servi pour préparer de l'oxalate de cobalt, en la précipitant de nouveau par le suroxalate potassique.

Les auteurs indiquent que l'oxalate cobaltique est transformé par une légère calcination en contact avec l'air, d'abord en cobalt réduit, puis en suroxide cobaltique. En effet, le cobalt commence par se réduire et brûle ensuite comme de l'amadou en produisant un oxide noir que l'on a pris pour le suroxide. Cette poudre noire n'est que difficilement attaquée par les acides sulfurique et nitrique; l'acide nitrique qui contient de l'acide nitreux le dissout plus facilement. L'acide hydrochlorique la dissout avec dégagement de chlore; l'ammoniaque étendu n'exerce aucune action sur elle. Tous ces caractères ont été attribués au suroxide cobaltique, cependant préparé de la manière indiquée il n'en a point la composition. J'ai tâché de déterminer sa composition en le réduisant au moyen de la chaleur dans un courant de gaz hydrogène. L'oxide se trouvait dans une boule

de verre munie de deux tubes. L'hydrogène était dégagé avec du fer et de l'acide sulfurique, et il passait à travers une dissolution de potasse caustique. La quantité de l'oxide employée dans toutes les expériences suivantes variait entre 1 et 2,5 grammes.

I$^{ère}$ expérience. L'oxide préparé par la calcination de l'oxalate cobaltique sur 100 d'oxide, 25,534 d'oxigène.

II$^{ème}$ expérience. Oxide préparé de même sur 100 d'oxide, 25,929 d'oxigène.

On admet d'après les expériences de Rothof, que le suroxide est composé de 71,1 de métal et de 28,9 d'oxigène. On dit aussi qu'à une chaleur rouge cerise, il dégage de l'oxigène. Il était donc naturel de supposer que la quantité d'oxigène que j'avais obtenue, provenait de ce qu'une partie du suroxide avait été décomposée par la chaleur. Or, dans ce cas, les produits devaient varier considérablement selon la chaleur employée à la calcination. Je calcinai donc de l'oxalate cobaltique, premièrement à la lampe à l'esprit de vin, et ensuite dans le mouffle d'un fourneau à essayer.

III$^{ème}$ expér. Oxide calciné sous le mouffle sur 100 d'oxide 25,447 d'oxigène.

IV$^{ème}$ expér. Oxide traité de même sur 100 d'oxide 25,670 d'oxigène.

On voit donc que la décomposition ne dépasse pas certaines limites. Cependant la quantité d'oxigène me paraissant trop petite, j'attribuai ces résultats à une faute quelconque. J'observai d'abord que le cobalt réduit, s'enflamme très facilement à l'air, si la chaleur n'a pas été poussée assez haut après sa réduction, et si le métal n'a pas été complètement refroidi dans le gaz hydrogène. Même en évitant cette source d'erreur, il est difficile d'empêcher qu'une petite portion d'hydrogène ne reste dans les pores du métal, et ne forme de l'eau par le contact de l'air. La boule de verre contenant le produit de la dernière expérience, ayant été chauffée encore une fois dans le gaz hydrogène à une température assez élevée pour faire essuyer un commencement de fusion au verre très dur dont l'appareil était confectionné, donna au lieu des 25,67 d'oxigène obtenus en premier lieu, 26,451.

Pour être complètement à l'abri de cette source d'erreur, j'ai rétréci les tubes de verre des deux côtés à une certaine distance de la boule; et la réduction étant achevée, l'appareil refroidi, la partie amincie du tube fut scellée à la lampe. Le métal était donc pesé dans une atmosphère d'hydrogène. Après la pesée, on détermina la capacité de l'appareil en le remplissant d'eau, et on corrigea le résultat de la pesée pour la quantité dont l'appareil rempli d'hydrogène était plus léger que s'il avait contenu de l'air.

Je ne me suis jamais servi d'un oxide provenant de la même préparation pour faire deux analyses, mais j'ai chaque fois préparé l'oxide de nouveau. Pour éviter que le suroxide employé ne contînt point de l'oxide en mélange, je le faisais digérer avec de l'acide nitrique étendu, ou avec de l'acide hydrochlorique ou avec de l'acide sulfurique; souvent je portai la température jusqu'à l'ébullition. Une partie du suroxide était décomposé et dissout dans l'acide, le reste était soigneusement lavé, séché et puis introduit dans le tube pour être réduit.

V$^{ème}$ expér. Suroxide préparé en décomposant du nitrate cobaltique par la chaleur sur 100 d'oxide, oxigène = 26,367.

VI$^{ème}$ expér. Suroxide provenant de la calcination de l'hydrate d'oxide. 100 d'oxide, oxigène = 26,451.

VII$^{ème}$ expér. Suroxide préparé de la même manière sur 100 d'oxide, oxigène = 26,27.

VIII$^{ème}$ expér. Suroxide provenant de la calcination de l'oxalate sur 100 parties, oxigène = 26,51.

IX$^{ème}$ expér. Idem oxigène = 26,641.

X$^{ème}$ expér. Idem oxigène = 26,338.

Comme les premières des ces expériences me montrèrent que la substance que j'analisais contenait décidément moins d'oxigène qu'on n'en admet dans le suroxide, je fis passer dans les quatre dernières expériences un courant de gaz oxigène par la boule de verre contenant la substance en question, je chauffai au rouge

et je laissai refroidir l'appareil dans le gaz oxigène. Néanmoins la quantité d'oxigène obtenue n'a pas été plus considérable. Les six dernières expériences avaient donc donné

26, 367,
26, 451,
26, 270,
26, 310,
26, 641,
26, 338, dont la moyenne est 26, 43. Dans l'oxide que je viens d'analyser, 100 parties de métal sont combinées avec 35,93 d'oxigène. Dans l'oxide cobaltique $\dot{C}o$ 100 de métal se trouvent combinées avec 27,097 d'oxigène. Mais

$$3 : 4 = 27,097 : 36,12.$$

Il résulte de là que l'oxigène de l'oxide cobaltique $\dot{C}o$, se rapporte à celui de l'oxide analysé, comme 3 : 4. La formule qui paraît la plus naturelle pour représenter la composition de l'oxide analysé est $\dot{C}o + \dddot{C}o$, c'est-à-dire que c'était de l'oxide cobaltoso-cobaltique; composition qui se forme chaque fois que l'on soumet à une légère calcination en contact avec l'air, soit l'oxalate cobaltique, soit l'hydrate d'oxide cobaltique, soit enfin le nitrate du même métal. Par tous ces procédés on n'obtient point le suroxide.

Le calcul donne pour la composition de l'oxide cobaltoso-cobaltique:

| | |
|---|---|
| cobalt | 73, 46 |
| oxigène | 26, 54 |
| | 100, 00. |

Il paraît cependant qu'il est très difficile, sinon impossible, d'obtenir l'oxide cobaltoso-cobaltique d'une composition tout-à-fait constante. Je crus d'abord que les différences des résultats dépendaient de la manipulation. Ne trouvant plus d'autre source d'erreur, j'essayai de réduire de l'oxide cuivrique par la même méthode; j'obtins un nombre si proche de celui qui est admis, que j'abandonnai cette idée. Espérant

toutefois atteindre un plus grand degré de précision, je fis encore trois expériences. Je me servis pour la première de suroxide cobaltique précipité d'une dissolution de chlorure par du chlorite calcique; après avoir été recueilli, il fut bien lavé d'abord dans de l'eau un peu acidifiée par l'acide nitrique, et puis dans de l'eau pure; enfin je le soumis à une légère calcination. Le résultat fut 26,719 d'oxigène pour cent. Toutefois je suppose que le suroxide n'avait pas été assez calciné.

La seconde expérience qui fut faite sur de l'oxide cobaltoso-cobaltique provenant de la décomposition de l'oxalate, donna pour résultat 26,567 d'oxigène pour cent.

La troisième fut faite avec le produit de la calcination du nitrate, elle donna 26,415;

de ces trois expériences 26,719,
26,367,
26,415, la moyenne est 26,567.

Dans le dessein d'obtenir du suroxide cobaltique pur, je le précipitai d'une dissolution de chlorure par du chlorite calcique. Le suroxide obtenu de cette manière, forme un précipité brun foncé, qui devient noir par la dessication. Ne voulant point le soumettre à l'action de la chaleur, je le fis sécher sous une cloche de verre sur de l'acide sulfurique. Lorsque je crus le suroxide tout-à-fait sec, il s'était considérablement contracté, sa cassure avait l'éclat du verre; je le réduisis en poudre et l'exposai encore pendant une semaine à la dessication sur l'acide sulfurique. Lorsque je voulus ensuite en opérer la réduction par le gaz hydrogène, il se dégagea une grande quantité d'eau à la première action de la chaleur.

Le suroxide cobaltique que l'on obtient, en précipitant une dissolution de chlorure cobaltique par un chlorite, ne peut point être débarrassé de l'eau qu'il contient, sans se décomposer, du moins par la chaleur.

Je préparai une nouvelle quantité d'hydrate de suroxide, et je le séchai à une température moindre que celle de l'ébullition de l'eau. 3,94 grammes soumis à la calcination donnèrent 3,115 grammes d'oxide cobaltoso-cobaltique. Ceux-ci contiennent 0,8267 d'oxigène. Mais comme le suroxide cobaltique contient $\frac{1}{8}$ de plus

d'oxigène que l'oxide cobaltoso-cobaltique, 3,115 de ce dernier forment avec 0,1039 d'oxigène 3,2189 de suroxide cobaltique. L'hydrate de suroxide cobaltique qui avait été soumis à la calcination, était donc composé de

| | |
|---|---|
| suroxide cobaltique | 81, 7 |
| Eau . . . . | 18, 3 |
| | 100, 0 |

Les 81, 7 de suroxide contiennent 23, 61 d'oxigène, et 18,3 d'eau en contiennent 16,27. Il est donc clair que dans ce cas l'oxigène de l'eau était à celui du suroxide comme 2 : 3, ce qui donne la formule $\ddot{\overline{\mathrm{Co}}} + \dot{\mathrm{H}}^2$.

Je ne connais point de méthode pour obtenir le suroxide de cobalt à l'état isolé.

Le suroxide cobaltique ayant tant de tendence à se combiner, soit avec l'eau, soit avec l'oxide, il est je crois naturel de poser en question, si la dissolution brune ammoniacale que l'on obtient en traitant un sel cobaltique par l'ammoniaque caustique (en contact avec l'air), si cette dissolution, dis-je, que l'on sait contenir le cobalt à un degré d'oxidation supérieur à celui de l'oxide cobaltique, ne contient pas du suroxide cobaltique et non un acide particulier et plus oxigéné? Je ne tenterai point de décider la question, mais je rapporterai quelques circonstances qui me paraissent la justifier.

La dissolution brune peut être portée jusqu'à l'ébullition sans se décomposer; même si on l'étend d'eau, l'ébullition n'occasionne pas de dégagement de gaz comme on l'a prétendu. Si toutefois il se dégage quelque bulle, ce n'est que l'air qui se trouvait dans l'eau. Si on traite la dissolution par la potasse caustique, il ne se forme d'abord point de précipité, mais si on chauffe la liqueur jusqu'à l'ébullition, il y a décomposition et il se forme un précipité vert-sale ou brun qui paraît être de l'oxide cobaltoso-cobaltique ou un mélange d'hydrate d'oxide et de suroxide. Si l'on veut s'assurer que le peu de gaz que l'on voit se dégager n'est que de l'air, on n'a qu'à chauffer les deux dissolutions séparément, et les mêler lorsqu'elles ne dégagent plus d'air. Il y a alors décomposition comme auparavant, mais on ne voit pas une bulle de gaz se dégager.

On sait que l'oxide cobaltique se dissout en bleu dans de l'hydrate potassique en fusion. Si on jette de l'oxide cobaltoso-cobaltique dans de l'hydrate potassique en fusion, il s'y dissout; la dissolution est d'un brun foncé, mais elle est transparente, ce dont on peut s'assurer si l'on opère dans un creuset en argent bien décassé et que la couche du liquide ne soit pas trop épaisse. Il paraît donc que le suroxide se combine aussi avec l'alcali. Il n'est point vraisemblable que dans ce cas il se forme de l'acide cobaltique, sans quoi elle s'en saturerait tandis que la quantité de suroxide qu'elle dissout n'est que peu considérable. — Dans cette expérience les creusets d'argent sont fortement attaqués.

---

Si on calcine un mélange de chlorure de cobalt et de carbonate sodique dans un creuset de platine, on obtient, en enlevant le sel par l'eau, une poudre brune. Frottée par un corps dur, elle prend de l'éclat justement comme le minéral connu sous le nom de cobalt terreux (*Erd-Kobalt*), auquel elle ressemble par sa couleur. Ce n'est point de l'oxide cobaltique, mais de l'oxide cobaltoso-cobaltique.

# VEREINIGUNG

## DER BEIDEN, IN DEN OSTSEEPROVINZEN UND IN LITTHAUEN BEARBEITETEN BOGEN DER

# RUSSISCHEN BREITENGRADMESSUNG,

VON

F. G. W. STRUVE.

---

(Gelesen d. 24. October 1832.)

Unabhängig von einander sind in Russland zwei Breiten-Gradmessungen vollendet worden. Die grossen trigonometrischen Operationen, die von Seiten des Kaiserlichen Generalstaabes in den Jahren 1816 bis 1827 durch S^e. Excellenz den Herrn Generalmajor und Ritter von TENNER ausgeführt sind, veranlassten diesen die Dreiecksreihe zwischen *Bristen* in Curland und *Belin* im Gouvernement Grodno, durch genaue astronomische Beobachtungen, auf den Endpuncten und in der Mitte, zur Bestimmung des Werthes des unter dem Meridiane von *Nemesch* in der Nähe von *Wilna* belegenen Bogens zwischen 52° 2′ und 56° 35′, zu benutzen. Die andere Messung ist die von der Universität Dorpat veranstaltete Messung des zwischen *Jacobstadt* in Curland und der Insel *Hochland* im Finnischen Meerbusen von 56° 30′ bis 60° 5′ unter dem Meridiane der Dorpater Sternwarte belegenen Bogens. Von dieser letzten Arbeit ist eine ausführliche Beschreibung (Dorpat 1831) im Druck erschienen. Ein zweites Werk ist von Herrn Generalmajor von *Tenner* über seine

grossen Messungen ausgearbeitet worden, durch dessen Bekanntmachung durch den Druck derselbe hoffentlich bald das astronomische Publicum erfreuen wird.

Schon im Januar des Jahres 1828 kam der Herr Generalmajor von *Tenner* aus Wilna nach Dorpat, um sich mit mir über die Vereinigung der beiden Gradmessungen zu besprechen. Der Unterschied der Meridiane von *Nemesch* und *Dorpat* beträgt nahezu 1° 26′, aber die beiden Messungen nähern sich so sehr, dass der vorletzte Dreieckspunct nach Süden, *Daborskalns*, meiner Messung, nicht 20 Werst entfernt vom Nordende des Tennerschen Netzes *Bristen* ist, und überdies *Bristen* und *Daborskalns* von einander sichtbar sind. Unter diesen Umständen war die Vereinigung in geodätischer Hinsicht sehr leicht.

Bei Gelegenheit der Verabredung der zur Vereinigung unserer beiden Arbeiten erforderlichen Maassregeln, erhielt ich von Herrn von *Tenner* umständliche Auskunft über die unter seiner Leitung ausgeführten Operationen, wovon Folgendes ein Auszug ist, zu dessen leichterer Verständlichkeit eine Charte des vereinigten Dreiecksnetzes beiliegt, welches im Ganzen 95 Dreiecke umfasst, zu welchen noch 2 Nebendreiecke zur Bestimmung der Kirche von *Kreutzburg*, 14 Hülfsdreiecke auf *Hochland* und 6 zwischen *Halljall-Hohenkreutz* und dem Strande des Finnischen Meerbusens bei *Kunda* hinzukommen. Die Summe aller Dreiecke ist demnach 117. *Belin* und *Bristen* sind in dem Tennerschen Dreiecksnetze durch 55 Dreiecke von ausgezeichnet günstiger Form verbunden, in welchen die Winkel mit einem 16zölligen Troughtonschen Wiederholungskreise gemessen sind. Der Messung stellten sich in dem waldigen Litthauen zwar grosse Schwierigkeiten entgegen; aber Herr von *Tenner* wusste diese durch die Errichtung von Signalen, von 9 bis 18 Faden (zu 7 engl. Fuss) Höhe, zu überwinden, und verschaffte sich so die lehrreiche Ueberzeugung, dass dem kühnen Geodäten keine Gegend unübersteigbare Hindernisse entgegen stellt, wenn ihm alle erforderlichen Hülfsmittel zu Gebote stehen. Zwei Grundlinien, die eine bei *Osownitza* in der Nähe des Südpunctes, 10½ Werst lang, die andere bei *Ponedeli*, 11 Werst lang, ohnweit des Nordendes, wurden mit einem Messungsapparat aus eisernen Stangen mit beweglichen Zungen

nach *Borda's* Erfindung gemessen. Die südliche Basis ist durch die Dreiecke 1 und 2 mit einer der Hauptseiten des Dreiecks 3 verbunden, die nördliche Basis ist unmittelbar eine Seite des Dreiecks 51. Beide Grundlinien wurden durch eine eigene Beschirmung ganz im Schatten gemessen. Eine schöne Reihe von Versuchen gab die Ausdehnung der angewandten Messstangen durch die Wärme.

Zur Orientirung des Dreiecksnetzes war von Herrn von *Tenner* auf dem mittleren Standpuncte *Nemesch* ein kleines in St. Petersburg gearbeitetes Passageninstrument benutzt und die Seite *Nemesch-Meschkanzi* unmittelbar in den Meridian gelegt. Ein zweites Azimut war mittelst eines $3\frac{1}{2}$füssigen Passageninstruments von Ramsden am südlichen Endpuncte *Belin* bestimmt worden. Um die Amplituden zwischen den 3 Puncten *Belin*, *Nemesch* und *Bristen* zu bestimmen, wandte Herr von *Tenner* ausschliesslich Bessels Methode des Passageninstrumentes im ersten Verticale an, und benutzte zu dem Ende theils das 6füssige Mittagsrohr der Wilnaer Sternwarte an den beiden Endpuncten, theils in *Nemesch* ein 4füssiges von Dollond, welches der Sternwarte des Gymnasii illustris in Mitau gehörte. Mit diesen Instrumenten wurden dieselben Sterne in grosser Zahl an jedem der 3 Puncte beobachtet. Zur Reduction mussten dieser Sterne Declinationen gegeben sein. Für eine geringere Zahl fanden sich die mittleren Oerter in den Königsberger Beobachtungen, für die grössere mussten sie aus Piazzis Catalog genommen werden, und alle mussten mit den neuesten Elementen in die scheinbaren Oerter für die Zeiten der Beobachtung reducirt werden. Die Besselschen Sterne wurden von Herrn von *Tenner* zu einer definitiven Bestimmung der 3 Polhöhen angewandt. Die Vergleichung der von jedem Piazzischen Sterne gegebenen Polhöhen, mit den definitiven, musste einen dreifachen Werth der Verbesserung der Piazzischen Declination jedes Sterns geben, von denen das Mittel anzuwenden ist. Die Amplituden waren aus den Polhöhen abzuleiten, die auf den Besselschen und den corrigirten Piazzischen Declinationen beruhen.

Um die erwähnte Vereinigung in jeder Rücksicht zweckmässig auszuführen, wurde von uns damals folgende schriftliche Uebereinkunft geschlossen, von welcher eine Notiz in Schumachers Astronomischen Nachrichten N° 139 bekannt gemacht ist:

## *Uebereinkunft wegen der Arbeiten zur Vereinigung der beiden Gradmessungen in Russland.*

Zwischen S^r. Excellenz dem Herrn Generalmajor und Ritter von *Tenner*, der eine Breiten-Gradmessung zwischen den Parallelen von 52° 2′ und 56° 35′ in den Gouvernements von Grodno, Wilna und Curland ausgeführt, und dem Professor der Astronomie in Dorpat, Hofrath und Ritter W. *Struve*, der auf Veranstaltung der Universität Dorpat eine Breiten-Gradmessung zwischen den Parallelen von 56° 30′ und 60° 5′ von der Düna durch die Ostsee-Provinzen bis zur Insel Hochland vollendet, ist zur Vereinigung dieser beiden getrennten Arbeiten zu einer einzigen grössern Russischen Gradmessung, folgende Uebereinkunft, wegen der dazu erforderlichen Arbeiten getroffen worden.

S^e. Excellenz der Herr Generalmajor von *Tenner* übernimmt, die terrestrische Verbindung der beiden Messungen, indem er seine Dreiecke bis zu den Puncten *Kreutzburg* Schlossthurm, *Daborskalns* Signal, und *Sestukalns* Signal, die zur andern Messung gehörig sind, fortführen lässt.

Er überschickt, zweitens, entweder das Original oder eine genaue Copie des von ihm bei der Basismessung zum Grunde gelegten Sashén nach Dorpat, zur Vergleichung mit dem Längenmaasse der Sternwarte.

Der Professor *Struve* übernimmt die Beobachtung der von dem Herrn General von *Tenner* an den 3 Hauptpuncten zur Bestimmung der Polhöhe gebrauchten Sterne am Passageninstrument der Dorpater Sternwarte als Zenithsector, um dadurch die Amplituden zwischen den genannten Puncten und Dorpat auszumitteln. Er besorgt ferner die Bestimmung der geraden Aufsteigung aller von dem Herrn General zur Zeitbestimmung und zum Azimute angewandten Sterne, vermittelst der Meridianinstrumente der Dorpater Sternwarte. Dann übernimmt er die Vergleichung der Toise von Lenell, die dem Director, Hofrath und Ritter *Keussler* in Riga gehört, und die von dem Herrn General von *Tenner* mit seiner Normalsashén schon verglichen worden, mit der vidimirten Toise von Fortin auf der Dorpater Stern-

warte. Auch ist er bereit, wenn das Original oder die Copie des Normalsashéns der oben erwähnt, in Dorpat angelangt ist, diese unmittelbar mit der Toise von Fortin zu vergleichen, so genau als die Vergleichung eines Strichmaasses mit dem von Flächen begränzten Maasse möglich ist.

Nachdem so die Maasse vergleichbar geworden sind, führen beide ihre Dreiecksrechnungen nach denselben Methoden aus, und müssen so zu zwei unabhängigen Bestimmungen der gemeinschaftlichen Dreiecksseiten *Kreutzburg* bis *Daborskalns* und *Daborskalns* bis *Sestukalns* gelangen. Ausserdem erhalten beide aus beobachteten Zenithdistanzen die Höhe dieser Puncte über der Meeresfläche, indem andere Dreiecke des Herrn Generals von *Tenner* sich bis zum Baltischen Meere und zum Rigaischen Meerbusen erstrecken. Um diese Vereinigung beider Arbeiten zu einer unbestreitbaren Prüfung der Genauigkeit derselben benutzen zu können, theilt keiner dem andern unmittelbar die von ihm erhaltenen Werthe der Seiten und Höhen mit. Ein Dritter erhält von beiden die versiegelten Resultate und eröffnet sie gleichzeitig, um über die Uebereinstimmung sein Urtheil zu fällen. Gemeinschaftlich wird gewünscht, dass S^e^. Excellenz der Herr Generalmajor und Ritter von *Schubert*, Chef des Charten-Depots des Kaiserlichen Generalstaabes in St. Petersburg, und der Hr. Professor und Ritter *Bessel*, Astronom in Königsberg, sich diesem Geschäfte unterziehen mögen.

Dorpat, den $\frac{23}{11}$ Februar, 1828.

*Tenner*, Generalmajor

*W. Struve*, Professor der Astronomie.

Diese Uebereinkunft ist in ihren Haupttheilen ausgeführt worden, mit einigen durch die Umstände herbeigeführten Modificationen. Herr von *Tenner* nahm aus Dorpat zwei Mikroscope von Pistor mit, um sie zur Prüfung seines Messapparats zu benutzen. Dann führte ich im Jahre 1829 die zur Vergleichung unserer Maasseinheiten erforderlichen Arbeiten aus. Dagegen wurde von Seiten *Tenners* gleich im Jahre 1828, die trigonometrische Verbindung unserer beiden Dreiecksnetze ausgeführt, durch 5 Dreiecke, von denen zwei mit den Dreiecken 31 und 32 der Livlän-

dischen Messung (Gradmessung I. 146) identisch sind. Hierzu wurde ein neuer 12zölliger Reichenbachischer Theodolit und der früher angewandte Wiederholungskreis von Troughton gebraucht, und alle Winkel dieser 5 Dreiecke mit beiden Instrumenten gemessen. Während derselben Zeit liess ich einen Theil der von *Tenner* in Belin im ersten Vertical beobachteten Sterne auf dieselbe Weise in Dorpat am 8füssigen Dollondschen Mittagsrohre, nach der auch schon früher von mir gebrauchten Uhr von Repsold, beobachten. Diese Beobachtungen wurden von dem Herrn Capitain *Rosenius*, Lieutenant *Oberg*, vom Generalstaabe, und dem Candidaten *Feodorow* gemacht. Im Januar 1832 kam Herr von *Tenner* zum zweiten Male nach Dorpat, und brachte das fertig ausgearbeitete Manuscript über seine ganze Gradmessung mit. Er übergab mir dasselbe mit dem ehrenvollem Auftrage, nach Durchlesung, mit Benutzung alles darin enthaltenen Materials, so wie unter Anwendung der von mir schon durch den Druck bekannt gemachten Gradmessung und den eigends nach unserer Uebereinkunft in Dorpat angestellten astronomischen Beobachtungen, die Resultate der Vereinigung unserer beiden Messungen auszuarbeiten. Mit Freuden erfüllte ich einen Auftrag, der mir die genaue Bekanntschaft einer mit eben so seltener Einsicht als Geschicklichkeit ausgeführten astronomisch-geodätischen Arbeit verschafft hat.

Die erste Nachricht von der Uebereinstimmung der beiderseitigen geodätischen Arbeiten erhielt ich am 10. Februar 1831 durch Herrn Professor *Bessel* und am 11. Febr. durch Herrn Generallieutenant von *Schubert*, in folgenden Mittheilungen:

## *Nachricht von der Vereinigung der beiden Russischen, sich über acht Grade der Breite ausdehnenden Gradmessungen, vom Herrn Professor, Ritter Bessel in Königsberg.*

Zufolge der unter dem Herrn Generalmajor und Ritter von *Tenner* Excellenz und dem Herrn Collegienrath und Ritter *Struve* getroffenen, durch N°. 139 der Astronomischen Nachrichten bekannt gewordenen Verabredung, sollten die Seiten

und Winkel der beiden Dreiecke, welche den Gradmessungen dieser beiden Herren gemeinschaftlich sind, nicht von Einem derselben an den Andern, sondern von beiden an Einen Dritten versiegelt mitgetheilt, von diesem gleichzeitig eröffnet, und die Vergleichung zwischen den beiderseitig herausgebrachten Zahlen angestellt werden. Statt *eines* Dritten wurden indessen Herr Generalmajor von *Schubert* Excellenz und ich zur Empfangnahme der Mittheilungen ernannt.

Aus dieser Anordnung geht hervor, dass die Vergleichung doppelt gemacht wird, sowohl in Petersburg als in Königsberg. Es wäre vielleicht angemessen, dass jetzt, nachdem die Mittheilungen von beiden Seiten eingegangen sind, zwischen Herrn von *Schubert* und mir eine Uebereinkunft über die Art und Weise, wie die Vergleichung vorgenommen werden soll, getroffen würde. Allein da es für die Herren von *Tenner* und *Struve*, so wie für Andere, welche diese grosse Gradmessung mit Theilnahme betrachten, erwünscht seyn muss, die Vergleichung ohne vermeidlichen Zeitverlust kennen zu lernen, so habe ich die Eröffnung der Mittheilungen gleich nach dem Eingange der spätern vorgenommen, und setze jetzt diese Nachricht auf, in der Absicht, sie nicht nur Herrn von *Schubert* sondern auch den Herren von *Tenner* und *Struve* mitzutheilen, und den Ersteren zu ersuchen, sie durch das, was er noch hinzuzufügen für gut finden möchte, zu ergänzen.

Die Mittheilung des Herrn *Struve* ist Dorpat den $\frac{16}{28}$ October 1829 datirt und am 4 Novbr. desselben Jahres in meinen Besitz gelangt; die des Herrn von *Tenner* ist Minsk den 11. Januar 1831 datirt, und gestern den 3. Februar bei mir eingegangen.

Die beiden gemeinschaftlichen Dreiecke sind die südlichsten des Struveschen Netzes, welches man aus dem, dem 33 Stücke der Astron. Nachrichten beigelegten Tableau kennt, nämlich:

| | | | |
|---|---|---|---|
| *a* . . . . | Sestukalns | Gaisakalns | Daborskalns |
| *b* . . . . | Gaisakalns | Daborskalns | Kreutzburg. |

Die beobachteten Werthe der horizontalen Winkel sind:

| | | *Struve* | *von Tenner* | *Differ.* |
|---|---|---|---|---|
| a. | Sestukalns | 92° 59′ 8″,26 | 92° 59′ 8″,19 | — 0″, 07 |
| | Gaisakalns | 53 11 6, 66 | 53 11 5, 76 | — 0, 90 |
| | Daborskalns | 33 49 46, 72 | 33 49 48, 15 | + 1, 43 |
| b. | Gaisakalns | 18 29 18, 38 | 18 29 20, 28 | + 1, 90 |
| | Daborskalns | 101 11 56, 39 | 101 11 55, 64 | — 0, 75 |
| | Kreutzburg | 60 18 44, 21 | 60 18 45, 67 | + 1, 46 |

Die, zu der dem Flächeninhalte jedes Dreiecks entsprechenden Summe, ausgeglichenen Winkel sind:

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| a. | Sestukalns | 92° 59′ 8″,19 | 92° 59′ 7″,92 | — 0″, 27 |
| | Gaisakalns | 53 11 6, 60 | 53 11 5, 49 | — 1, 11 |
| | Daborskalns | 33 49 46, 66 | 33 49 48, 05 | + 1, 39 |
| b. | Gaisakalns | 18 29 19, 10 | 18 29 20, 10 | + 1, 00 |
| | Daborskalns | 101 11 57, 12 | 101 11 55, 57 | — 1, 55 |
| | Kreutzburg | 60 18 44, 94 | 60 18 45, 50 | + 0, 56 |

Die Seiten welche den Winkeln gegenüber stehen, sind (in Toisen):

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| a. | Sestukalns | 18369ᵀ, 2777 | 18368ᵀ, 792 | — 0ᵀ, 4857 |
| | Gaisakalns | 14725, 9682 | 14725, 434 | — 0, 5342 |
| | Daborskalns | 10240, 5033 | 10240, 308 | — 0, 1953 |
| b. | Gaisakalns | 6705, 3214 | 6705, 231 | — 0, 0904 |
| | Daborskalns | 20742, 1383 | 20741, 593 | — 0, 5453 |
| | Kreutzburg | 18369, 2777 | 18368, 792 | — 0, 4857 |

Die Höhen der Standpunkte, nach Herrn *Struve* über dem Spiegel des Finnischen Meerbusens, nach Herrn von *Tenner* über der Ostsee bei Polangen sind:

| | | | |
|---|---|---|---|
| Gaisakalns | 161ᵀ, 32 | 159ᵀ, 294 | — 2ᵀ, 026 |
| Sestukalns | 112, 38 | 110, 669 | — 1, 711 |
| Daborskalns | 82, 25 | 80, 391 | — 1, 859 |
| Kreutzburg | 58, 63 | 44, 837 | |

Die Höhe von Kreutzburg giebt *Struve* für den Fussboden der Durchsicht des Schlossthurmes, Herr *von Tenner* für den Boden worauf der Thurm steht, an.

Indem *Struve* sich auf die Mittheilung dieser Zahlen beschränkt, ist durch das Vorige mein Auftrag eigentlich erledigt; allein ich erlaube mir, noch Einiges mitzutheilen, da Herr von *Tenner* mir einen Auszug aus seiner Darstellung der weit ausgedehnten Unternehmung gesandt hat, der vollständig genug ist, um eine genügende Uebersicht über die Art, wie sie ausgeführt worden ist, zu gewähren. Herr *Struve* hat von seinem Theile der Gradmessung in N°. 164 der Astronom. Nachr. bereits die Resultate mitgetheilt.

Die Anzahl der Dreiecke der von *Tennerschen* Gradmessung ist 61; unter diesen sind zwei der Verbindung wegen gemessen und die beiden gemeinschaftlichen. Sie zeichnen sich durch sehr vortheilhafte Formen aus und bieten überdiess einige Verificationen dar, indem sie um die Signale *Bronna*, *Dokudowo* und *Daborskalns* geschlossene Polygone bilden. Dieses, sich von dem nördlichen Endpuncte *Bristen* bis zu dem südlichen *Belin*, über 470 Werste weit erstreckende Netz enthält zwei gemessene Grundlinien, die eine in der Nähe des südlichen Endpunkts, die andere etwa 60 Werst von dem nördlichen entfernt.

Die Winkel sind meistens mit einem *Troughtonschen* Wiederholungskreise oft auch mit einem *Baumannschen* und mit einem Theodoliten von *Reichenbach* gemessen und stimmen, wo verschiedene Instrumente bei einem und demselben Winkel angewandt wurden, immer sehr nahe überein. Dieses fand z. B. bei einem der oben angeführten Winkel statt, welche der *Troughtonsche* Wiederholungskreis und der *Reichenbachsche* Theodolit ergaben:

| | | *T.* | *R.* | *Differ.* |
|---|---|---|---|---|
| *a.* | Sestukalns | 92° 59′ 8″, 28 | 8″, 11 | — 0″, 17 |
| | Gaisakalns | 53 11 5, 51 | 6, 27 | + 0, 76 |
| | Daborskalns | 33 49 47, 86 | 48, 44 | + 0, 58 |
| *b.* | Kreutzburg | 60 11 45, 63 | 45, 76 | + 0, 13. |

Die Summen der drei Winkel der Dreiecke haben 37 mal einen kleinern Fehler als 1″; 17 mal fehlen sie zwischen 1″ und 2″; 7 mal zwischen 2″ und 2″, 82; dass entweder das positive oder negative Zeichen dabei vorherrscht, ist nicht bemerkbar. Wo die Winkel rings um den Horizont herumgehen, ist der Unterschied ihrer Summen von 360°:

| | |
|---|---|
| in Bronna | + 2″,15 |
| in Dokudowo | — 0, 89 |
| in Daborskaln | + 0, 25. |

Wenn man die eine Grundlinie, durch die Dreiecke, auf die andere überträgt, so zeigt sich ein Unterschied von 0,0000094, oder noch nicht der hunderttausendste Theil der Ganzen.

Die fünf Dreiecksseiten, welche beide Messungen gemeinschaftlich haben, sind in der südlichen etwa um den 38000ten Theil kleiner als in der nördlichen. Ich glaube aber, dass man dieses Resultat noch nicht als definitiv ansehen darf, vielmehr abwarten muss, was die Berechnung des *Tennerschen* Netzes, welches durch die beiden Grundlinien und die drei oben erwähnten Polygone *sieben* Verificationen besitzt, ergeben wird, wenn man sie nach den Principien führen wird, welche Herr Professor *Rosenberger* im Jahre 1827 in N°. 121 und 122 der Astronom. Nachr. als von mir gegeben, angeführt und auf eine ausgezeichnete Weise angewandt hat. Wenn man beide Theile der Russischeu Gradmessung ansehen will, so kommt durch die *Struvesche* Basis noch eine Verification hinzu, und es ist zu vermuthen, dass, indem man die Winkel auf die wahrscheinlichste Art und zwar so ausgleicht, dass sie den durch die Polygone gegebenen nothwendigen Bedingungen entsprechen und zugleich die drei Grundlinien darstellen, die daran anzubringenden Veränderungen die Gränzen nicht überschreiten werden, welche die Beobachter selbst als statthaft anerkennen werden. In diesem Falle würde also von einem Unterschiede der beiden Theile der Messung nicht mehr die Rede seyn können.

Die Bestimmung der Höhen der Signale über der Meeresfläche ist, stets auf reciproke Zenithdistanzen gegründet. Auch hierbei finden sich mehrere Verificatio-

nen, indem Herr v. *Tenner* sich an verschiedenen Puncten an das Niveau der Ostsee anschloss. Meiner Meinung nach müssen auch die Höhen, welche beide Theile der Unternehmung ergeben, in eine solche Verbindung gesetzt werden, dass der Unterschied derselben völlig verschwindet. Dass eine mit so grosser Sorgfalt ausgeführte Unternehmung, wie die Russische, der Mühe einer ganz consequenten und richtigen Rechnung wohl werth ist, darüber lassen die Mittheilungen, welche die Veranlassung dieser Nachricht sind, keinen Zweifel.

Königsberg, den 4. Febr. 1831. *F. W. Bessel.*

## *Schreiben Seiner Excellenz des Herrn Generallieutenants und Ritters von Schubert.*

(Uebersetzt aus dem Russischen.)

Gestern habe ich das Vergnügen gehabt, einen Brief vom Herrn Generalmajor Tenner vom 11. Januar unter N°. 21 mit den Abschnitten 11, 14 und 15 des geodätischen Theils der litthauischen Gradmessung zu erhalten. Nachdem ich alsdann das von Ew. Hochwohlgeboren im October 1829 erhaltene und im militair-topographischen Depot aufbewahrte Packet entsiegelt hatte, verglich ich sogleich mit einander die beiden Dreiecke: *Sestukalns*, *Gaisakalns*, *Daborskalns* und *Gaisakalns*, *Daborskalns*, *Kreutzburg*, und ich eile Ew. Hochwohlgeboren von der vollkommen genügenden Uebereinstimmung Ihrer Messung mit derjenigen des Herrn Generalmajors Tenner zu benachrichtigen. Indem ich Ihnen meinen aufrichtigsten Glückwunsch zu einem so offenbaren Beweise der Genauigkeit beider geodätischen Arbeiten bringe, lege ich hier den Auszug dieses Vergleichs bei, aus welchem Sie alle Details ersehen werden. Mit der aufrichtigsten Hochachtung und Ergebenheit bin ich u. s. w.

*Friedrich Schubert.*

St. Petersburg, d. 26. Jan. 1830.
N°. 80.

Die von Herrn von Schubert gegebene Vergleichung unserer Vereinigungsdreiecke lasse ich aus, da sie mit der Besselschen identisch ist.

In Bezug auf den Aufsatz des Herrn Professors Bessel habe ich folgendes zu bemerken. Der Wunsch unserer Seits, nicht bloss die geodätische Uebereinstimmung der beiderseitigen Arbeiten, sondern gleichzeitig das Hauptresultat der vereinigten Messung dem wissenschaftlichen Publico zu übergeben, hat mich veranlasst, mit der Bekanntmachung der Ergebnisse der Vergleichung von Seiten der Herren von Schubert und Bessel zu zögern, bis die für den zweiten Zweck nöthigen Rechnungen und Vergleichungen vollendet waren. Gewiss ist es wünschenswerth, die beiden Messungen nach dem im Besselschen Aufsatze gemachten Vorschlage zu bearbeiten. Indess glaube ich, dass hiermit noch gewartet werden muss. Der bisher gemessene Bogen von 8 Grad ist nur ein Theil der beabsichtigten Russischen Gradmessung. Die Fortsetzung nach Norden ist schon im Werke und deren Leitung auf des Monarchen Befehl mir übertragen. Die Dreieckspuncte bis Torneo sind ausgewählt, die Winkelmessung ist begonnen, so dass die Messung hoffentlich bis zum Nordpuncte der Lappländischen Dreiecke fortgehen wird. Im Jahre 1834 wird von Seiten des Kaiserlichen Generalstaabes die Messung nach Süden fortgeführt werden, und es steht zu hoffen, dass die Gränze derselben erst an der Donau, zwischen 43° und 44° der Breite sein wird, wodurch sich eine Ausdehnung der ganzen Arbeit von über 23 Breitengraden ergeben würde. Zu den bisherigen 3 Grundlinien werden nothwendiger Weise neue hinzukommen. Erst nach in dieser Ausdehnung vollendeter Arbeit, wird es geeignet seyn, die streng consequente Berechnung aller Dreiecke zu übernehmen, und alle dann gemessenen Basen darzustellen, und ebenfalls die Azimute auszugleichen. Ueberdies ist der Herr Geheimerath und Ritter, Professor Bessel jetzt schon mit einer Messung von der Königsberger Sternwarte aus bis zur Russischen Gränze beschäftigt. Herr von Tenner ist mit der Vereinigung der Russischen Dreiecke mit den Preussischen von Russischer Seite beauftragt. Auch diese Arbeiten müssen in das ganze System aufgenommen werden.

Zur Vervollständigung der Höhenvergleichung muss die von Tenner gegebene Höhe des Fussbodens der Durchsicht im Belvedere zu Kreutzburg über dem Grunde = 12,420 Toisen benutzt werden; hiermit findet sich für Kreutzburg Erdboden:

| *Struve* | *Tenner* | *Differenz* |
|---|---|---|
| 46$^T$, 21. | 44$^T$, 837. | — 1$^T$, 373. |

Die Unterschiede der Höhen sind alle 4 in gleichem Sinne. Ihr Mittel ist 1,742 Toisen, um so viel sind nach mir die Höhen grösser. Ich glaube dass dieser geringe Unterschied eine sehr befriedigende Prüfung der Sicherheit beider Operationen für diesen Zweck gewährt, und dass die Uebereinstimmung sogar als überraschend angesehen werden kann, wenn man bedenkt, dass Herr von Tenner von dem Ufer der Ostsee bei Polangen bis zu diesen Puncten durch eine gradlinigte Entfernung von nahezu 300 Wersten aufstieg, während ich vom Finnischen Meerbusen ausging und ebenfalls erst nach einem Wege von mehr als 350 Wersten zu den Vergleichungspuncten gelangte. Anhäufungen von Fehlern mussten hier erwartet werden; dass deren Wirkung aber nicht grösser war, beweist, wie die irdische Strahlenbrechung, bei allen scheinbaren Unregelmässigkeiten, doch kein unüberwindbares Hinderniss der Schärfe der trigonometrischen Höhenbestimmungen entgegensetzt. Hier füge ich noch hinzu, dass eine frühere, von dem Ausflusse der Düna bei Riga ausgehende Höhenbestimmung, die auf den Dreiecken der Vermessung von ganz Livland beruhte, welche in den Jahren 1816 bis 1818 mit einem Spiegelsextanten für die horizontalen Winkel und einem von mir angegebenen, in Dorpat gearbeiteten Horizontsector für die verticalen ausgeführt ward, ebenfalls sehr nahe übereinstimmt. Diese Bestimmungen waren schon im Jahre 1818 berechnet. Stellen wir die dreifachen Resultate zusammen, so erhalten wir:

| | nach *Struve* von der Dünamünde aus | nach *Struve's* Gradmessung vom Finnischen Meerbusen aus | nach *Tenners* Gradmessung von der Ostsee bei Polangen aus |
|---|---|---|---|
| für Gaisakalns | 160$^T$, 78 | 161$^T$, 32 | 159$^T$, 29 |
| — Sestukalns | 113, 68 | 112, 38 | 110, 67 |
| — Daborskalns | 82, 38 | 82, 25 | 80, 39 |

Es verdient beachtet zu werden, dass bei der ersten Messung die Hülfsmittel nur unvollkommen, bei den beiden letzten dagegen die Höhenbestimmungen nur Nebensache waren.

Nimmt man die Summe der 5, beiden Messungen gemeinschaftlichen, Dreiecksseiten: so findet sich nach Struve 70783,2089 Toisen, nach Tenner 70781,358 Toisen, und der Unterschied 1,8509 Toisen $= \frac{1}{38240}$ des Ganzen.

Dieser Unterschied muss, da bei beiden Messungen dieselbe Maasseinheit, nemlich die der Dorpater Sternwarte zugehörige Toise von Fortin zum Grunde liegt, theils in den Vergleichungen der Maasseinheit mit den Messstangen, theils in den Unsicherheiten die von den Thermometerangaben herrühren, theils in der Unvollkommenheit der Winkelmessungen in beiden Operationen begründet sein. Ich habe in der Gradmessung, Theil I. Seite 339 u. 340, für meine Messung den wahrscheinlichen Fehler der erhaltenen Dreiecksseiten aus diesen Quellen entwickelt, und finde daraus den mittleren Fehler für die Summe der genannten 5 Dreiecksseiten 0,9504 Toisen $= \frac{1}{74473}$ der ganzen Länge. Setze ich einen eben so grossen mittleren Fehler in den Tennerschen Bestimmungen dieser Seiten voraus: so musste eine Differenz der beiden Bestimmungen von $\frac{1}{74473}\sqrt{2} = \frac{1}{52660}$ des Ganzen erwartet werden, welche der beobachteten $\frac{1}{38240}$ sich hinreichend nähert. Unter Voraussetzung, dass die Fehler in den Tennerschen Bestimmungeu etwas grösser sind, als in den meinigen, sieht man, dass die gefundene Differenz nichts unerwartetes darbietet. Dieser grössere mögliche Fehler in den Tennerschen Bestimmungen möchte vorzugsweise in der Uebertragung des Maasses von Fortin auf die Tennerschen Messstangen begründet seyn, und ein Theil des Unterschiedes wäre wahrscheinlich verschwunden, wenn beide Grundlinien mit demselben Apparate gemessen worden wären. Nach der obigen Uebereinkunft sandte zwar Herr von Tenner seine Maasseinheit nach Dorpat zur Vergleichung mit der Toise von Fortin; aber diese Vergleichung hatte nicht geringe Schwierigkeiten. Die Toise von Fortin ist bekanntlich ein Parallelepipedum, dessen kleine Endflächen um die Länge der Toise abstehen. Die Tennersche Masseinheit war dagegen ein Sashén von 7 Engl. Fuss, an-

gegeben durch 2 auf Silber gezogene Striche, welches in eine etwas längere, starke eiserne Stange N°. 10 eingelassen war. Dieser Sashén konnte nur als nahezu richtig angesehen werden. Er war durch Herrn v. Tenner selbst mit grosser Sorgfalt in zweckmässige Unterabtheilungen getheilt, und dann von einer alten Toise von Lenell die Länge von 6 Pariser Fuss in die Theilung durch einen neuen Endstrich hineingetragen. Das Verhältniss dieser Toise zum Sashén N°. 10 wurde durch Herrn von Tenner durch wiederholte Vergleichungen ausgemittelt, und zwar theils im Jahre 1823 durch einen sehr guten mikrometrischen Stangenzirkel, theils im Sommer 1828 vermittelst der beiden aus Dorpat mitgenommenen Mikroskope von Pistor. Beide Operationen gaben sehr übereinstimmend das gesuchte Verhältniss der beiden auf den Maasstab N°. 10 verzeichneten Längen. Wenn wir nemlich $L$ die Entfernung des Endstriches der Toise auf der Stange N°. 10 vom Anfangsstrich und $S$ die Entfernung des Endstrichs des Sashéns nennen und $\frac{S}{84} = Z$ (Zoll) setzen, so fand Herr Generalmajor von *Tenner*

im Jahre 1823 $L = 76{,}735276\ Z$

— — 1828 $L = 76{,}735142\ Z\ (\odot)$

Zwei Bestimmungen die bis auf $\frac{1}{600000}$ übereinkommen, und von denen er die letztere als die mit den vollkommneren Hülfsmitteln erhaltene, als die definitive ansah. Um die Gleichung zwischen $L$ und $F$, der Toise von Fortin in Dorpat, oder in $L = F + \xi$, die Grösse $\xi$ zu erhalten, musste ich die Entfernung zweier Striche mit der zweier Flächen vergleichen. Die Entfernung zweier Striche lässt sich am vollkommensten durch 2 Microscope aufnehmen, die zweier paralleler Ebenen nur durch eine Widerlage und einen Fühlhebel. Hier musste die letztere aber ebenfalls durch Microscope bestimmt werden, um mit der der Striche vergleichbar zu sein. Ich liess daher zwei Cylinder von Glockenmetall abdrehen, von einem Durchmesser gleich der Breite der Toise von Fortin, und einer Höhe, der Dicke dieser Toise gleich. Auf der einen Oberfläche dieser Cylinder war das Centrum auf der Drehbank vorgezeichnet, und dann wurden durch das Centrum zwei Durchmesser unter rechten Winkeln gezogen. Hierauf wurde um's Centrum ein Loch von 3

Linien eingebohrt, in dasselbe Silber eingelassen, und die beiden obigen Durchmesser auf der Oberfläche des Silbers wieder ausgezogen, wo sie sich fast genau im Centrum durchschneiden mussten. Die untere Fläche beider Cylinder war etwas ausgehölt worden, um nur am Rande auf einer Ebene aufzuliegen. Was die Bearbeitung beider Cylinder betrifft: so bemerke ich, dass sie aus einem weit längeren Cylinder neben einander ausgeschnitten waren, und nachher an den Rändern etwas abgerundet wurden, so, dass sie nebeneinander auf die Oberfläche eines Glashorizontes gelegt, sich vollkommen in der Mitte der stehenden Flächen berührten. Wenn diese beiden Cylinder an die Enden der Toise von Fortin angeschoben werden, so dass einer der gezogenen Durchmesser den Berührungspunkt trifft, und die Oberflächen der Cylinder und der Toise in einer Ebene liegen, so ist die Entfernung der beiden Durchschnittspunkte auf den Cylindern $= F + r + r'$, wenn $r$ und $r'$ die Abstände der Durchschnittspunkte von den Peripherien der Cylinder an den Berührungspunkten bedeuten. Wenn man daher zwei Microscope mit ihren Micrometerfäden über den beiden Durchschnittspunkten aufstellt, so ist die Entfernung der Zielpunkte dieser Microscope $= F + r + r'$. Wird nun ein drittes Microscop so zwischen die beiden ersteren aufgestellt, dass die Entfernung des Zielpunctes desselben von dem einen $r + r'$ beträgt, während die Zielpuncte alle 3 in einer geraden Linie liegen: so ist die Entfernung desselben vom andern Microscope genau $= F$, und folglich die Länge $F$ durch 2 Microscope aufgefasst und jetzt mit der Entfernung der beiden Striche $= L$ vergleichbar.

Um die Cylinder richtig gegen die Endflächen der Toise anliegen zu lassen, wurden auf beide Enden der Toise zwei Rahmen aufgeschoben, deren innere Flächen eine genaue Verlängerung der Grundfläche der Toise abgaben. Die Cylinder passten in diesen Rahmen hinein und wurden durch Federn gehörig angedrückt. Ein dritter Rahmen diente nachher die beiden Cylinder an denselben Puncten unter einander zur Berührung zu bringen, mit welchen sie an der Toise angelegen hatten und so die Grösse $r + r'$ darzustellen. Dieser Rahmen war mit den gehörigen Stellschrauben versehen.

Aus 9 vollständigen Versuchen ergab sich im Mittel $L = F - 0{,}02982$ Linien bey $+ 13°, 14$ $R$ (☽) mit einem wahrscheinlichen Fehler von $0{,}00067 = \frac{1}{1500}$ Linie indem der eines einzelnen Versuchs sich aus den Abweichungen vom Mittel $= 0{,}0020$ Linie ergab.

Aus den beiden Gleichungen (☉) und (☽) folgt nun die erforderliche Gleichung

$$S = 945{,}7661 \text{ Pariser Linien.}$$

Ist die wahre Länge des Englischen Fusses $= 135{,}1140$ Pariser Linien: so muss der Sashén $= 945{,}7980$ Pariser Linien seyn, es war also die *Tennersche* Einheit $S$ um 0,0319 zu kurz.

Der so erhaltene Ausdruck für $S$ in Pariser Linien liegt der Berechnung der *Tennerschen* Dreiecke zum Grunde. Wenn er auch auf eine strenge Weise gefunden war: so beruhete er doch auf mehrfachen, sehr verwickelten Operationen, bei denen es schwierig ist, den Einfluss kleiner constanter, aus der Unvollkommenheit der Apparate herrührender Fehler gänzlich zu vermeiden.

Die drei Hauptpuncte der *Tennerschen* Messung, *Belin*, *Nemesch* und *Bristen*, liegen so nahe unter einem Meridiane, dass der Abstand ihrer Parallelen von einem Fehler im Azimute unabhängig ist. Mit dem in Nemesch beobachteten Azimute der Dreiecksseite Nemesch-Meschkanzi $= 0$ findet sich aus den Dreiecken:

*der Abstand der Parallelen*

nach Herrn von *Tenners* Rechnung, die hier, wie in allem folgenden auf seine Messung sich beziehenden, zum Grunde liegt:

von *Belin* und *Nemesch* $= 110298{,}533$ Toisen
von *Nemesch* und *Bristen* $= 148811{,}383$ — —

Das Azimut in Nemesch nach Belin übertragen stimmt mit dem daselbst beobachteten auf 6″, 61 überein. Trägt man es aber nach Jacobstadt, dem südlichen Endpunct meiner Messung über, so findet sich ein Unterschied von 25″, 89 von dem daselbst beobachteten. Dieser Unterschied mag theils dem nicht sehr vollkommenen Instrumente zugeschrieben werden, womit in Nemesch beobachtet wurde, theils in der Häufung der Fehler der Winkelmessung, theils aber auch in Unregel-

mässigkeiten der Erdoberfläche liegen, deren Einfluss auf die Azimute noch grösser seyn muss als auf die Polhöhen. Auf jeden Fall war es aber besser, um den Abstand der Parallelen von *Jacobstadt* und *Bristen* zu finden, das von mir am ersteren Orte beobachtete Azimut zum Grunde zu legen, weil es hier bei der Richtung von Ost nach West, in der die beiden Puncte liegen, sehr auf ein genaues Azimut ankam. Mit dem erwähnten Azimute ergab sich:

*der Abstand der Parallelen*

von *Bristen* und *Jacobstadt* = 4566,616 Toisen; um so viel ist nehmlich der Parallel von Bristen nördlicher.

Da der Abstand des Parallels des Endpuncts in Jacobstadt von dem des Thurms der Dorpater Sternwarte, nach Gradmessung I. 338, = 107281,007 Toisen ist: so findet sich der

*Abstand vom Parallel der Thurmmitte der Dorpater Sternwarte*

für *Bristen* Signal — 102714,391 Toisen
— *Nemesch* Signal — 213012,924 — —
— *Belin* Signal — 361824,307 — —

Aus dem Complexe aller im ersten Verticale an den Passageninstrumenten beobachteten Polhöhen, findet Herr von *Tenner* folgende *Amplituden* als Endresultate:

swischen *Belin Observatorium* und *Bristen Observatorium* = 4° 32′ 7″,393.
zwischen *Nemesch Observatorium* und *Bristen Observatorium* = 2° 36′ 27″,046.

Das Observatorium in Belin war 6″,579 südlicher, das in Nemesch 3″,189 südlicher, das in Bristen 0″,123 nördlicher als die gleichgenannten Signale der Dreieckspuncte.

Es bleibt jetzt noch übrig die Amplituden der zwischen den 3 *Tennerschen* Puncten und der Dorpater Sternwarte liegenden Bogen zu bestimmen.

Zu diesem Ende waren in Dorpat, im Jahre 1828, 41 von den durch *Tenner* in Belin im ersten Verticale beobachteten Sternen auf dieselbe Weise beobachtet worden, woraus sich unmittelbar die Amplitude zwischen Dorpat und Belin ableiten lässt.

Das achtfüssige Mittagsrohr von Dollond wurde zu dem Ende auf dieselben steinernen Pfeiler wieder aufgestellt, an welchen es im Jahre 1827 gebraucht worden war (Siehe Gradmessung II. 275 u. f.) und befand sich also 0″, 695 nördlich vom Centro des Thurmes der Sternwarte. Die drei oben genannten Beobachter wechselten so ab, dass jeder dieselben Sterne an einem Abende immer in beiden Verticalen beobachtete. Zwischen dem Durchgange in Ost und West ward das Instrument umgelegt, so dass der Fehler der Gesichtslinie gleich eliminirt wurde. Das Wetter war den Beobachtungen höchst ungünstig. Ohngeachtet dieselben schon am 18. August begonnen und bis zum 7. Dezember fortgesetzt wurden, also 111 Tage währten, fanden sich nur 25 Beobachtungsnächte; und die Zahl der Tage, an welchen jeder Stern in beiden Verticalen erhalten wurde, ist nur geringe. Indess war auch bei der Güte des Instruments und der Uhr eine geringere Zahl von Beobachtungen völlig hinreichend, zumal da hier jeder Stern an 5 Fäden beobachtet wurde, und da eine sehr vollkommene Wasserwage die Neigung der Achse angab, und diese sehr häufig bestimmt wurde, z. B. am 29. August 12 Mal. An diesem Tage schwankte die beobachtete Neigung zwischen — 0″, 36 und + 0″, 40 im Bogen. Nothwendig war es, die Polhöhen aus den hiesigen Beobachtungen mit denselben Elementen abzuleiten, welche von Herrn von *Tenner* bei seinen Rechnungen angewandt sind. Ich brauchte daher zur Berechnung der Dorpater Beobachtungen die im *Tenner-schen* Werke zum Grunde gelegten mittleren Declinationen der *Besselschen* Sterne, und die von ihm schon corrigirten *Piazzischen* Declinationen, nebst denselben neuesten Grössen zur Berechnung der scheinbaren Oerter. Hiedurch wurden die für Dorpat erhaltenen Polhöhen unmittelbar mit denen durch *Tenner* für Belin erhaltenen vergleichbar.

*Amplituden zwischen* DORPAT, *Zelt des Mittagsrohrs von Dollond, und* BELIN, *Observatorium.*

| Name des Sterns | Declinat. des Sterns | Zahl der Beob. in Dorpat | Polhöhe Dorpat | Polhöhe Belin | Amplitudo | Differenz vom Mittel |
|---|---|---|---|---|---|---|
| 26 Andromedae . | 42° 50′ | 3 | 58°22′46″,79 | 52°2′32″,91 | 6°20′13″,88 | 0″,19 |
| 22 Cassiopeiae . . | 47 20 | 6 | 46,52 | 33,10 | 13,42 | 0,27 |
| *P. O.* 74 . . . . | 43 26 | 5 | 46,72 | 33,00 | 13,72 | 0,03 |
| *P. O.* 181 . . . . | 50 30 | 6 | 47,71 | 33,17 | 14,54 | 0,85 |
| *P. O.* 211 . . . . | 51 44 | 7 | 48,17 | 33,10 | 15,07 | 1,38 |
| *P. O.* 267 . . . . | 50 5 | 7 | 48,30 | 32,95 | 15,35 | 1,66 |
| 41 d. Andromedae | 43 1 | 6 | 47,20 | 33,07 | 14,13 | 0,44 |
| 42 — — | 46 19 | 5 | 45,50 | 33,10 | 12,40 | 1,29 |
| 48 — — | 44 31 | 3 | 46,96 | 33,23 | 13,73 | 0,04 |
| 49 ξ — — | 46 6 | 5 | 45,57 | 33,20 | 12,37 | 1,32 |
| 54 φ — — | 49 49 | 6 | 47,28 | 33,02 | 14,26 | 0,57 |
| *P.* I. 176 . . . . | 51 4 | 5 | 47,69 | 32,88 | 14,81 | 1,12 |
| γ Draconis . . . . | 51 31 | 6 | 46,08 | 32,81 | 13,27 | 0,42 |
| α Lyrae . . . . . | 38 38 | 5 | 46,18 | 32,81 | 13,37 | 0,32 |
| 10 ι Cygni . . . . | 51 22 | 7 | 45,57 | 33,20 | 12,37 | 1,32 |
| 18 δ — — | 44 43 | 5 | 46,51 | 33,28 | 13,23 | 0,46 |
| 32 — — | 47 11 | 4 | 44,07 | 32,74 | 11,33 | 2,36 |
| γ — — | 39 42 | 6 | 45,03 | 32,37 | 12,66 | 1,03 |
| α — — | 44 40 | 7 | 47,18 | 32,88 | 14,30 | 0,61 |
| 51 — — | 49 43 | 3 | 45,19 | 32,92 | 12,27 | 1,42 |
| *P* XX 429 . . . | 49 47 | 5 | 46,21 | 33,03 | 13,18 | 0,51 |
| 63 $f^2$ Cygni . . . | 46 57 | 6 | 44,67 | 33,03 | 11,64 | 2,05 |
| 73 ϱ — — | 44 49 | 5 | 46,63 | 32,97 | 13,66 | 0,03 |
| 80 $\pi^1$ — — | 50 24 | 8 | 46,92 | 32,97 | 13,95 | 0,26 |
| 81 $\pi^2$ — — | 48 31 | 11 | 46,38 | 33,06 | 13,32 | 0,37 |

| Name des Sterns | Declinat. des Sterns | Zahl der Beob. in Dorpat | Polhöhe Dorpat | Belin | Amplitudo | Differenz vom Mittel |
|---|---|---|---|---|---|---|
| 3 Lacertae . . . | 51° 21′ | 11 | 58°22′46″,60 | 52°2′33″,04 | 6°20′13″,56 | 0, 13 |
| *P.* XXII 103 . . | 50 22 | 7 | 46, 14 | 32, 91 | 13, 23 | 0, 46 |
| 5 Lacertae . . . | 46 49 | 6 | 46, 87 | 33, 10 | 13, 77 | 0, 08 |
| 7 — — | 49 24 | 8 | 47, 70 | 32, 88 | 14, 82 | 1, 13 |
| 9 — — | 50 39 | 6 | 47, 33 | 32, 88 | 14, 45 | 0, 76 |
| *P.* XXII 177 . . | 44 17 | 5 | 47, 34 | 33, 05 | 14, 29 | 0, 60 |
| 11 Lacertae . . . | 43 23 | 4 | 46, 33 | 33, 19 | 13, 14 | 0, 55 |
| 3 Andromedae . | 49 7 | 7 | 46, 80 | 32, 63 | 14, 17 | 0, 48 |
| 4 — — | 45 27 | 3 | 47, 85 | 32, 76 | 15, 09 | 1, 40 |
| 7 — — | 48 28 | 6 | 46, 99 | 33, 14 | 13, 85 | 0, 16 |
| 8 — — | 48 4 | 4 | 47, 95 | 32, 52 | 15, 43 | 1, 74 |
| 16 λ — — | 45 31 | 5 | 47, 93 | 33, 50 | 14, 43 | 0, 64 |
| 18 — — | 49 31 | 8 | 46, 20 | 33, 15 | 13, 05 | 0, 64 |
| 19 — — | 43 23 | 3 | 47, 11 | 33, 22 | 13, 89 | 0, 20 |
| 20 ψ — — | 45 28 | 4 | 46, 71 | 33, 31 | 13, 40 | 0, 29 |
| *P.* XXIII 231 . . | 51 46 | 8 | 47, 39 | 32, 84 | 14, 55 | 0, 86 |
| | | | | Mittel | 6° 20′ 13″, 690 | |

Die Stundenwinkel dieser Sterne beim Durchgang durch den ersten Vertical waren in Dorpat schon sehr gross, man findet, für die Zwischenzeit zwischen beiden Verticalen:

| | Zwischenzeit | Stundenwinkel |
|---|---|---|
| für den nördlichsten *P* XX 231 | 5 Stunden 8′,8; | 38° 36′. |
| für den südlichsten *α* Lyrae | 8 — — 4, 1; | 60° 31′. |

Ein Fehler von 0″, 1 in Zeit = 1″, 5 im Bogen im Stundenwinkel hat für diese beiden Sterne in Dorpat schon einen Einfluss von 0″,54 und 1″, 19 auf die Polhöhe. Hieraus sieht man, dass bei der Bestimmung einer so grossen Amplitudo nach Bessels Methode sehr viel von der richtigen Compensation der Uhren abhängt, d. h.

von ihrem gleichförmigen Gange binnen 24 Stunden. Beide angewandte Uhren von Hardy und Repsold gehörten glücklicher Weise zu denen vom ersten Range.

Das Mittel der obigen Amplituden ist ohne Rücksicht auf die Zahl der Beobachtungen an beiden Orten 6° 20′ 13″, 690. Zieht man hiervon 0″, 695 ab, so findet sich die Amplitudo zwischen *Dorpats Sternwarte Thurmmitte* und *Belin Observatorium:* 6° 20′ 12″, 995.
Die Summe der Quadrate der Abweichungen der 41 Bestimmungen vom Mittel ist 36, 26, woraus sich der wahrscheinliche Fehler einer Amplitudo aus einem Sterne = 0″, 642 und des Mittels = 0″, 100 findet. Mit obiger Amplitudo und der Polhöhe für Dorpat = 58° 22′ 47″, 280, nach Gradmessung I. 311, erhalten wir die *Polhöhe von Belin Observatorium:*

52° 2′ 34″, 285.

Die absoluten Polhöhen von Belin, so wie von Nemesch und Bristen lassen sich aber auch auf Herrn von *Tenners* Beobachtungen begründen, wenn die Declinationen der Sterne nach Bessel als bekannt angesehen werden.

Nimmt man das Mittel aus den Bestimmungen durch die Besselschen Sterne: so findet sich in *Tenners* Werke:

| | | | |
|---|---|---|---|
| aus 13 Sternen | Belin Observ. | $\varphi$ = | 52°2′32″, 978 |
| — 14 — — | Nemesch Observ. | $\varphi$ = | 54 39 0, 054 |
| — 9 — — | Bristen Observ. | $\varphi$ = | 55 34 50, 605; |

welche Mittel ohne Berücksichtigung des Gewichts der Polhöhen aus den einzelnen Sternen abgeleitet sind. Die zwei andern Polhöhen lassen sich mit den von *Tenner* aus dem Complex aller correspondirenden Sterne abgeleiteten Amplituden auch auf Belin bringen. So erhalten wir für:

*Belin Observatorium Polhöhe*

| | | |
|---|---|---|
| aus Belin, 13 Sterne, | . . . . . . . . . . . . . . . . . . . | = 52°2′32″, 978 |
| aus Nemesch, 14 Sterne, | 54°39′0″,054 — 2°36′27″,046 | = 52 2 33, 008 |
| aus Bristen, 9 Sterne, | 56 34 50,605 — 4 32 17, 393 | = 52 2 33, 212 |
| Mittel mit Rücksicht auf die Zahl der Sterne an jedem Orte | | 52°2′33″, 048. |

Diese Polhöhe ist um 1″, 237 kleiner, als die mit der Amplitudo aus Dorpat abgeleitete. Es ist aber sehr wahrscheinlich, dass die Besselschen Declinationen einer kleinen positiven Verbesserung bedürfen. Unter den Besselschen 16 Sternen sind 6, deren Declinationen auch am Dorpater Meridiankreise bestimmt sind, (Obs. Dorp. Vol. VI). Die Unterschiede der Declination in Königsberg $= K$ und Dorpat $= D$ sind

| | | |
|---|---|---|
| für $\gamma$ Androm. | $D = K$ | $+ 0''$, 74 |
| — $\gamma$ Draconis | . . . . . | $+ 0$, 81 |
| — $\alpha$ Lyrae | . . . . . . | $+ 0$, 68 |
| — $\gamma$ Cygni | . . . . . . | $+ 1$, 27 |
| — $\alpha$ Cygni | . . . . . . | $+ 0$, 75 |
| — $\alpha$ Androm. | . . . . . | $+ 0$, 43 |
| Mittel | $D = K$ | $+ 0''$,780. |

Sehen wir diese $+ 0''$, 780 $= \Delta\,\delta$ als eine mittlere, an die Besselschen Declinationen in dieser Gegend anzubringende Aenderung an: so erhalten wir, da das Mittel der Declinationen der von Herrn von *Tenner* benutzten Sterne nahezu 45° ist, die respectiven Correctionen der Polhöhe:

$$d\varphi = \frac{\sin.\,2\,\varphi}{\sin.\,2\,\delta} \cdot \Delta\,\delta = \sin.\,2\,\varphi \cdot \Delta\,\delta$$

$= + 0''$, 756 für Belin, $+ 0''$, 737 für Nemesch und $+ 0''$,717 für Bristen, deren Mittel $+ 0''$,739 ist, und somit durch die Dorpater Declinationen nach von *Tenners* Beobachtungen die Polhöhe von Belin

$$52^\circ\ 2'\ 33'',787$$

nur um $0''$, 498 kleiner als aus der Dorpater Polhöhe und der Amplitudo. Diess glaube ich als eine erfreuliche Bestätigung der Amplitudo ansehen zu müssen.

Gehen wir jetzt von der Polhöhe von Belins Observatorium $= 52^\circ\ 2'\ 34''$, 285 mit *Tenners* Amplituden und den Reductionen auf die Dreieckspuncte aus, so finden sich die *Polhöhen:*

| | | | |
|---|---|---|---|
| für *Belin Observatorium* | 52° 2′ 34″, 285 | für *Belin Dreieckspunct* | 52° 2′ 40″,864 |
| — *Nemesch* — — | 54 39 1, 331 | — *Nemesch* — — | 54 39 4, 520 |
| — *Bristen* — — | 56 34 51, 678 | — *Bristen* — — | 56 34 51, 555. |

## *Zusammenstellung der Abstände vom Parallele der Dorpater Sternwarte (Thurmmitte) und der Polhöhen der sechs Puncte der vereinigten Gradmessung.*

(Siehe Gradmessung I. Seite 338.)

| Puncte | Abstand vom Parallel von Dorpat in Toisen | Polhöhen |
|---|---|---|
| Hochland Zelt I. . . . . . . . | + 97538, 547 | 60° 5′ 9″, 771 |
| Dorpat Sternwarte Thurmmitte | 0 | 58 22 47, 280 |
| Bristen Dreieckspunct . . . . | — 102714,391 | 56 34 51, 555 |
| Jacobstadt Endpunkt . . . . | — 107281,007 | 56 30 4, 562 |
| Nemesch Dreieckspunct . . . | — 213012,924 | 54 39 4, 520 |
| Belin Dreieckspunct . . . . . | — 361824,307 | 52 2 40, 864 |

*Ganzer Bogen* = 459362, 854 Toisen;
dessen *Amplitudo* = 8° 2′ 28″, 907.

Nach den letzten Rechnungen des leider für die Wissenschaft zu früh verstorbenen Herrn Professors Schmidt in Göttingen (in Schumachers Astronomischen Nachrichten N°. 213), ist, $\frac{1}{90}$ des Quadranten des Meridians $f = 57008{,}715$ Toisen;

die Abplattung der Erde $\alpha = \frac{1}{302{\cdot}020}$

Aus diesen Grössen und dem Abstande zweier Parallelen $= s$ findet sich der Unterschied der Polhöhen $= \delta$ in Bogensecunden durch

$$\delta = \frac{3600 \cdot s}{f} \left(1 + C \cdot \mu + C^2 \cdot \mu^2 - D \cdot \nu\right);$$

wenn $\mu = \frac{3}{2}(1 + \frac{1}{2}\alpha) \cdot \alpha$; $\nu = \frac{15}{16}\alpha^2$; $C = \cos. p \cdot \sqrt[3]{\cos. \delta}$; $D = \cos. 2p \cdot \sqrt[3]{\cos. 2\delta}$; wo $p$ die Summe der beiden Polhöhen, und $\delta$ der Unterschied derselben für die Coëfficienten $C$ und $D$ als bekannt angesehen werden können. Diese Formel ist die von Schmidt in seiner Geographie I. §. 226 gegebene, nur etwas bequemer dargestellt. Nach derselben finden sich die 5 von Dorpat an gerechneten Amplituden

$$\delta = +1^\circ\, 42'\, 24'',856$$
$$-1\;\;47\;\;52,\;691$$
$$-1\;\;52\;\;40,\;505$$
$$-3\;\;43\;\;45,\;381$$
$$-6\;\;20\;\;\;9,\;236.$$

Geht man nun von der Dorpater Polhöhe aus: so ergeben sich folgende berechnete Polhöhen, die ich mit den beobachteten zusammen stelle.

| Puncte | Berechnete Polhöhen | Beobacht. | Unterschied |
|---|---|---|---|
| Hochland | 60° 5′12″,136 | 9″,771 | — 2″,365 |
| Dorpat | 58 22 47, 280 | 47, 280 | 0, 000 |
| Bristen | 56 34 54, 589 | 51, 555 | — 3, 034 |
| Jacobstadt | 56 30 6, 775 | 4, 562 | — 2, 213 |
| Nemesch | 54 39 1, 899 | 4, 520 | + 2, 621 |
| Belin | 52 2 38, 044 | 40, 864 | + 2, 820 |

Bristen und Jacobstadt sind nur 30 Werst von einander entfernt. Es war zu erwarten, dass ein analoges Verhalten der beobachteten und berechneten Polhöhen hier statt finden werde. Der Erfolg hat dies bestätigt.

Einer späteren Untersuchung behalte ich es vor, die Resultate der Russischen Gradmessung zur Bestimmung der wahrscheinlichsten Figur der Erde mitstimmen zu lassen. So viel sieht man, dass die Applattung der Erde durch Zuziehung derselben wieder etwas vergrössert werden wird.

# ÜBER DIE GESETZE

NACH WELCHEN

## DER MAGNET AUF EINE SPIRALE EINWIRKT

WENN ER IHR PLÖTZLICH GENÄHERT ODER VON IHR ENTFERNT WIRD

UND ÜBER DIE

## VORTHEILHAFTESTE CONSTRUCTION DER SPIRALEN

ZU MAGNETO-ELECTRISCHEM BEHUFE;

VON

E. Lenz.

(Gelesen den 7. November 1832.)

Bei dem regen Interesse, welches die neuere Entdeckung *Faraday's* im Gebiete des Electromagnetismus bei allen Physikern Europa's erwecken muss, steht es zu erwarten, dass wir in kurzem die mannigfaltigsten Aufschlüsse über die augenblickliche Einwirkung eines electrischen Stromes auf einen electrischen Leiter und folglich, da es nach *Ampère* erlaubt ist die Wirkung eines Magneten durchaus auf die von circulären electrischen Strömen zurückzuführen, auch über die Einwirkung des Magneten auf einen solchen Leiter erhalten werden. Bis jetzt sind uns hier im Norden nur die Arbeiten von *Becquerel*, *Ampère*, *Nobili* und *Antinori* und *Pohl* bekannt geworden und da keiner dieser Autoren sich mit der Seite des Gegenstandes, auf welche ich mein besonderes Augenmerk gerichtet habe, beschäftigte, so eile ich den folgenden Beitrag zur Lehre des Magneto-Electrismus so schnell als möglich bekannt zu machen.

Nachdem ich die Hauptversuche *Faraday's* wiederholt hatte *), liess ich es meine erste Aufgabe sein, auszumitteln, auf welche Weise man die Phänomene der magnetischen Einwirkung auf eine plötzlich genäherte oder entfernte Spirale am leichtesten und stärksten hervorbringen könne. Zu dem Ende musste ich aber bestimmen, welchen Einfluss

1) die Anzahl der Windungen
2) die Weite der Windungen
3) die Dicke des Drathes
4) die Substanz der Windungen

der electromotorischen Spirale (d. h. derjenigen, auf welche der Magnet einwirkt) auf das Phänomen habe und diese Bestimmung, nebst den unmittelbaren Folgerungen daraus für die mir gestellte Aufgabe, enthält beiliegende Abhandlung.

Der mir zu meinen Untersuchungen dienende Apparat war folgender: Ein Multiplicator (mit empfindlicher Nobilischer Doppelnadel) von 74 Windungen eines 0,025 englische Zoll **) dicken Kupferdrathes ward mit der electromotorischen Spirale durch Leitungsdräthe in Verbindung gesetzt, so dass der Hufeisenmagnet, der auf die Spirale einwirkte, von dem Multiplicator 19 Fuss entfernt war und auf die Nadeln desselben durchaus keine unmittelbare Einwirkung hatte, wovon ich mich durch vorläufige Versuche überzeugte. Der Hufeisenmagnet bestand aus 5 einzelnen, durch Schrauben stark mit einander verbundenen, gebogenen Stahlstäben, von welchen der mittelste an den Enden um 0,7 Zoll englisch hervorstand; er konnte, den Anker mit einbegriffen, etwas über 22 Pf. tragen. Die Länge der Stäbe war 23 Zoll, die Breite 0,8 und die Dicke 0,22; nur der mittelste, vor den

---

*) Bei dieser Wiederholung brachte ich den Funken mittelst einer Spirale eines Drathes von 70 Fuss Länge und 0,044 Zoll Dicke sehr schön zu Stande. Die Vorrichtung war der von Nobili angegebenen nachgebildet, so dass der Hufeisenmagnet (von 22 Pf. Tragkraft) selbst die Schliessung des Stroms bewirkte.

**) In dieser Abhandlung sind die Maasse immer in englischen Zollen ausgedrückt, wenn es nicht ausdrücklich anders bemerkt ist.

andern hervorragende, Stab war 0,4 Zoll dick. Der Abstand beider Arme war 1,64 Zoll.

Um das Annähern und Entfernen der Spirale und zu gleicher Zeit die Ablesung der Abweichung der Nadel ohne fremde Hülfe vollenden zu können, konstruirte ich mir meinen Apparat folgendermaassen: Ich bedeckte den Multiplicator nicht mit seiner Glasglocke, sondern mit einem an beiden Seiten offenen gläsernen Cylinder und schloss diesen mittelst einer Spiegelglasplatte; dann stellte ich über ihm einen guten Spiegel unter 45° Neigung auf und betrachtete das in demselben sich spiegelnde Bild der getheilten Multiplicatorscheibe von einem Standpunkt neben dem Magnete aus mittelst eines guten Münchner Telescops; die Ablesung konnte auf diese Weise vollkommen scharf geschehn und war sicherer als mit dem blossen Auge in der Nähe, weil bei dieser Entfernung und dem fixen Stande des Auges die Parallaxe des, von dem getheilten Kreise etwas abstehenden, Zeigers, als verschwindend angesehn werden kann. Die Art der Erregung des electrischen Stroms in der Spirale war die von Nobili angegebene; ich umwickelte nämlich einen Cylinder von weichem Eisen, der als Anker diente und an den Stellen, wo er an dem Magneten angelegt wurde, flach gefeilt worden war, mit dem electromotorischen Drathe und legte ihn dann an den Magneten an oder zog ihn plötzlich von demselben fort, wodurch der im Augenblicke in dem Anker entstehende oder wieder verschwindende Magnetismus den momentanen electrischen Strom hervorbrachte. Da aber das Abziehen viel sicherer, plötzlicher und gleichförmiger geschehn kann, als das Anlegen, so habe ich bei allen nachfolgenden Untersuchungen immer nur die Resultate angeführt, die durch Abziehen des Ankers oder plötzliche Entfernung des Magnetismus im Eisen hervorgebracht wurden. Hierbei bemerke ich zugleich, dass es für meine Versuche einerlei ist, ob der Magnetismus des Eisens wirklich plötzlich völlig verschwindet oder ob ein Theil desselben noch zurückgehalten wird, wenn nur die zurückbleibende Quantität von Magnetismus nach jedem Abziehen dieselbe ist; hiervon überzeugte ich mich aber häufig durch die Uebereinstimmung einer und derselben Beobachtung bei mehrmaliger Wiederholung. Diese zeigte mir auch, dass

*

die electromotorische Kraft des Magneten, wenigstens wenn er schon eine Anzahl Abreissungen des Ankers erlitten hat, nicht geschwächt wurde; Beweise dafür werden sich auch aus den später anzuführenden Beobachtungen öfters entlehnen lassen. Bei der oben beschriebenen Anordnung des Apparats konnte ich nun mit der rechten Hand die Abreissung des Ankers von dem, an dem Tische befestigten, Magneten ausführen, während zu gleicher Zeit mein Auge im Fernrohr die dadurch verursachte Abweichung des Multiplicatorzeigers beobachtete. Dieser Zeiger war ein dünnes Holzstäbchen, welches an dem Drathe, der den beiden Multiplicatornadeln als gemeinschaftliche Axe diente, mittelst etwas Wachses befestigt war und einen Durchmesser des getheilten Kreises bildete; dadurch, dass ich die Abweichung für jedes daraus abzuleitende Resultat erst an dem einen, dann an dem andern Ende des Zeigers beobachtete, befreite ich dieses Resultat von dem Einfluss der Excentricität der Axe der Nadeln, und, indem ich erst das Ende *A*, dann das Ende *B* der Spirale dem Nordarme des Magneten zukehrte, also auch die Nadeln des Multiplicators erst nach der einen, dann nach der andern Seite abweichen liess, machte ich das Resultat von einem zweiten Fehler unabhängig, der entsteht, wenn die Caconfaden, an welchen die Nadeln des Multiplicators hängen, eine Drehung haben sollten. Ich vermied ferner sorgfältig jede Verrückung des Multiplicators während einer Reihe zusammengehöriger Versuche, weil unmöglich jede Windung des Multiplicators so wirken kann, wie die andre (dieses würde voraussetzen, dass sie alle genau in einer Ebene und einander parallel lägen) und weil, wenn auch dieses vorausgesetzt werden könnte, die Wirkung doch verschieden ausfallen müsste, je nachdem die Nadel in ihrem ruhigen Stande den Windungen genau parallel hing oder einen grössern oder kleinern Winkel mit der Richtung derselben machte. Auch weichen die Stellungen der Nadeln bei ihrem Ruhestande höchstens um $0°,3$ von einander ab. Nach Obigem erforderte also ein vollständiger Versuch immer 4 Beobachtungen, 2 nämlich (an beide Enden des Zeigers) für die Stellung, wo das Ende *A* der Spirale zum Nordpole gekehrt war und 2, wo *B* zum Nordpol gewandt war. Ausserdem aber habe ich meistentheils jede einzelne Beobachtung 2 mal gemacht, um

mich zu überzeugen, dass nicht ein zufälliger Fehler der Ablesung sich eingeschlichen habe; wichen die beiden Beobachtungen bedeutend von einander ab, so wiederholte ich sie beide nochmals.

. . . . . . . . . .

Die ersten vorläufigen Versuche stellte ich über den Einfluss der Verbindungen der Leitungsdräthe mit der electromotorischen Spirale und dem Multiplicatordrathe an, ob ich mich nämlich damit begnügen konnte, die von der umsponnenen Seide befreiten und blankgescheuerten Drathenden nur recht innig um einander zu winden, oder ob eine innigere Verbindung (z. B. durch Eintauchen in Quecksilber) nöthig sey. Ich ging dabei von der Ansicht aus, dass, wenn die Verbindung durch mehrmaliges Umeinanderwinden nicht hinlänglich wäre, eine Vermehrung der Windungen nothwendig den electrischen Strom verstärken müsste; ich machte also folgende Versuche:

Der Anker ward mit 10 Windungen eines besponnenen Kupferdrathes umwunden und die Leitungsdräthe wurden mit den Enden dieser Spirale nur durch einmaliges Umdrehen der Dräthe verbunden; das Resultat aus den 4 Ablesungen gab 36°,8. – Hierauf wurde dieselbe Verbindung durch 10maliges möglichst festes Umeinanderwinden der Drathenden hervorgebracht; die Ablenkung betrug wiederum 36°, 8; endlich presste ich die letzte Verbindung noch so stark als möglich mit der Kneifzange zusammen, so dass sie stark abgeplattet wurde, die Ablenkung war 36°,75. Wir können also die Verbindung durch 10maliges festes Umeinanderwinden als völlig hinreichend betrachten und diese ward daher bei allen folgenden Versuchen angewandt; die Verbindungstellen wurden dann noch mit Seidenzeug umwickelt, um sie vor gegenseitiger Berührung zu sichern.

Die zweite vorläufige Untersuchung stellte ich darüber an, ob es Einfluss habe auf den electrischen Strom, wenn ich die electromotorische Spirale mehr zum Nordarm oder zum Südarm des Magneten auf dem Anker hinschob. Zu dem Ende erhielt ich mit 2 Windungen folgende Resultate:

Die Windungen, bis zur Berührung des Nordarms des Magneten geschoben, ergaben eine Ablenkung . . . . . . . . . . . . . = 5°,55
Die Windungen, bis zur Berührung des Südarms des Magneten geschoben, ergaben eine Ablenkung . . . . . . . . . . . . . = 5,55
Die Windungen, in die Mitte zwischen beiden Armen geschoben, ergaben eine Ablenkung . . . . . . . . . . . . . . . . = 5,60

also auch dieser Einfluss der verschiedenen Stellung der Spirale auf dem Anker ist unmerklich; in der Folge stellte ich sie immer so, dass die Spirale die Mitte des Ankers einnahm.

Endlich bestimmte ich drittens, ehe ich zu den eigentlich beabsichtigten Versuchen ging, die Dicke der angewandten Kupferdräthe; ich wog nämlich 2 Fuss eines jeden (entblösst von der umsponnenen Seide) ab, wodurch mir die Verhältnisse ihrer Durchschnitte gegeben wurden, worauf es hier vorzüglich ankam; um aber doch auch ihre absolute Dicke zu haben, maass ich den dicksten mittelst einer Micrometervorrichtung; so ergaben sich folgende Resultate, wo ich die Dräthe, vom dünnsten an gerechnet, mit N°. 1, 2, 3 und 4 bezeichne.

| | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| 2 Fuss des Drathes | N°. 1 | wogen | = 23,3 Gr.; | absolute Dicke | = 0,023 Zoll |
| 2 — — — | N°. 2 (Multiplicatordrath) | — | = 27,4 —; | — — | = 0,025 — |
| 2 — — — | N°. 3 | — | = 83,9 —; | — — | = 0,044 — |
| 2 — — — | N°. 4 | — | = 166,1 —; | — — | = 0,061 — |

Alle 4 Arten von Drath waren gut besponnen, so dass kein Metall an ihnen zu erkennen war, ausser an den Enden, die zur Verbindung dienten.

Ich gehe jetzt zu den eigentlichen Versuchen über:

### I. *Ueber den Einfluss der Anzahl von Windungen auf die in ihnen hervorgerufene electromotorische Kraft.*

Bei diesen Versuchen verband ich mit dem Multiplicator den Drath N°. 3, so dass der Leitungsdrath und die electromotorische Spirale aus einem und demselben

Stücke gebildet wurden; die Länge dieses Drathes war etwa 50 Fuss, sie ist aber hier gleichgültig, da sie bei allen Versuchen dieselbe blieb. Die Versuche selbst sind in der folgengen Tafel enthalten.

| Anzahl der Windungen | Einzelne Abweichungen | | | | Mittlere Abw. aus allen Versuchen, od. $a$ | $a$ in Minuten | $\frac{1}{2}\alpha$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | Seite $A$ d. Spirale z. Nordpol | | Seite $B$ d. Spirale z. Nordpol | | | | |
| | Ende $a$ d. Zg. | Ende $b$ d. Zg. | Ende $a$ d. Zg. | Ende $b$ d. Zg. | | | |
| 2 | 5°,7 | 5°,8 | 5°,3 | 5°,8 | 5°,65 | 5° = 39 | 2° = 49 |
| 4 | 12, 1 | 12, 9 | 11, 1 | 12, 0 | 12, 00 | 12 = 00 | 6 = 00 |
| 8 | 25, 7 | 25, 8 | 22, 9 | 25, 2 | 24, 90 | 24 = 54 | 12 = 27 |
| 9 | 29, 5 | 30, 1 | 26, 2 | 28, 5 | 28, 32 | 28 = 19 | 14 = 15 |
| 10 | 32, 5 | 33, 3 | 29, 4 | 32, 0 | 31, 80 | 31 = 48 | 15 = 54 |
| 12 | 39, 8 | 40, 9 | 35, 8 | 38, 6 | 38, 77 | 38 = 46 | 19 = 23 |
| 14 | 47, 4 | 48, 8 | 40, 8 | 45, 9 | 45, 43 | 45 = 43 | 22 = 51 |
| 15 | 49, 3 | 50, 9 | 45, 0 | 49, 0 | 48, 55 | 48 = 33 | 24 = 16 |
| 16 | 55, 7 | 56, 8 | 47, 6 | 52, 3 | 53, 10 | 53 = 6 | 26 = 33 |
| 18 | 63, 1 | 64, 4 | 54, 1 | 57, 8 | 59, 80 | 59 = 48 | 29 = 54 |
| 20 | 71, 0 | 71, 8 | 62, 8 | 66, 6 | 68, 05 | 68 = 3 | 34 = 1 |

Aus dieser Reihe von Versuchen müssen wir nun die electromotorische Kraft der Spirale für jede Anzahl von Windungen herleiten, wozu uns folgende Betrachtungen dienen sollen:

Die Einwirkung des electrischen Stroms in dem Multiplicatordrathe auf die Magnetnadel ist eine augenblickliche, da der Strom selbst nur einen Augenblick existirt, wir werden uns diese Einwirkung also wie einen Stoss auf die Nadel denken können und die Kraft dieses Stosses durch die Geschwindigkeit, die er der Nadel ertheilt, messen können. Die Geschwindigkeit der Nadel ist aber bei ihrem Ausgange offenbar so gross als diejenigen, welche sie beim Zurückschwingen an dem Ausgangspunkte

wieder erlangt; sie wird also, wenn $f$ eine Constante bedeutet, ausgedrückt werden können durch

$$A = f\sqrt{(\text{sin. vers. } \alpha)}$$

wo $A$ die gesuchte Ausgangsgeschwindigkeit oder auch nach Obigem, die Grösse des Stroms im Multiplicatordrathe, $\alpha$ aber den Ablenkungswinkel der Nadel durch diese Kraft bedeutet. Dieser Ausdruck verwandelt sich aber durch Substitution von $2 \sin.^2 \frac{1}{2} \alpha$ statt sin. vers. $\alpha$ in folgendem

$$A = p \cdot \sin. \tfrac{1}{2} \alpha$$

wenn wir $p = f\sqrt{2}$ setzen.

Um nun den Leitungswiderstand zu finden, den der electrische Strom in den verschiedenen Dräthen erleidet, reducire ich die Längen derselben zuerst alle auf einen Querschnitt und zwar auf den des Multiplicatordrathes nach dem Satze, dass 2 Dräthe desselben Metalls dann denselben Leitungswiderstand leisten, wenn sich ihre Längen wie ihre Querschnitte verhalten (siehe *Ohms* galvanische Kette). Alsdann drücken die reducirten Längen der Dräthe ihren Leitungswiderstand aus. Um daher die Aufgabe allgemein aufzufassen, so nehme ich an, der Multiplicator, die Leitungsdräthe und die electromotorische Spirale (mit ihren freien Enden) hätten die drei reducirten Längen $L$, $l$ und $\lambda$ und die in der Spirale erzeugte electromotorische Kraft heisse $x$, so wird $\frac{x}{L+l+\lambda}$ der wirklich statt findende Strom sein, und wir haben daher

$$\frac{x}{L+l+\lambda} = p \sin. \tfrac{1}{2} \alpha$$

$$x = (L+l+\lambda) \cdot p \cdot \sin. \tfrac{1}{2} \alpha \qquad \text{(A)}$$

Nehmen wir nun die electromotorische Kraft in einer Windung des Drathes als Einheit hat, bezeichnen die unbekannte Ablenkung durch eine Windung $= \xi$ und ihre reducirte Länge $= (\lambda)$; und statuiren wir die an sich wahrscheinliche Hypothese, dass sich bei einer und derselben Weite der Windungen die electromotorische Kraft direct wie die Anzahl der Windungen verhalte, so wird für die Anzahl $n$ und ihre zugehörige reducirte Länge $\lambda_n$ (diese ist nicht nothwendig $n\lambda$, weil die

freien Enden der Spiralen für jede Anzahl von Windungen nicht in demselben Verhältnisse zuzunehmen brauchen) folgendes Verhältniss stattfinden

$$\frac{1}{n} = \frac{(L+l+(\lambda))\, p \cdot \sin.\tfrac{1}{2}\xi}{(L+l+\lambda_n)\, p \cdot \sin.\tfrac{1}{2}\alpha}$$

$$\text{folg.}\quad \sin.\tfrac{1}{2}\alpha = n \cdot \frac{L+l+(\lambda)}{L+l+\lambda_n} \cdot \sin.\tfrac{1}{2}\xi \qquad (B)$$

Bei den so eben mitgetheilten Versuchen blieb $l+\lambda$ für jede Anzahl von Windungen ein und dieselbe Grösse, da der Leitungs- und Spiraldrath zusammen nur ein Stück ausmachten, $L$ bleibt ohnehin dasselbe, folglich haben wir $L+l+(\lambda) = L+l+\lambda_n$ und folglich verwandelt sich die Gleichung $B$ in folgende:

$$\sin.\tfrac{1}{2}\alpha = n \sin.\tfrac{1}{2}\xi \qquad (C)$$

Setzen wir statt $\frac{1}{2}\alpha$ die in der letzten Columne unserer Versuchstabelle enthaltenen Werthe, so werden wir 11 Gleichungen erhalten, aus welchen sich nach der Methode der kleinsten Quadrate $\xi$ bestimmen lassen wird, und bringen wir diesen Werth von $\xi$ in die Gleichung (C), so werden sich die zur Anzahl $n$ von Windungen gehörigen Ablenkungen $\alpha$ ergeben, und die Differenzen dieser Werthe und der beobachteten werden uns belehren, ob die angenommene Hypothese der Proportionalität der Anzahl von Windungen und der electromotorischen Kraft in der That durch die Beobachtung bestätigt wird. — Die bekannte Formel für $\sin.\frac{1}{2}\xi$ nach der Methode der kleinsten Quadrate ist:

$$\sin.\tfrac{1}{2}\xi = \frac{\Sigma\,(n \cdot \sin.\tfrac{1}{2}\alpha)}{\Sigma\,(n^2)}$$

und nach Ausführung der Rechnung ergiebt sich aus unserer obigen Versuchstabelle

$$\xi = 3^\circ\, 9' \quad \text{oder} \quad \log.\sin.\tfrac{1}{2}\xi = 8,43989$$

Dieser Werth von $\xi$ giebt für $\alpha$ folgende Werthe:

| $\alpha$ | | Differenzen | | $\alpha$ | | Differenzen | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| berechnet | beobachtet | in Graden u. Minuten | in Graden | berechnet | beobachtet | in Graden u. Minuten | in Graden |
| 6°= 18 | 5°= 39 | + 0°= 39 | + 0°,6 | 45°= 22 | 45°= 26 | — 0°= 4 | — 0°,1 |
| 12 = 38 | 12 = 00 | + 0 = 38 | + 0, 6 | 48 = 48 | 48 = 32 | + 0 = 16 | + 0, 3 |
| 25 = 36 | 24 = 54 | + 0 = 32 | + 0, 5 | 52 = 16 | 53 = 6 | — 0 = 50 | — 0, 8 |
| 28 = 42 | 28 = 19 | + 0 = 23 | + 0, 4 | 59 = 26 | 59 = 48 | — 0 = 22 | — 0, 4 |
| 31 = 58 | 31 = 48 | + 0 = 10 | + 0, 2 | 66 = 50 | 68 = 1 | — 1 = 11 | — 1, 2 |
| 38 = 36 | 38 = 46 | — 0 = 10 | + 0, 2 | | | | |

Die Uebereinstimmung der berechneten Abweichungen mit den beobachteten bestätigt unsere Voraussetzung, dass nämlich die electromotorische Kraft wachse wie die Anzahl von Windungen.

Eine zweite Reihe von Versuchen über denselben Gegenstand stellte ich mit demselben Drathe N°. 3 an, nur war in ihm die Länge des Draths, durch welche der Strom hindurchgehn musste, nicht mehr bei jeder Anzahl von Windungen dieselbe; wir werden daher zu unsrer allgemeinen Formel (B) zurückgehn müssen. Sie war

$$\sin.\tfrac{1}{2}\alpha = n \cdot \frac{L+l+(\lambda)}{L+l+\lambda_n} \cdot \sin.\tfrac{1}{2}\xi.$$

Der Drath des Multiplicators und der Leitungen blieb immer derselbe und war, auf den Durchmesser des Multiplicatordrathes reducirt,

$$L+l = 673,25 \text{ Zoll.}$$

Die Längen $\lambda$, $\lambda_{,}$, $\lambda_{,,}$ u. s. w. waren aber veränderlich, ich habe daher diese Werthe, ebenfalls auf den Multiplicatordrath reducirt, der folgenden Tabelle der Versuche hinzugefügt. $L+l+(\lambda)$ ist $= 681,45$

| Anzahl der Windung. | Abweichungen | | | | Einzelne Mittel | Vollständige Mittel od. $a$ | $\lambda$ | $L+l+\lambda$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | Seite $A$ d. Spir. z. Nordpol | | Seite $B$ d. Spir. z. Nordpol | | | | | |
| | Ende $a$ d. Zg. | Ende $b$ d. Zg. | Ende $a$ d. Zg. | Ende $b$ d. Zg. | | | | |
| 5 | 18, 5 | 18, 5 | 19, 8 | 20, 5 | 19, 33 | 19, 40 | 17 | 690,25 |
| | 18, 6 | 18, 8 | 20, 2 | 20, 3 | 19, 47 | | | |
| 10 | 37, 3 | 37, 6 | 39, 6 | 39, 3 | 38, 45 | 38, 41 | 28 | 701,25 |
| | 37, 3 | 37, 5 | 39, 4 | 39, 3 | 38, 37 | | | |
| 15 | 57, 8 | 58, 7 | 58, 6 | 58, 2 | 58, 32 | 58, 13 | 39 | 712,25 |
| | 57, 4 | 58, 2 | 58, 6 | 57, 6 | 57, 95 | | | |
| 20 | 81, 4 | 82, 3 | 80, 7 | 79, 8 | 81, 05 | 80, 91 | 50 | 723,25 |
| | 81, 3 | 82, 3 | 79, 7 | 79, 8 | 80, 77 | | | |
| 25 | 111, 0 | 112, 7 | 103, 1 | 101, 9 | 106, 67 | 106, 67 | 61 | 734,25 |
| | 110, 0 | 112, 8 | 103, 7 | 102, 2 | 106, 67 | | | |

Wenden wir die Methode der kleinsten Quadrate auf diese Tabelle an, wie wir sie auf die erste anwandten, so erhalten wir

$$\xi = 3^\circ, 97 \text{ und log. sin. } \tfrac{1}{2}\xi = 8, 53944$$

und mit diesem Werthe erhalten wir aus der Formel (B) folgende Abweichungen:

| Anzahl der Windungen | Abweichungen | | Differenz |
|---|---|---|---|
| | berechnet | beobachtet | |
| 5 | 19, 53 | 19, 40 | + 0, 13 |
| 10 | 39, 00 | 38, 41 | + 0, 59 |
| 15 | 59, 07 | 58, 13 | + 0, 94 |
| 20 | 80, 67 | 80, 91 | — 0, 24 |
| 25 | 105, 67 | 106, 67 | — 1, 00 |

Auch hier stimmt die Rechnung mit der Beobachtung gut; da ich aber vermuthete, diese Uebereinstimmung noch besser zu erreichen, wenn ich die Leitungslänge für

alle Versuche gleich bleiben liess, so machte ich noch eine Reihe von Versuchen ähnlich der vorigen, mit einem andern Multiplicator, wo $\lambda$, $\lambda'$ etc. sich immer gleich bleiben; sie ist zugleich mit mehr Sorgfalt angestellt als die vorigen Reihen, da jede der in der folgenden Tabelle enthaltenen Zahlen das Mittel aus 3 Beobachtungen ist, bei welchem Mittel ich aber nur eine Decimalstelle beibehielt. Die mit 1, 2, 3, 4 bezeichneten Columnen haben dieselbe Bedeutung, wie die 4 Columnen der früheren Tabellen

| Anzahl der Windungen | Abweichungen | | | | Mittlere Abweich. od. $\alpha$ |
|---|---|---|---|---|---|
| | 1 | 2 | 3 | 4 | |
| 5 | 8,6 | 8,7 | 8,5 | 8,6 | 8, 63 |
| 10 | 17,5 | 17,8 | 17,2 | 17,1 | 17, 40 |
| 15 | 26,4 | 27,2 | 26,6 | 25,6 | 26, 45 |
| 20 | 35,5 | 35,3 | 35,6 | 34,6 | 35, 25 |
| 25 | 45,2 | 46,0 | 45,0 | 44,2 | 45, 10 |
| 30 | 54,6 | 56,5 | 55,0 | 54,1 | 55, 05 |

Hieraus berechnet sich mittelst der kleinsten Quadrate

$$\xi = 1,73 \text{ und } \log. \sin. \tfrac{1}{2}\xi = 8,18478$$

folglich haben wir für die berechneten Werthe von $\alpha$

| Anzahl der Windungen | $\alpha$ | | Differenz |
|---|---|---|---|
| | berechnet | beobachtet | |
| 5 | 8, 77 | 8, 60 | + 0, 17 |
| 10 | 17, 60 | 17, 40 | + 0, 20 |
| 15 | 26, 53 | 16, 45 | + 0, 08 |
| 20 | 35, 58 | 35, 25 | + 0, 33 |
| 25 | 45, 00 | 45, 10 | — 0, 10 |
| 30 | 54, 67 | 55, 05 | — 0, 38 |

Hier ist die Uebereinstimmung für diese Art von Versuchen sehr gross, so dass wir den Satz als völlig begründet ansehen können, dass sich nämlich:

„*Die electromotorische Kraft, welche der Magnet in der Spirale erregt,*
„*bei gleicher Grösse der Windungen und bei gleicher Dicke und gleicher Sub-*
„*stanz des Drathes, direct wie die Anzahl der Windungen verhalte.*“

Uebrigens darf es unsrer Aufmerksamkeit nicht entgehn, dass bei allen 3 Beobachtungsreihen die Differenzen der berechneten und beobachteten Abweichungen anfangs positiv und dann negativ sind, was anzuzeigen scheint, dass die electromotorische Kraft in etwas schnellerem Verhältniss wachse als die Anzahl der Windungen; allein die Differenzen sind so klein und werden bei grössrer Sorgfalt in den Beobachtungen (wie die dritte Beobachtungsreihe es beweist) immer kleiner, so dass ich diese kleine Unregelmässigkeit dem Einflusse irgend eines besonderen Umstandes zuschreibe, den zu entdecken mir bis jetzt nicht gelungen ist.

### II. *Ueber den Einfluss der Weite der Windungen der Spirale auf die Erregung der electromotorischen Kraft in derselben.*

Bei diesen Versuchen bediente ich mich anfangs des Hufeisenmagneten, allein es zeigte sich mir bald, dass vermittelst desselben nur falsche Resultate geliefert werden konnten. Bei bedeutender Erweiterung des Umfangs der Spirale rückt diese nämlich dem obern Bogen des Magneten immer näher, so dass beim Abziehen des Ankers nicht blos das plötzliche Verschwinden des Magnetismus in diesem, sondern auch das zugleich statt findende plötzliche Entfernen von jenem obern Theil des Magneten (der Bucht des Hufeisens) auf die Spirale einwirkt und zwar ungleich bei ungleichem Durchmesser derselben; die electromotorische Kraft wird dadurch bei grössern Spiralen grösser als ohne diesen Umstand. Deshalb nahm ich 2 starke gradlinigte magnetische Systeme, wovon jedes aus 10 einzelnen Magnetstäben bestand, legte sie mit ihren ungleichnamigen Polen gegen einander, so dass sie in gerader Richtung lagen und brachte den eisernen Cylinder, der mir bei den oben mit-

getheilten Versuchen als Anker des Hufeisenmagneten diente, zwischen die Pole derselben, während die Spirale den Cylinder umgab; hierauf liess ich die Magnete plötzlich durch 2 Gehülfen nach entgegengesetzten Seiten aus einander ziehen.

Ich wand zuerst 10 Windungen des Drathes N°. 2 um den Eisencylinder;

der Durchmesser der Windungen = 0,73 Zoll

hierauf wand ich 10 Windungen des Drathes N°. 2 um eine hölzerne Scheibe;

der Durchmesser der Windungen = 6,57 Zoll

die hölzerne Scheibe war in ihrem Mittelpunkt durchbohrt und ward beim Versuch auf den Eisencylinder geschoben. Die Beobachtung ergab

| | Abweichungswinkel | | | | Mittel |
|---|---|---|---|---|---|
| | 1 | 2 | 3 | 4 | |
| Engere Wind. | 24,6 | 27,1 | 26,4 | 26,5 | 26, 15 |
| Weitere Windungen | 22,8 | 22,7 | 22,0 | 22,5 | 22, 50 |
| | 23,4 | 23,5 | 21,6 | 23,2 | 22, 92 |
| Engere Wind. | 24,8 | 27,7 | 26,3 | 26,6 | 26, 35 |

Ich beobachtete die Abweichung der weitern Spirale zwischen den der engern, damit der Fehler, welcher durch Verminderung der magnetischen Kraft der Magnetsysteme hätte entstehn können, eliminirt würde. Wir haben also:

für die engere Spirale den Ablenkungswinkel $\alpha = 26{,}25$

für die weitere Spirale den Ablenkungswinkel $\alpha' = 22{,}71$

Die Länge des Multiplicatordrathes und der Leitungsdräthe (auf den Durchmesser des erstern reducirt) war wie in den früheren Versuchen, d. h. sie betrugen zusammen 673,25 oder $L + l = 673{,}25$, allein $\lambda$ ist für die engeren Windungen $= 28$ und für die weiteren $\lambda' = 203$. Nehmen wir also die Formel (A) zu Hülfe, so haben wir

für die enge Spirale $x = (L + l + \lambda)\, p \cdot \sin. \tfrac{1}{2} \alpha = 701{,}25 \cdot p \cdot \sin. (13^\circ 7')$

für die weite Spirale $x' = (L + l + \lambda')\, p \cdot \sin. \tfrac{1}{2} \alpha' = 876{,}25 \cdot p \cdot \sin. (11^\circ 21')$

folglich das Verhältniss der electromot. Kräfte od. $\frac{x'}{x} = \frac{876{,}25 \cdot \sin.(11^\circ 21')}{701{,}25 \cdot \sin.(13^\circ 7')} = 1{,}0838$ also nicht weit von 1 abweichend d. h. die electromotorische Kraft ist in beiden Spiralen dieselbe.

Noch auffallender suchte ich diesen Satz durch folgenden Versuch zu begründen. Ich wand nämlich den Drath N°. 2 in 6 Windungen um ein grosses hölzernes Rad von 28 Zoll Durchmesser und schob das Rad auf den Eisencylinder. Nachdem ich hierauf den Versuch, wie im vorigen Falle ausgeführt hatte, wand ich ebenfalls 6 Windungen desselben Drathes unmittelbar um denselben Eisencylinder, wo also die Windungen wieder wie oben 0,73 Zoll im Durchmesser hatten. Der Versuch ergab

| | Abweichungswinkel | | | | Mittel oder $\alpha$ | $\lambda$ | $L+l+\lambda$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | 1 | 2 | 3 | 4 | | | |
| Engere Wind. | 13,1 | 15,8 | 12,8 | 12,4 | 13,52 | 19,2 | 692,45 |
| Weitere Wind. | 7,1 | 8,7 | 7,1 | 8,7 | 7,90 | 549,2 | 1222,75 |

folglich $\frac{x'}{x} = \frac{1222{,}75 \cdot \sin.(3^\circ 52)}{692{,}45 \cdot \sin.(6^\circ 45',5)} = 1{,}0107$

Hier nähert sich das Verhältniss der beiden electromotorischen Kräfte noch mehr der Einheit, als im vorigen Falle, obgleich das Verhältniss der Durchmesser der Spiralen = 1 : 38,3 ist. Wir können daher den Satz als durch die Erfahrung erwiesen ansehn, dass

„*die electromotorische Kraft, welche der Magnetismus in den ihn umgebenden „Spiralen erregt, bei jeder Grösse der Windungen dieselbe ist.*

Da aber ein spiralförmig den Anker umschliessender Drath, je grösser sein Durchmesser oder sein Abstand vom Anker wird, auch in eben dem Verhältnisse eine grössere Länge der Einwirkung des Magnetismus im Anker darbietet, so folgt aus dem so eben aufgefundenen Gesetze, dass auf ein und dasselbe Theilchen des

Drathes die electromotorische Einwirkung des Magneten in einfachem Verhältnisse der Entfernung abnehme. Dieses ist gleichsam die Umkehrung des von Biot im Gebiete des Electromagnetismus nachgewiesenen Gesetzes, welches bekanntlich aussagt, dass die Wirkung eines electrischen Schliessungsdrathes auf eine Magnetnadel im einfachen Verhältniss der Entfernung abnimmt und es folgt aus unsern Versuchen, wie aus denen Biots, dass die Wirkung eines Theilchens der den Magneten umkreisenden electrischen Ströme auf jedes Theilchen der Spirale im umgekehrten Verhältnisse der Quadrate der Entfernungen stehe.

Auch folgt unmittelbar aus dem so eben nachgewiesenen Gesetze, dass der in verschiedenen, den Anker umschliessenden, Drathringen durch Abziehen desselben vom Magneten hervorgebrachte electrische Strom sich umgekehrt wie der Durchmesser der Ringe verhalte; es ist nämlich die electromotorische Kraft in jedem Ringe dieselbe, der Leitungswiderstand aber wächst wie der Durchmesser der Ringe, folglich nimmt der electrische Strom, der Quotient der electromotorischen Kraft durch den Leitungswiderstand, ab, so wie der Durchmesser der Ringe wächst.

### III. *Einfluss der Dicke des Drathes der electromotorischen Spirale auf die in ihr hervorgerufene electromotorische Kraft.*

Diese Versuche habe ich wiederum mittelst des Hufeisenmagneten angestellt, da hier die Windungen der Dräthe immer dieselbe Grösse hatten. Ich wandte hierbei immer 10 Windungen an, die ich aus den Dräthen N°. 1, N°. 3 und N°. 4 bildete und bei welchen sich die Querschnitte wie die Zahlen 233 : 839 : 1661 verhalten. Die ganze Länge der Windungen war bei jeder Sorte 33 Zoll. Die Ablenkungen sind in der nachfolgenden Tabelle enthalten:

| | Ablenkungswinkel | | | | Mittel | |
|---|---|---|---|---|---|---|
| | 1 | 2 | 3 | 4 | | |
| Spirale aus N°. 1 | 39, 3 | 40, 4 | 35, 1 | 37, 8 | 38, 15 | 38, 19 |
| | 39, 3 | 40, 4 | 35, 2 | 38, 8 | 38, 22 | |
| aus N°. 3 | 36, 8 | 39, 6 | 40, 2 | 42, 0 | 39, 65 | 39, 60 |
| | 36, 4 | 39, 4 | 40, 4 | 42, 0 | 39, 55 | |
| aus N°. 4 | 40, 5 | 42, 4 | 37, 5 | 39, 3 | 39, 92 | 39, 74 |
| | 40, 3 | 40, 4 | 37, 5 | 40, 1 | 39, 57 | |
| aus N°. 1 | 38, 6 | 40, 6 | 35, 7 | 37, 8 | 38, 17 | 38, 00 |
| | 38, 7 | 40, 0 | 35, 2 | 37, 4 | 37, 82 | |

Fassen wir die Beobachtungen für N°. 1 am Anfang und Ende der Versuchsreihe zusammen und nehmen das Mittel daraus, so haben wir folgende Abweichungen

für N°. 1 die Ablenkung oder $\alpha = 38,1$
für N°. 3 — — — $\alpha' = 39,6$
für N°. 4 — — — $\alpha'' = 39,7$

Aus dem Verhältnisse der Querschnitte, in welchem der des Multiplicatordrathes durch 274 ausgedrückt wird, findet man folgende reducirte Längen (auf den Multiplicatordrath oder N°. 2 bezogen) unserer 3 Spiralen, nämlich:

$$\lambda = 38,81 \text{ folgl. } L + l + \lambda = 712,06$$
$$\lambda' = 10,78 \text{ — } L + l + \lambda' = 684,03$$
$$\lambda'' = 5,44 \text{ — } L + l + \lambda'' = 678,69$$

und folglich ergiebt die Gleichung (A)

$$x = 712,06 \cdot p \cdot \sin. (19^\circ \,{\text -}\, 3')$$
$$x' = 684,03 \cdot p \cdot \sin. (19 \,{\text -}\, 48)$$
$$x'' = 678,69 \cdot p \cdot \sin. (19 \,{\text -}\, 51)$$

oder, die beiden letzten electromotorischen Kräfte mit der ersten verglichen, die Verhältnisse

$$\frac{x}{x'} = \frac{712,06 \cdot \sin. (19^\circ \,{\text -}\, 3')}{684,03 \cdot \sin. (19 \,{\text -}\, 48)} = 1,00305 \text{ und } \frac{x}{x''} = \frac{712,06 \cdot \sin. (19^\circ \,{\text -}\, 3')}{678,69 \cdot \sin. (19 \,{\text -}\, 51)} = 1,0085$$

Beide Verhältnisse sind so wenig von der Einheit verschieden, dass wir mit vollem Rechte daraus schliessen können, dass die electromotorische Kraft, die der Magnet in dem Drathe N°. 1 hervorrief, eben so stark ist, als die in den Dräthen N°. 3 u. 4, obgleich letztere einen fast 4 und 7 mal grösseren Querschnitt haben, dass folglich die electromotorische Kraft unabhängig ist von der Dicke der Dräthe. Eine zweite Bestätigung dieses Satzes finden wir in folgendem, bereits früher angestellten, Versuche

| | Ablenkungswinkel | | | | Mittel |
|---|---|---|---|---|---|
| | 1 | 2 | 3 | 4 | |
| 10 Wind. d. Drathes N°. 3 | 36, 3 | 37, 8 | 33, 5 | 35, 7 | 35, 82 |
| 10 Wind. d. Drathes N°. 2 | 36, 0 | 37, 0 | 32, 1 | 34, 9 | 34, 0 } 34, 95 |
| | 35, 4 | 36, 8 | 32, 6 | 35, 0 | 35, 9 |
| 10 Wind. d. Drathes N°. 3 | 33, 6 | 35, 5 | 35, 7 | 37, 3 | 35, 52 |

Folglich haben wir für N°. 2 $\alpha = 34{,}95$ ferner ist $\lambda = 34{,}00$ also $L + l + \lambda = 707{,}25$

— — — — N°. 3 $\alpha' = 35{,}67$ — — $\lambda' = 11{,}52$ und $L + l + \lambda' = 684{,}77$

$$\text{folglich } \frac{x}{x'} = \frac{707{,}25 \cdot \sin.\,(17° \,{:}\, 29')}{684{,}77 \cdot \sin.\,(17 \,{:}\, 50)} = 1{,}013$$

Auch hier ist das Verhältnis der Einheit so nahe, dass wir hieraus, vereint mit dem obigen Resultate, den Satz als begründet ansehn können, dass

*die, durch den Magneten in der Spirale hervorgerufene, electromotorische Kraft für jede Dicke der Dräthe dieselbe bleibe, oder von ihr unabhängig sei.*

Aus diesem Gesetze folgt wiederum unmittelbar, dass in Ringen von Dräthen verschiedner Dicke, welche den Anker des Magneten umgeben, der durch Abziehen desselben hervorgerufene *electrische Strom* sich direct wie die Querschnitte der Dräthe verhalte; denn die electromotorische Kraft bleibt dieselbe, der Leitungswiderstand nimmt aber umgekehrt wie die Querschnitte ab, folglich nehmen die electrischen Ströme, oder die Quotienten der electromotorischen Kräfte durch die Querschnitte, wie die Querschnitte zu.

## IV. *Ueber den Einfluss der Substanz der Dräthe auf die in den Spiralen hervorgerufene electromotorische Kraft.*

[*Nobili* und *Antinori* haben in ihrem ersten Aufsatze über die durch den Magneten hervorgebrachten electrischen Erscheinungen (*Poggendorfs Annalen* 1832 N° 3) bereits die Reihenfolge bezeichnet, in welcher 4 verschiedne Metalle geeignet sind den electrischen Strom hervorzubringen, sie ordnen dieselben nämlich folgendermasen an

Kupfer, Eisen, Antimon und Wismuth.

Es ist sogleich auffallend, dass diese Anordnung dieselbe ist, als diejenige, welche die besagten Metalle auch in Hinsicht auf ihre Leitungsfähigkeit für die Electricität einnehmen und es drängte sich mir daher sogleich die Vermuthung auf, ob sich nicht die electromotorische Kraft der Spirale in allen Metallen gleich bleibe und ob nicht der stärkere Strom in dem einen Metall daher rühre, dass es die Electricität besser leite als das andere. Ich untersuchte daher vorläufig 4 Metalle in dieser Hinsicht, nämlich Kupfer, Eisen, Platin und Messing und verfuhr dabei folgendermasen: Um den Einfluss der verschiedenen Leitung gänzlich zu vermeiden, brachte ich in den metallischen Leitungskreis, welchen der electrische Strom zu durchlaufen hatte, je zwei sonst ganz gleiche Spiralen aber von verschiedenen Metallen zu gleicher Zeit, indem ich das eine Ende der einen mit dem einen Leitungsdrath, das eine Ende der andern mit dem andern Leitungsdrath, die beiden frei gebliebenen Enden der Spiralen aber durch einen besondern kupfernen Verbindungsdrath verband. Hierauf brachte ich zuerst die eine Spirale auf den Eisenanker des Hufeisenmagneten und verfuhr mit ihm, wie in den früheren Versuchen und dann die andre; auf diese Weise war natürlich der Leitungswiderstand, den der electrische Strom bei beiden Erregungsarten erlitt, ganz derselbe. — Hierbei bemerke ich noch, dass ich sorgfältig alle thermoelectrische störende Einwirkung vermied, indem ich die Verbindungsstellen der verschiedenartigen Dräthe mit mehrfachen Lagen Löschpapier umwickelte und nach

Anordnung des Apparats jedesmal mehrere Stunden wartete, um den Verbindungsstellen Zeit zu geben die Temperatur des Zimmers anzunehmen.

Die Versuche selbst sind folgende:

| | | Ablenkungswinkel 1 | 2 | 3 | 4 | Mittel |
|---|---|---|---|---|---|---|
| Kupfer und Eisen - Spirale | Kupfersp. auf dem Anker | 17°, 3 | 17°, 4 | 17°, 6 | 17°, 7 | 17°, 500 |
| | Eisenspirale — — | 17, 3 | 17, 6 | 17, 5 | 17, 9 | 17, 575 |
| | | 17, 3 | 17, 4 | 17, 6 | 18, 1 | 17, 600 |
| | Kupferspirale — — | 17, 4 | 17, 4 | 17, 8 | 18, 2 | 17, 700 |
| Kupfer und Platin - Spirale | Kupfersp. auf dem Anker | 15, 2 | 15, 4 | 15, 8 | 15, 8 | 15, 550 |
| | Platinspirale — — | 15, 7 | 15, 4 | 15, 9 | 15, 4 | 15, 600 |
| | | 15, 7 | 15, 4 | 15, 8 | 15, 4 | 15, 575 |
| | Kupferspirale — — | 15, 4 | 15, 8 | 15, 3 | 15, 9 | 15, 600 |
| Kupfer und Messing - Spirale | Messingsp. auf dem Anker | 18, 4 | 18, 3 | 18, 4 | 18, 2 | 18, 350 |
| | Kupferspirale — — | 18, 5 | 18, 2 | 18, 1 | 18, 3 | 18, 275 |
| | | 18, 4 | 18, 2 | 18, 5 | 18, 4 | 18, 375 |
| | Messingspir. — — | 18, 4 | 18, 3 | 18, 3 | 18, 3 | 18, 325 |

Fassen wir die einzelnen Mittel zusammen und verwandeln wir die Decimalen der Grade in Minuten, so erhalten wir aus dieser Tabelle folgende Resultate:

Kupferspirale, Abweichung $\alpha = 17° \text{=} 36', 0$ Kupferspirale $\alpha = 15 \text{=} 34', 5$
Eisenspirale — — $\alpha' = 17 \text{=} 35, 2$ Platinspirale $\alpha' = 15 \text{=} 35, 2$

Kupferspirale $\alpha = 18° \text{=} 19', 2$
Messingspirale $\alpha' = 18° \text{=} 20, 2$

Da hier die Leitungswiderstände für je zwei zusammengehörige Beobachtungen dieselbe bleiben, so giebt unsere Hauptgleichung (A), wie früher behandelt, folgende Verhältnisse der electromotorischen Kräfte, wenn wir dieselben für Kupfer, Eisen, Platin und Messing mit $x, x', x'', x'''$ bezeichnen:

$$\frac{x}{x'} = \frac{\sin.(8°;43',0)}{\sin.(8°.42',6)} = 1{,}00033$$

$$\frac{x}{x''} = \frac{\sin.(7°;47',2)}{\sin.(7°;47,6)} = 0{,}99912$$

$$\frac{x}{x'''} = \frac{\sin.(9°,9',6)}{\sin.(9°;10,2)} = 0{,}99894$$

Diese drei Verhältnisse sind sämmtlich der Einheit so sehr nahe, dass wohl kein Zweifel darüber bleiben kann, dass die Dräthe von Kupfer, Eisen, Platin und Messing eine und dieselbe electromotorische Einwirkung erleiden und dass es mir wohl erlaubt sein wird, denselben Satz durch Analogie auch auf alle übrigen Metalle und Substanzen überhaupt auszudehnen, bis mir directe Versuche mit ihnen die Sache ganz ausser Zweifel gesetzt haben werden. Wir werden also das Gesetz haben:

*dass die electromotorische Kraft, welche der Magnet in Spiralen aus Dräthen von verschiedenen Substanzen, die sich aber sonst unter ganz denselben Umständen befinden, erregt, für alle diese Substanzen vollkommen gleich sei* *).

Hieraus folgt wiederum unmittelbar, dass sich in zwei ganz gleichen Drathringen aus verschiedener Substanz, welche den magnetischen Anker umschliessen, die electrischen Ströme, welche durch Abziehen oder Anlegen desselben an den Magneten hervorgerufen werden, direct wie die Leitungsfähigkeiten der Substanzen für Electricität verhalten. Man wird also am vortheilhaftesten Silber- und Kupferdräthe gebrauchen.

Aus den letzten Beobachtungen werden wir leicht die Leitungsfähigkeit der vier Metalle ableiten können, wenn wir noch eine ähnliche Beobachtung anstellen, wo wir statt der zwei Spirale von verschiedenen Metallen zwei der gebrauchten Kupferspirale ganz ähnliche in den Kreis des electrischen Stromes bringen, irgend eine auf

---

*) Nach Anstellung obiger Versuche ersah ich aus dem Heft N° 5 der Annalen von Poggendorf, das ich unterdessen erhielt, dass dieses letzte Gesetz bereits von Faraday, jedoch auf anderem Wege nachgewiesen sei. Mein Versuch diene daher nur zur Bestätigung desselben

den Anker setzen und den Abweichungswinkel bestimmen. Es heisse derselbe $\alpha$, und für die übrigen Spirale in der Reihenfolge, wie sie beobachtet wurden (also die Kupferspirale mit der aus Eisen, Platin und Messing) mögen diese Winkel mit $\alpha'$, $\alpha''$ u. $\alpha'''$ bezeichnet werden. Ferner heissen die vereinten Längen des Multiplicatordrathes, der Leitungsdräthe und die des Verbindungsdrathes beider Spirale, alle auf den Durchmesser des Multiplicatordrathes reducirt, $L$, die in allen Spiralen gleiche Länge, ebenfalls auf denselben Durchschnitt reducirt, aber $\lambda$, ferner bezeichnen wir durch 1, $m'$, $m''$, $m'''$ die Leitungsfähigkeit der Metalle in der obigen Ordnung, wo die des Kupfers also durch 1 ausgedrückt ist.

Nehmen wir die allgemeine Formel (A), nämlich

$$x = (L + l + \lambda)\, p \cdot \sin. \tfrac{1}{2}\alpha$$

so müssen wir hier, da die Dräthe nicht mehr gleichartig sind, statt des Leitungswiderstandes $(L+l+\lambda)$ die Leitungswiderstände *) $(L+\lambda)$, $\left(L+\frac{\lambda}{m'}\right)$, $\left(L+\frac{\lambda}{m''}\right)$ und $\left(L+\frac{\lambda}{m'''}\right)$ setzen, da dieselben in umgekehrten Verhältniss der Leitungsfähigkeiten stehn; wir haben also die 4 Gleichungen (in welchen nach dem eben ausgemittelten Gesetz $x' = x'' = x''' = x$ sind)

$$x = (L + \lambda)\, p \cdot \sin. \tfrac{1}{2}\alpha$$

$$x = \left(L + \frac{\lambda'}{m'}\right) p \cdot \sin. \tfrac{1}{2}\alpha'$$

$$x = \left(L + \frac{\lambda''}{m''}\right) p \cdot \sin. \tfrac{1}{2}\alpha''$$

$$x = \left(L + \frac{\lambda'''}{m'''}\right) p \cdot \sin. \tfrac{1}{2}\alpha'''$$

folglich durch Division

$$1 = \frac{L+\lambda}{L+\frac{\lambda}{m'}} \cdot \frac{\sin. \frac{1}{2}\alpha}{\sin. \frac{1}{2}\alpha'}, \text{ oder } L + \frac{\lambda}{m'} = (L+\lambda)\frac{\sin. \frac{1}{2}\alpha}{\sin. \frac{1}{2}\alpha'},$$

*) Ich begreife in den folgenden Ausdrücken den Leitungswiderstand $l$ mit unter dem von $L$, da bei dem zuletzt gebrauchten Multiplicator die Leitungsdräthe aus einem Stücke mit dem Multiplicatordrathe bestanden, also $L+l$ immer constant bleiben musste.

$$1 = \frac{L+\lambda}{L+\frac{\lambda}{m''}} \cdot \frac{\sin.\frac{1}{2}\alpha}{\sin.\frac{1}{2}\alpha''}, \text{ oder } L+\frac{\lambda}{m''} = (L+\lambda)\frac{\sin.\frac{1}{2}\alpha}{\sin.\frac{1}{2}\alpha''}$$

$$1 = \frac{L+\lambda}{L+\frac{\lambda}{m'''}} \cdot \frac{\sin.\frac{1}{2}\alpha}{\sin.\frac{1}{2}\alpha'''} \text{ oder } L+\frac{\lambda}{m'''} = (L+\lambda)\frac{\sin.\frac{1}{2}\alpha}{\sin.\frac{1}{2}\alpha'''}$$

aus welchen Gleichungen $m'$, $m''$ und $m'''$ gefunden werden können.

Für unsern Fall ist $L = 849$ Zoll, $\lambda = 84{,}1$, $\alpha = 21^\circ\, 52'$, $\alpha' = 17^\circ\, 36$. $\alpha'' = 15{,}34$, $\alpha''' = 18{,}20$ hieraus ergeben sich

| | | |
|---|---|---|
| Leitungsfähigkeit des Kupfers . . . . | | $= 1{,}00000$ |
| — — — — | Eisens od. $m'$ . . | $= 0{,}27321$ |
| — — — — | Platinas od. $m''$ | $= 0{,}18370$ |
| — — — — | Messings od. $m'''$ | $= 0{,}32106$. |

Noch genauer könnte man diese Werthe finden, wenn die Längen der Dräthe grösser wären; allein diese Untersuchung lag eigentlich nicht im Zwecke dieses Aufsatzes, daher verspare ich sie auf eine andere Gelegenheit.

---

## *Folgerungen aus den bisher nachgewiesenen Gesetzen für die Construction der electromotorischen Spiralen.*

Ich setze bei den nachfolgenden Untersuchungen voraus, der Magnet zur Hervorbringung des electrischen Stroms sei gegeben, es handle sich also hier für diesen Magneten und seinen gleichfalls gegebenen cylindrischen Anker diejenige Spirale aus einem bestimmten Metalle zu bestimmen, welche am vortheilhaftesten wirkt. Ferner nehme ich an, die Spirale nebst deren freien, nicht gewundenen Enden bestehen aus einem und demselben Drathe; dass übrigens jede andere Beschaffenheit der nicht zur electromotorischen Spirale gehörigen Drathenden auf die vorhin angenom-

mene zurückgeführt werden kann, wenn man nur die Länge, den Querschnitt und das Leitungsvermögen der in den Kreis tretenden Drathstücke kennt, ist für sich klar.

Dass wir durch Vermehrung der Umwindungen ins Unendliche nicht die Stärke des Stroms ebenfalls ins Unendliche steigern, lehrt eine sehr einfache Betrachtung. Zuvörderst ist die Anzahl der Windungen eines gegebenen Drathes durch die Länge des cylindrischen Ankers begrenzt, die weitere Vermehrung der Anzahl der Windungen könnte also nur durch mehrere Reihen von Windungen über einander geschehn. Es sei nun die electromotorische Kraft einer Reihe von Windungen, die die Länge des Ankers einnimmt, $= \varphi$, die Länge des Drathes aller dieser Windungen, oder hier, beim durchaus gleichmässigen Durchmesser des Drathes, der Leitungswiderstand desselben $= \alpha$, die Länge der nöthigen freien Drathenden zusammen $= \beta$, so ist die Kraft des Stroms dieser ersten Reihe von Windungen oder

$$\mu_1 = \frac{\varphi}{\alpha + \beta}$$

heisse nun $\gamma$ das Stück der zweiten Reihe von Windungen, um welches ihre Länge, wegen ihres nothwendig grössern Durchmessers, grösser ist als die Länge $\alpha$ der ersten Reihen, so ist die Kraft des Stroms durch diese beiden Windungen oder

$$\mu_2 = \frac{2\varphi}{2\alpha + \gamma + \beta}$$

und eben so

$$\mu_3 = \frac{3\varphi}{3\alpha + \gamma + \delta + \beta}$$

wo $\delta$ das Stück bezeichnet, um welches die dritte Reihe die erste an Länge übertrifft. Soll nun die zweite Reihe von Windungen nichts mehr zur Verstärkung des Stroms beitragen, so setzen wir $\mu_1 = \mu_2$, also

$$\frac{\varphi}{\alpha + \beta} = \frac{2\varphi}{2\alpha + \beta + \gamma}$$

woraus sich ergiebt

$$\beta = \gamma$$

d. h. sobald die freien Enden nur so lang sind, als der Unterschied der Länge der zweiten Reihe von Windungen und der der ersten Reihe beträgt, so wird schon die zweite Reihe nichts mehr zur Verstärkung des Stromes beitragen. Um zu sehen,

was in diesem Falle 3 Reihen leisten, setzen wir $\beta = \gamma$ in dem Ausdrucke für $\mu_3$ und erhalten

$$\mu_3 = \frac{3\varphi}{3\alpha + 2\beta + \delta}$$

Nun ist aber $\delta$ grösser als $\gamma$ oder $\beta$; wir setzen daher $\delta = \beta + \mu$, wo $\mu$ eine positive Grösse ausdrückt, dadurch erhalten wir

$$\mu_3 = \frac{3\varphi}{3\ + 3\beta + \mu} = \frac{\varphi}{(\alpha + \beta) + \frac{\mu}{3}}$$

Dieser letzte Ausdruck für $\mu_3$ ist offenbar kleiner als $\frac{\varphi}{\alpha + \beta}$, folglich würden 3 Reihen von Windungen die Wirkung von einer oder 2 Reihen (welche Wirkungen hier gleich gesetzt wurden) nur schwächen.

Eben so findet man, wenn 3 Reihen keine stärkere Wirkung haben sollen wie 2

$$\delta = \tfrac{1}{2} (\gamma + \beta)$$

d. h. dieser Fall wird dann eintreten, wenn die Länge der freien Enden halb so gross ist, als die halbe Summe der Unterschiede der Längen der zweiten und dritten Reihe von der der ersten.

Nachdem wir auf diese Weise vorläufig nachgewiesen haben, dass bei der Vermehrung der Reihen von Windungen irgend einmal ein Maximum des electrischen Stroms eintrete, so dass also eine grössere Vermehrung nur schaden würde, gehen wir zur allgemeinen Behandlung des Gegenstandes über.

Wir denken uns also die Windungen einer Reihe des besponnenen Metalldrathes dicht an einander liegend. Es sei dann die Länge des Raums, auf welchen die Windungen aufgewunden werden können $= a$, die Dicke des Drathes $= b$, die Dicke des besponnenen Drathes übertreffe die Dicke des unbesponnenen um das Stück $\beta$, so dass sie also $= b + \beta$ sei, die Länge einer Windung sei $= c$, die Längen der freien Drathenden $= m$; alsdann ist die Anzahl von Windungen, die auf dem Anker in einer Reihe aufgewunden werden können $= \frac{a}{b + \beta}$ und die Länge des Drathes dieser Windungen $= \frac{a}{b + \beta} \cdot c$ und die ganze, für eine Reihe von Windungen, von der Electricität zu durchlaufende Länge

$$= \frac{a}{(b+\beta)} c + m$$

Nimmt man den Leitungswiderstand eines Drathes von derselben Substanz, dessen Länge = 1 und dessen Dicke = 1 ist, als Einheit an, so wird der Leitungswiderstand für eine Reihe von Windungen

$$= \frac{\frac{a}{b+\beta} c + m}{b^2} = \frac{ac + (b+\beta)\, m}{b^2\, (b+\beta)}.$$

Heisst ferner die in einer Windung erregte electromotorische Kraft, die nach dem zweiten und dritten unserer oben gefundenen Gesetze für jede Grösse der Windungen und für jede Dicke des Drathes dieselbe bleibt, $f$, so ist die in einer Reihe von Windungen erregte electromotorische Kraft nach dem ersten der obigen Gesetze

$$= \frac{a}{b+\beta} \cdot f$$

und folglich die Stärke des electrischen Stroms für eine Reihe von Windungen oder

$$p_1 = \frac{ab^2 f}{ac + (b+\beta)\, m}$$

Nun müssen wir noch für unsern Zweck die Länge einer Windung oder $c$ durch den Durchmesser des cylindrischen Ankers und durch die Dicke des Draths und seiner Seidenhülle ausdrücken. Wir haben aber den Halbmesser einer Windung, wenn die halbe Dicke des Eisencylinders $= q$ heisst,

für die erste Reihe $= q + \frac{b+\beta}{2}$

— — zweite — $= q + \frac{3}{2}\,(b+\beta)$

— — dritte — $= q + \frac{5}{2}\,(b+\beta)$

— — $n$te — $= q + \frac{2n-1}{2}\,(b+\beta)$

daraus ergiebt sich die Länge einer Windung oder

$c$ für die erste Reihe $= (2q + (b+\beta))\,\pi$

$c$ — — zweite — $= (2q + 3\,(b+\beta))\,\pi$

$c$ — — dritte — $= (2q + 5\,(b+\beta))\,\pi$

$c$ — — $n$te — $= (2q + (2n-1)\,(b+\beta))\,\pi$

Den ersten Werth von $c$ in die Gleichung für $m$ supplirt, erhalten wir

$$p_1 = \frac{ab^2f}{a\pi(2q+(b+\beta))+(b+\beta)\,m}.$$

Für 2 Reihen von Windungen ist die electromotorische Kraft, mit Rücksicht auf das obige Gesetz N°. 2, $= 2\,\frac{a}{b+\beta}\cdot f$, der Leitungswiderstand aber gleich dem der beiden Reihen von Windungen und des Stückes $m$ zusammen, also

$$= \frac{\frac{a}{b+\beta}(2q+b+\beta)\,\pi + \frac{a}{b+\beta}(2q+3\,(b+\beta))\,\pi + m}{b^2} = \frac{a\pi\,(4q+4\,(b+\beta))+m\,(b+\beta)}{b^2\,(b+\beta)}$$

folglich die Kraft des Stroms für zwei Reihen oder

$$p_2 = \frac{2\cdot\frac{a}{b+\beta}\cdot f}{\frac{a\pi\,(4q+4\,(b+\beta))+m\,(b+\beta)}{b^2\,(b+\beta)}} = \frac{2ab^2f}{a\pi\,(4q+4\,(b+\beta))+m\,(b+\beta)}$$

Auf ganz ähnliche Weise findet man

$$p_3 = \frac{3ab^2f}{a\pi\,(6q+9\,(b+\beta))+m\,(b+\beta)}$$

$$p_4 = \frac{4ab^2f}{a\pi\,(8q+16\,(b+\beta))+m\,(b+\beta)}$$

$$p_n = \frac{n\cdot ab^2f}{a\pi\,(2nq+n^2\,(b+\beta))+m\,(b+\beta)} \qquad \text{(D)}$$

Differenzire ich diesen allgemeinen Ausdruck der Kraft des Stroms für $n$ Reihen von Windungen in Rücksicht auf $n$, so erhalte ich

$$\frac{d\cdot p_n}{dn} = ab^2f\,\frac{a\pi\,(2nq+n^2\,(b+\beta))+m\,(b+\beta) - a\pi n\,(2q+2n\,(b+\beta))}{[a\pi\,(2nq+n^2\,(b+\beta))+m\,(b+\beta)]^2}$$

Setze ich diesen Ausdruck $= o$, so ergiebt sich nach einigen Reductionen

$$m - a\pi n^2 = o$$

$$\text{folglich}\quad n = \sqrt{\left(\frac{m}{a\pi}\right)}.$$

Hier nehme ich das positive Zeichen der Wurzel, weil $n$ seiner Natur nach nicht negativ sein kann und $m$, $a$, $\pi$ alle 3 positiv sind.

Entwickeln wir ferner $\frac{d^2p_2}{dn^2}$ und setzen wir in den gefundenen Ausdruck diesen Werth von $n = \sqrt{\left(\frac{m}{a\pi}\right)}$ so erhalten wir eine negative Grösse, folglich entspricht dieser Werth von $n$ einem Maximum des Stroms.

*

Aus dem gefundenen Werthe von $n$ für's Maximum des Stroms können wir folgern:

1) dass das Maximum der Wirkung des Magneten auf unsere Spirale für jede Dicke des Drathes bei derselben Anzahl von Windungsreihen erreicht wird, denn $n$ ist unabhängig von $b+\beta$.

2) dass, je länger die freien Enden der Spirale sind oder je grösser $m$ ist, um so mehr Reihen von Windungen erforderlich sind, um das Maximum der Wirkung zu erreichen.

3) dass, je länger der Raum $a$ ist, auf welchen die Windungen in einer Reihe gewunden werden können, um so weniger Reihen von Windungen erforderlich sind, um den grössten Strom hervorzubringen.

4) dass das Maximum von $q$ unabhängig ist, d. h. dass es einerlei ist für die Anzahl der Windungsreihen, die zur Erreichung des Maximums erforderlich sind, ob sie unmittelbar um den Cylinder von Eisen oder um einen andern Cylinder gewunden sind, der auf jenen geschoben wird.

Setzen wir den oben gefundenen Werth $n = \sqrt{\left(\frac{m}{a\pi}\right)}$ in den allgemeinen Ausdruck der Kraft, welcher in der Gleichung (D) enthalten ist, so erhalten wir nach einigen Reductionen, als Ausdruck des Maximum des zu erreichenden Stroms

$$p_{(\text{Maximum})} = \frac{b^2 f}{2\left(\pi q + (b+\beta)\sqrt{\left(\frac{\pi m}{a}\right)}\right)} \qquad \text{(E)}$$

Dieser Ausdruck lehrt uns wiederum Folgendes:

1) Das Maximum des Stroms steht in directem Verhältniss zu $f$, d. h. zur Kraft des Magneten oder vielmehr zur Stärke des im Anker beim Anlegen an den Magneten entstehenden und wieder verschwindenden Magnetismus.

2) Das Maximum ist stärker für einen dicken Drath als für einen dünnen, denn man kann den Ausdruck desselben auf die Form

$$\frac{f}{\frac{A}{b^2} + \frac{B}{b}}$$

bringen, welche für eine Zunahme von $b$ eine Zunahme d. ganzen Ausdrucks klar macht.

3. Das Maximum nimmt ab mit $q$, d. h. es wird um so kleiner, auf einen je grössern Cylinder die erste Reihe von Windungen gewunden ist (vorausgesetzt, dass der Anker deswegen nicht grösser wird).

4. Es wird kleiner mit dem Wachsthume von $m$, d. h. je grösser die freien Verbindungsenden der Spirale sind, um so geringer wird das möglichst erreichbare Maximum des Stroms sein.

5. Endlich wächst das Maximum, wenn $a$ wächst, d. h. wenn der Raum des Ankers, auf welchem eine Reihe von Windungen gewunden werden kann, grösser wird.

Wir werden die Kraft des Stroms einer einzigen um den Anker gewundenen Windung für dasselbe $m$ erhalten, sobald wir in dem allgemeinen Ausdrucke (D) für den Strom $n = 1$ und $a = b + \beta$ setzen, wir finden dann

$$p_{\text{(einer Windung)}} = \frac{b^2 f}{\pi (2q + b + \beta) + m}.$$

Dividiren wir hiermit den Ausdruck für's Maximum des Stromes (E), so werden wir den Quotienten mit „*Maximum der Verstärkung*" bezeichnen können und finden, dass

$$\text{das Maximum der Verstärkung sei } \frac{2q + (b+\beta) + \frac{m}{\pi}}{2q + 2(b+\beta)\sqrt{\left(\frac{m}{a\tau}\right)}} \qquad \text{(F)}$$

Suche ich z. B., bei welcher Anzahl von Windungsreihen ich für meinen Magneten und Anker das Maximum des Stroms erreiche, wenn ich zum Multiplicatordrathe und zu den Verbindungsdräthen zusammen eine Länge von 850 engl. Zoll nehme, so habe ich

$$a = 1{,}6 \quad b + \beta = 0{,}065 \text{ (Drath N°. 4)} \quad q = 0{,}335 \quad m = 850$$

Die Formel $n = \sqrt{\frac{m}{a\tau}}$ giebt für $n = 13{,}07$

und die Formel (*F*) giebt das Maximum der Verstärkung $= 114{,}8$.

Wir werden also das Maximum des Stroms bei etwa 13 Windungsreihen erreichen und der Strom wird alsdann etwa 115 mal stärker sein, als ihn eine einzige Windung erzeugt.

Wir wollen hier noch den Fall besonders betrachten, wo $m = o$ ist d. h. wo es keine freien Enden der Spirale giebt, sondern wo sie sich durch sich selbst schliesst. Setzen wir $m = o$ in dem Ausdrucke des Stroms für eine Windung, für eine Reihe von Windungen und für $n$ Reihen von Windungen, so erhalten wir

für eine einzige Windung $= \frac{b^2 f}{2q\pi + \pi(b+\beta)}$

— — Reihe von Windungen $= \frac{b^2 f}{2q\pi + \pi(b+\beta)}$

— $n$ Reihen von Windungen $= \frac{b^2 f}{2q\pi + n\pi(b+\beta)}$

woraus folgt, dass hier der Strom in einer Windung eben so stark ist als in einer Reihe einer beliebigen Anzahl von Windungen und dass er in diesen beiden Fällen stärker sei, als wenn mehrere Reihen von Windungen über einander laufen, (denn $n$ ist eine ganze positive Zahl). Der Ausdruck des Stroms für eine Windung lässt sich übrigens auch so schreiben

$$\frac{f}{\frac{(2q+b+\beta)\pi}{b^2}}$$

d. h. er ist gleich der electromotorischen Kraft, dividirt durch den Leitungswiderstand einer Windung und in der That fällt es nun in die Augen, dass in diesem Falle von $m = o$ eine Reihe von Windungen eben so wirken muss, wie eine einzige Windung, denn mit der Vermehrung der Anzahl der Windungen wurde die electromotorische Kraft und der Leitungswiderstand in gleichem Verhältnisse vergrössert, folglich bleibt der Quotient der einen durch den andern oder der electrische Strom unverändert. Eben so ist es jetzt klar, dass in der That eine zweite Reihe von Windungen den Strom nur schwächen kann, da in der zweiten Reihe die electromotorische Kraft wie in der ersten mit der Vermehrung der Anzahl von Windungen wächst, dagegen der Leitungswiderstand in den 2 Reihen grösser ist als das Doppelte desselben in einer Reihe, wegen des vergrösserten Durchmessers.

Alle die obigen Sätze können aber bis jetzt noch nicht angewandt werden auf ein Phänomen des Magneto-Electrismus, nämlich auf die Hervorbringung des Funkens. Dieser erscheint nämlich nur, wenn die metallene Leitung des Stroms irgend

wo unterbrochen wird; da tritt also in den Kreislauf des Stroms ein Zwischenleiter, dessen Länge zwar fast unendlich klein, dessen Leitungswiderstand aber dafür auch fast unendlich gross ist. Wir müssten also zur Anwendung der oben entwickelten Formeln erst im Stande sein diesen Zwischenleiter auf eine gewisse Drathlänge, bei gegebenem Durchmesser des Drathes, zu reduciren und so $m$ zu bestimmen; allein zu dieser Reduction fehlen uns bis jetzt noch die Data.

# DE SOLENODONTE

## NOVO MAMMALIUM INSECTIVORORUM GENERE;

AUCTORE

J. F. BRANDT.

---

(Conv. exhib. die 19. Decembris 1832.)

E VARIORUM Musei Academici Mammalium nondum cognitorum numero memoratu dignissima sine dubio habenda est pellis integra animalis, quam cum cranio ex Insula Hispaniola misit Jaegerus. Quae quidem partes existentiam animalis in hacce insula probant, quod magnitudine insigni excepta in universum cum Soricibus capitis et pedum conformatione convenit, auricularum et pilorum structura, nec non caudae forma cum Didelphydibus affinitatem quandam ostendit, quoad dentium structuram vero magis cum genere Myogale quam cum ullo alio similitudinis speciem offert.

Quae quum ita sint hocce animal novum mammalium genus constituere debere haud dubitari potest, cui quidem ob mandibulae dentes incisivos medios peculiari et singulari sulco, admodum profundo et canalem apertum efficiente instructos *) *Solenodontis* nomen tribuere haud abs re esse videbatur, nomine insimul specifico *paradoxi* ob figuram animalis peculiarem addito.

---

*) Dentium incisivorum mediorum mandibulae forma tam peculiaris est, ut similis structura in alio animali obvia huc usque prorsus desideretur.

## EXTERNARUM PARTIUM DESCRIPTIO.

Caput conicum, elongatum. Nasus in proboscidem fere teretem, quartam capitis longitudinis partem sua longitudine superantem prominens. Proboscidis apex calvus, nares fere reniformes in lateribus gerens, infra deorsum truncato-rotundatus et in medio sulco longitudinali exaratus. Reliqua proboscidis pars pilis admodum tenuibus, mollibus, brevibus et brevissimis obsessa, quorum quidam, qui sunt in proboscidis partis mediae lateribus et in dorso paulo longiores et rigidiores, vibrissas parvas quodammodo referentes reperiuntur, qui vero in proboscidis baseos lateribus obveniunt reliquis proboscidis pilis rigidiores et longiores et vibrissarum indolem magis adhuc referentes conspiciuntur. — Rostri dorsum usque ad spatium inter oculos pilis brevibus, subrectis, rigidis, paulisper pungentibus obsessum, latera vero pilis mollibus, tenuibus, sat brevibus cooperta. — Labium superius inferiore longius et vibrissis rigidis instructum, quarum quidem anteriores breviores apparent, posteriores vero longiores et fortiores inveniuntur et capitis dimidiam longitudinem sua longitudine superant. — Menti antica pars pilis rigidis, brevioribus barbata, postica pilis nonnullis vibrissas aemulantibus obsessa. — Oculi admodum parvi, pisi semen minoris magnitudinis circiter aequantes. — Pone oculos sub aurium apertura in quovis latere vibrissae tres longae, vibrissas laterales longiores fere aequantes. — Auriculae rotundatae, magnae, prominulae, in marginis inferioris medio excisura parva, propria instructae, fere calvae et pilis tantummodo tenuissimis, brevissimis, sparsis, in superficie anteriore et in superficiei posterioris parte media et apicali occurentibus obsessae. — Meatus auditorius distinctus, pilis cinctus — Frons pilis mediocribus, paulisper rigidis et apice vix pungentibus, retrorsum directis obsessa. Occiput pilis mediocribus, subrigidulis, sursum directis vestitum. Capitis latera pilis mediocribus, parum mollibus obtecta, quorum superiores magis sursum, inferiores magis deorsum tendunt.

Collum breve, sat crassum, in gutture et gula pilis mediocribus vel magis brevibus, sed parum densis, in nucha et lateribus autem pilis longioribus, magis densis

coopertum. Pili colli laterum superiorem et mediam partem obtegentes sursum versus nucham directi, reliqui plus minusve deorsum et paulisper ad anteriora vergentes. Ad colli extremum ante scapulam et in occipite vertex pilorum plus minusve distinctus, cujus pili deorsum, sursum et retrorsum spectant.

Corpus mediocre, postice validius. Dorsum rotundatum, pilis densis, longioribus, sat rigidis, in media ejus parte rigidioribus et longissimis, incumbentibus et retrorsum spectantibus vestitum. Prymna et uropygii anterioris partis superior facies pilis tantummodo sparsis, sericeis, brevissimis, adpressis obsessae, eamque ob rem fere calvae *). Uropygii laterum et posterioris partis pili prymnae pilis longiores, magis rigidi et densi, praesertim in regione caudae radicem pilosam atque anum ambiente. Anterior prymnae pars pilis admodum rigidis, longis, incumbentibus, e dorsi parte vicina prodeuntibus cooperta. — Abdominis latera modice convexa, pilis mediocribus, deorsum et retrorsum directis, parum densis instructa. — Venter mediocris, pilis sat raris vel parum densis obsessus.

Artus mediocres. Pedes omnes pentadactyli, fissi, plantigradi, plantis denudatis, callosis. — Digiti omnes quoad longitudinem inaequales. Digitorum tres medii duobus exterioribus longiores.

Artus antici posticis paulo breviores. — Humerus totus sub vellere absconditus. — Antibrachium mediocre, pedem sine unguibus demensum longitudine paulisper superans, in parte superiore pilis mediocribus, paulisper rigidis, in parte inferiore autem pilis paulo brevioribus, rigidis, ad exteriora vergentibus obsessum. In latere interiore supra plantam area oblonga, fere triangularis, pilis brevibus, tenuibus, raris, cutem haud prorsus obtegentibus tantummodo vestita, eamque ob rem minus accurate observanti fere calva. In areae modo nominatae exteriore angulo pili 2 — 3 longiores ad exteriora directi, quasi vibrissas pedales referentes. — Anti-

*) Quum calvitiei aliqua causa subesse debeat suspicio exoritur, ne in prymna et uropygio glandularis aliqua secretio fiat, illi forsan similis, quae in Soricum lateribus observatur. Cui quidem opinioni color partium allatarum singularis et praecipue pinguedinis cujusdam adspectus admodum favere videntur. Odorem tamen pinguedinis peculiarem percipere haud contigit.

pedes in dorso pilis sparsis, brevissimis, tenuibus, rigidulis, albidis, cutem haud prorsus operientibus, in ipsis digitis rarioribus, in digitorum penultimo articulo autem paulo fortioribus et longioribus, in fasciculos fere convergentibus obsessi. Digitus internus reliquis brevior et articulo suo apicali primi articuli apicem secundi digiti haud attingens. Secundus externo (quinto) longior, sed quarto et tertio brevior, et articulo suo apicali tertii digiti primi articuli medium vix superans. Tertius quarto vix paulo longior. Quintus articulo suo apicali primi articuli apicem quarti digiti fere aequans. — Ungues falculares, basi mediocriter, apice vix compressi, validi, arcuati, in latere inferiore vix canaliculati, apice paulisper rotundati, grisei, pellucidi, secundum digitorum longitudinem longitudine varii, ita quidem ut mediorum digitorum ungues tertia parte vel plus externi vel interni digiti ungue majores evadant.

Femur sub cute absconditum. Crus mediocre, in parte superiore circa genu et sub genu pilis mediocribus, parum rigidis cinctum, ceterum vero pilis brevissimis, fere sericeis, tenuibus, parum rigidis, satis densis obsessum. Pes paulisper oblique introrsum directus, quo fit ut animal in incessu praesertim exteriori ejus margini inniti videatur. Pedis et digitorum dorsum pilis tenuibus, brevissimis et femoris pilis adhuc minoribus, admodum raris obtectum. Penultimi articuli pili reliquis longiores et rigidiores, in fasciculos conniventes, et non solum usque ad unguium basin protensi, sed eam ex parte obtegentes et antipedum penultimi articuli pilos longitudine superantes. Digiti minus robusti atque longi quam in antipedibus. Digitus internus extimo paulo brevior, secundus et quartus fere aequales et extimum longe superantes; medius autem omnium maximus. Ungues falculares, antipedum unguibus multo breviores et minus validi, quoad longitudinem secundum digitorum longitudinem varii. Medii digiti unguis antipedis medii digiti ungue fere duplo brevior.

Caudae elongatae, teretis radix, ut jam supra memoratum est, haud squamata, sed pilis sericeis, tenuibus obsessa, quorum inferiores ex parte longiores et magis rigidi apparent, reliqua autem pars reticulatim squamosa, squamis parvis, subrotundis vel rhomboidalibus, haud imbricatis. Inter squamas pili brevissimi, rigidi, minimi, aegre conspicui.

Mammarum duarum inguinalium in specimine, quod descripsimus, masculo inter crura in praeputii lateribus vestigia distincta 10‴ ab ano remota. In abdomine mammarum vestigia nulla.

Praeputium in corpusculum conicum, 3‴ longum, 8‴ ab ano remotum, pilis sericeis obsessum, ex area pilis brevibus, sericeis vestita prominens.

Scroti vestigium nullum.

Codarium haud distinctum.

Capitis latera et collum dilute flavo-brunnea, admixto colore ferrugineo, interdum etiam griseo. Abdomen et pedes dilute flavo-brunnei, colore griseo vix admixto. In pectore inter artus anteriores area dilute ferruginea ad pedum latus internum et antice ad cubitum usque extensa. Similis area dilute ferruginea regionem inguinalem occupat et in crurum et tibiarum anteriorem partem quoque extensa conspicitur. Rostri dorsum, frons, vertex et nuchae media et dorsi anterior pars colore brunneo-nigro tincta. Reliqua dorsi pars nigro-brunnea, colore nigro-brunneo, sed magis dilute, etiam versus laterum posteriorem partem et versus femorum exteriorem superficiem defluente. Caudae partis squamatae pars basalis et media griseae, apicalis vero albida.

*Mensurae.*

| | |
|---|---|
| Corporis longitudo inde a rostri apice usque ad caudae apicem . . | $20\frac{1}{2}''$ |
| Longitudo capitis a rostri apice ad aurium basin . . . . . . . . | $3''$ |
| Longitudo rostri . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . | $1''2'''$ |
| A rostri apice usque ad angulum oculi externum . . . . . . . . | $2''2'''$ |
| Ab angulo oculi interno usque ad aurium basin . . . . . . . . | $1''$ |
| Oculorum fissura . . . . . . . . . . . . . . . . . | $1\frac{1}{2}'''$ |
| Aurium longitudo . . . . . . . . . . . . . . . . . | $1''$ |
| Aurium latitudo . . . . . . . . . . . . . . . . . . | $9'''$ |
| Ab aurium basi ad partem caudae squamatam . . . . . . . . | $10\frac{1}{2}''$ |
| Basis seu radix caudae haud squamata . . . . . . . . . . . | $9'''$ |
| Caudae partis squamatae longitudo . . . . . . . . . . . . | $8''3'''$ |

| | |
|---|---|
| Longitudo caudae ab ano usque ad apicem . . . . . . . . . | 9" |
| Cubiti longitudo . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . | 1"8"' |
| Longitudo antipedis usque ad unguium apicem . . . . . . . . | 2"1"' |
| Longitudo antipedis usque ad unguis digiti medii basin . . . . . | 1"3"' |
| Longitudo unguis digiti medii . . . . . . . . . . . . . . | 9"' |
| Longitudo pollicis usque ad unguis basin . . . . . . . . . . | 7"' |
| Longitudo unguis pollicis . . . . . . . . . . . . . . . | 4"' |
| Cruris longitudo . . . . . . . . . . . . . . . . . . . | 2"10"' |
| Longitudo plantae pedis posterioris usque ad unguium intermediorum apicem . . . . . . . . . . . . . . . . . . . | 2"4"' |
| Longitudo plantae pedis usque ad unguis digiti medii basin . . . | 2" |
| Longitudo unguis digiti medii . . . . . . . . . . . . . . | 5"' |
| Longitudo unguis pollicis . . . . . . . . . . . . . . . | $3\frac{1}{2}$"'. |

## Cranii atque dentium illustratio.

Cranium humile, oblongo-elongatum *). Pars vertebralis et occipitalis modice convexae. Pars frontalis supra vix convexa. Pars facialis valde elongata, angustata et propriam cranii partem longitudine aequans. Inter processum zygomaticum ossis malaris et ossis temporum spatium insigne, oblongum.

*Ossis occipitis* pars basilaris octavam fere cranii longitudinis partem sua longitudine constituit et quoad formam similitudinem quandam cum humana sat evidenter ostendit, humana tamen magis elongata et angustior apparet, in ea praesertim parte, quae cum osse sphenoideo conjungitur. Ceterum etiam magis plana evadit et in superficiei exterioris medio eminentiam longitudinalem usque ad corporis ossis sphenoidei partem posteriorem extensam offert. Incisura jugularis parum profunda emarginationem tantummodo curvatam, fere semilunarem sistit, quae quidem inci-

---

*) Longitudinis insignis causa praesertim quidem in ossium rostrum constituentium forma, sed ex parte etiam in reliquorum ossium cranium formantium elongatione quaerenda est.

sura ossis temporum ope foramen jugulare modicum efficit. — Condyli elongati, spatio angusto in anteriore parte distantes, in marginis sui anterioris medio emarginati. Ante emarginationem unius foraminis condyloidei anterioris loco duo minora obvia. Foramen condyloideum posterius insigne *).

*Pars mastoidea ossis temporum* a parte squamosa distincta apparet et superficiem externam trapezoidalem et excavatam ostendit. Angulus ejus posterior superior omnium longissimus, depressus, oblique inde ab anteriore cranii parte versus posteriorem ascendit, angulus ejus anterior et superior vero sunt elevati et processui triquetro, truncato (processus mastoidei analogo) a partis squamosae posteriore et inferiore parte effecto, suturae ope adnectuntur. — Pars petrosa temporum ossis formam fere pyramidalem exhibet et cum parte mastoideo tam arcte conjuncta observatur, ut partis mastoideae appendix tantummodo esse videatur. In partis petrosae superficiei externae exteriore parte ex eminentia longitudinali, totam fere ossis petrosi superficiem inferiorem occupante et cristam fere simulante, processus fere tetragonus, uncinatus, introrsum curvatus exoritur *), cujus margo anterior vix curvatus suturae ope cum annulo tympanico conjungitur. In processus modo commemorati baseos parte laterali et exteriore, inter ipsum processum et partem mastoideam, fossa sat magna, oblonga, parum inflexa, simplex, vel in duas rotundas divisa, semper autem duobus foraminibus parvis (foraminibus stylomastoideis) perforata, invenitur. Pone processum uncinatum modo descriptum, emarginationem jugularem contra, in parte petrosa impressio sat magna apparet, quae cum ossis occipitis emarginatione modo commemorata foramen jugulare semilunare efformat. In partis petrosae anteriore et laterali parte, inter ipsam partem petrosam atque ossis sphenoidei alam magnam, insignis remanet lacuna ovali-oblonga, carotidi introitum, ut videtur,

---

*) De reliquis ossis occipitis partibus tacendum est, quum in cranio descripto ictu parum congruo destructae inveniantur.

*) Processus et eminentia, quos descripsimus sunt rudimenta parietis ossei curvati in longe plurimis mammalibus cavitatem tympani claudentis, imo haud raro, ut in Feris, Gliribus etc., eminentiam insignem vesicularem (bullam) formantis.

permittens. — Annulus tympanicus annulum fere clausum, modice dilatatum, versus posteriorem partem apertum, in parte sua anteriore latiorem et in eminentiam parvam obtuse triquetram, disinentem sistit. Quoad situm annulus tympanicus valdopere interiora versus spectat et inde a posteriore et exteriore cranii parte versus anteriorem et interiorem faucium cavitatem dirigitur, ita quidem, ut pars ejus anterior pone interiorem cavitatis glenoidalis processus marginem observetur et cum eo angulum acutum faciat.

*Cavitas tympani* ab annulo tympanico et processu uncinato in anteriore quidem parte haud clauditur, sed spatium admodum insigne, tetragonum, introrsum spectans offert, quod cute occlusum invenitur.

*Ossis temporum pars squamosa* modice evoluta sutura distincta a parte mastoidea sejungitur et in ipsius suturae inferiore parte in processum obtuse trigonum, truncatum prominet, qui cum processu triquetro partis mastoideae conjungitur. Partis squamosae cum osse parietali junctura haud distincte visibilis, ossis temporum squama tamen cranii medium haud attingere et margine superiore parum curvato praedita esse videtur. Sutura illa, quae partem squamosam cum osse sphenoideo conjungit pari modo haud distincta apparet. — Cavitas glenoidalis oblonga admodum evoluta est et in parte posteriore processu sat prominente, tetragono-rotundato, versus anteriora curvato, antice, ut articulum inire possit, excavato, postice convexo et sulco longitudinali exarato aucta animadvertitur. In processus modo descripti basi, et quidem in posteriore et exteriore ejus parte, prope annulum tympanicum, foramen subrotundum conspicitur, quod in canalem ducit, qui sub ipso tentorii ossei rudimento discurrit et in illa transit orificia, quae in angulo inferiore posteriore ossis parietalis et in ossis temporum squamae posteriore parte observare licet. — Processus zygomaticus brevis, triqueter, compressus, tenuis, acuminatus, in anteriore margine ante apicem paulisper emarginatus, e posteriore margine cristam parvam ad processum mastoideum mittit. Quod inter posteriorem cavitatis glenoidalis et processum mastoideum reperitur spatium arcuatum est, ut meatui auditorio externo introitum et affixionis puncta praebeat.

*Ossis sphenoidei pars basilaris* cum occipite suturae ope conjungitur et partis suae posterioris latitudine fere tertiam cranii latitudinis partem aequat, sed in partem anteriorem et posteriorem suturae ope haud quaquam divisa reperitur. Superficiei ejus exterioris posterior pars sat plana in medio crista parum distincta (quae est cristae in occipitis basi obvenientis continuatio) instructa; anterior vero inter processus pterygoideos paulisper canaliculata apparet. Superficiei ejus interioris pars posterior fere plana et vix paulisper profunda cernitur; pars media et anterior autem angustatae et in medio in cristam (sellae turcicae analogon) elevatae conspiciuntur. Nervorum opticorum foramina interna valde approximata et in cristae modo laudatae lateribus obvia. — Alae magnae circuitus parum accurate definiri potest, in basi tamen inde a posteriore parte versus anteriorem valde dilatata apparet et quantum e sutura coronali parum distincta concludi potest parum ascendere videtur. Cavitatis glenoideae medium contra ala magna a foramine ovali, processum cavitatis glenoideae contra vero a foramine spinoso est perforata. Pars ossis sphenoidei orbitalis ab ala magna haud discreta apparet. Fissurae orbitalis loco apertura magna antrorsum directa conspicitur, in cujus anterioris marginis superiore parte, foramen opticum parvum invenitur. Supra foramen opticum fossa rotunda conspicitur, cujus fundus foraminibus nonnullis parvis est perforatus. — Processus pterygoideus externus prorsus deest, processus pterygoideus internus autem jam pone foramen ovale sub cristae paulisper introrsum curvatae forma incipit et versus anteriora dirigitur, ita quidem, ut cum ossis palati parte perpendiculari, cui adjungitur et longitudine aequatur, angulum obtusum vix faciat. Margo posterior paulisper curvatus, inferior in partis anterioris medio parum excisus, in parte posteriore vero in processum admodum parvum, trigonum, brevem (hamulum pterygoideum) expansus.

Partis orbitalis *ossis ethmoidei* fines percipere haud contigit, quum in cranio descripto cum reliquis ossibus coalita conspiceretur. Lamina cribrosa maxima, reniformis, foraminibus crebris et insignibus perforata.

*Ossa parietalia* magna, elongata, superficiem exteriorem modice declivem offerunt, quae quidem ubi ossa parietalia suturae ope invicem conjuncta sunt in cristam

longitudinalem, obtusam elevata; in parte posteriore ante occiput et in parte anteriore ante os frontis depressa, in medio autem convexa, in angulo posteriore externo prope juncturam cum ossium temporum squama a tribus foraminibus (emissaria sine dubio exhibentibus) perforata, in angulo anteriore inferiore denique, inter partem squamosam ossis temporum et os frontis sito, crista obtusa, parva, obliqua instructa conspicitur. — Sutura coronalis recta.

*Ossa frontalia* ossium parietalium tertia parte fere minora, invicem coalita, os unicum sistunt, cujus media pars dimidiam longitudinem tantummodo ossium parietalium aequat. Superficies eorum externa superior vix convexa in medio impressionem fere triangularem sat distinctam offert, in cujus anteriore parte in quovis latere sulcus oblongus animadvertitur, qui in foramen parvum ducit. Partis orbitalis externa superficies convexa. Anterior ossis frontis margo in medio excisuram profundam, acutangulam offert, ossibus narium excipiendis destinatam, prope ipsam excisuram vero in quovis latere in processum trigonum, acutum, elongatum prominet, qui in spatium a maxilla superiore et osse nasi relictum intrat et a processu simili ossis intermaxillaris fere tangitur.

*Ossium palati* pars perpendicularis tenuis, humilis, versus capitis posteriora valde elongata, oblonga, recta. Pars ejus posterior, quae anteriorem processus pterygoidei partem obtegit, dilatata et in externae superficiei medio in cristam parvam usque ad marginis sui posterioris processum triangularem et in ipsum processum extensam elevata, supra marginem inferiorem acutum, paulisper curvatum autem impressione longitudinali instructa. Utriusque lateris pars perpendicularis tantopere sibi approximata ut spatium oblongum, si cum aliorum animalium craniis comparas, sat angustum inter utrumque os palati remaneat, quod supra a vomere occlusum conspicitur et canalem oblongum latere inferiore apertum exhibet, qui quidem spatio simili inter processus pterygoideos remanente et supra a corpore ossis Sphenoideo clauso augetur et cavitati narium amplificandae inservit. — Ossis palati pars horizontalis seu palatina formam fere oblique tetragonam et marginem anteriorem paulisper inaequaliter dentatum et curvatum, margines laterales fere rectos, margi-

nem internum rectum et marginem posteriorem in interiore parte arcuatum, in parte exteriori in processum parvum, uncinatum, cui processus parvus triqueter ossis maxillaris adnectitur, desinentem offert. Foramina palatina utrinque terna.

*Canalis pterygopalatini* apertura inferior retrorsum spectat et non a solo osse palatino, sed etiam a maxilla superiore et osse sphenoideo includitur.

*Maxillarum* diameter longitudinalis admodum evoluta est. Partis molaris superficies exterior satis fortiter deorsum inclinata et depressa apparet. Posterior superficies valde excavata. Margo posterior, qui os maxillare cum osse frontis et osse sphenoideo conjungit arcuatus et dentibus inaequalibus instructus, margo nasalis vix parum curvatus, edentatus, margo anterior fere parabolicus reperitur. — Processus zygomaticus uncum satis fortem, retrorsum spectantem in apice rotundatum, in anteriore superficie impressione longitudinali exaratum refert. — Maxillae partis palatinae superficies inferior praesertim prope marginem internum rectum et in ipso margine concava. Margo ejus posterior arcuatus versus exteriora in processum trigonum desinit, qui cum processu uncinato ossis palati jam descripto conjungitur; margo anterior vero in processum trigono-pyramidalem acutum prominet, qui ab excisura ossis intermaxillaris excipitur. — Pars alveolaris in parte sua anteriore magis introrsum, in parte posteriore vero, quae anteriore multo magis est evoluta (ob dentes, qui ipsi affiguntur magis evolutos) versus exteriora curvata. Canalis infraorbitalis amplissimus foramina admodum magna offert.

*Ossa lacrymalia* superficiem exteriorem fere semilunarem, marginem anteriorem arcuatum et canalis lacrymalis aperturam externam amplam ostendunt.

*Cavitas* propria ossea *oculis excipiendis destinata* non conspicua.

*Ossa nasi* admodum elongata, et cranii longitudinis tertia parte longiora formam tetragono-elongatam exhibent. Superficiei eorum externae pars anterior fere plana, pars posterior vero parum convexa animadvertitur. Margo posterior in processum trigonum desinit, qui ab ossis frontis excisura supra commemorata excipitur. Margo lateralis et interior fere rectus, margo anterior in medio truncatus, in an-

*

gulo exteriore vero in processum trigonum elongatus, qui interiori ossis intermaxillaris superficiei adnectitur

*Vomer* inde ab ossium palatinorum partis perpendicularis parte posteriore fere usque ad ossium intermaxillarium apicem est extensus, et in apicis sui anterioris, superiore margine dilatato et incrassato ad cartilaginem teretem, fortem in proboscidem transientem excipiendum canaliculatus conspicitur.

*Conchae* elongatae, contortae.

*Ossa intermaxillaria* elongata magnam cranii partem efformant et in superiore parte tertia maxillae superioris longitudinis parte tantummodo breviora animadvertuntur. Anterior eorum pars et ut proboscidi adhaesionis puncta praebeat, et insimul dentes primores anteriores magnos excipiat, non solum admodum evoluta est, sed etiam parte sua alveolari deorsum valdopere prominet. Pars lateralis, perpendicularis, parum convexa marginem superiorem seu nasalem rectum, marginem inferiorem prominentem, acutum, parum curvatum, inter dentes incisivos anteriores et medios disjunctos excisura semilunari instructum: marginem anteriorem fere parabolicum, in parte superiore (ut suspicari licet propter proboscidem affixam) valde incrassatum et marginem posteriorem denique arcuatum, supra in processum valde elongatum triquetrum, spatium quod inter ossa nasi et maxillam superiorem remanet implentem ostendit. — Partis inferioris ossium intermaxillarium pars posterior horizontalis, pars anterior vero cum dentibus arcuatim deflexa et perpendicularis apparet. Partis inferioris posterior margo excisuram acutangulam ad processum triangularem maxillae superioris excipiendum praebet. In medio pars inferior seu horizontalis foraminibus incisivis oblongis, valde elongatis, postice processus trianguli maxillae apice occlusis est perforata. Pone dentes incisivos duos anteriores, inter ipsos et reliquos dentes incisivos prope exteriorem foraminis incisivi marginem fossa subrotunda parum profunda conspicitur, cui mandibulae dentis incisorii secundi apex admovetur. In partis perpendicularis medio, ubi ambo ossa intermaxillaria invicem conjunguntur, et quidem in interiore superficie pone alveolos, impressio longitudinalis observatur.

Inferiori excisurae nasalis ossis intermaxillaris margini *ossiculum* tetragono-rotundatum, admodum compressum, cutis ope situ horizontali adhaeret, quod in ipsa proboscidis baseos inferiore parte jacet et sine dubitatione ossiculi similis in *Suibus* et *Talpa* conspicui est analogon.

*Mandibula* pro cranii ratione elongata. Pars ejus media seu corpus sat angusta, elongata et symphysi valde elongata praedita. Superficierum lateralium pars anterior paulisper concava et foraminibus pluribus perforata, media convexa, posterior fere plana. Margo inferior ante angulum posteriorem satis fortiter supra partem condyloideam prominentem, dilatatum, fere tetragono-rotundatum emarginatus et ante emarginationem processu parvo, obtuse trigono, introrsum vergente instructus. Processus condyloideus sat magnus, processus coronoideus admodum validus, robustus, magis in latitudinem quam in longitudinem expansus, basi triqueter, apice rotundatus et extrorsum directus, in superficie interiore et exteriore fossa modice profunda excavatus. — Superficies mandibulae interna maxima ex parte concava, cristam obtusam, a margine alveolari ad processum condyloideum vergentem, et minorem cristam supra ipsum angulum discurrentem offert. Canalis inframaxillaris posterior apertura magna.

*Dentes* quadraginta, validi, acuti, albi, in quavis maxilla viginti, quorum sex incisivi, sex (utrinsecus tres) molares spurii, et octo (utrinsecus quatuor) molares veri.

Maxillarum ambarum dentes autem quoad formam et magnitudinem inaequales.

*Dentium incisivorum seu primorum superiorum* duo anteriores elongati, reliquis maxillae dentibus fere duplo longiores eosque superantes, basi spatio admodum angusto, triangulari disjuncti, sub apicibus vero approximati, quoad formam fere elongato-triquetri. Superficies eorum exterior lata, curvata, modice convexa, antem arginem posteriorem acutissimum impressione longitudinali parum distincta exarata; superficies posterior oblique introrsum et ad anteriora versa, paulisper excavata; superficies interior omnium angustissima marginem potius quam superficiem exhibet. Apex acutus, triqueter, margine seu potius pagina interna impressione triangulari instructus,

qua quidem impressione apicis interior pars truncata et ipse apex quasi extrorsum directus evadit. — Dentium primorum superiorum quatuor posteriores ab anterioribus spatio sat magno fossa subrotunda parum profunda, ad dentium incisivorum mediorum inferiorum apicem excipiendum, excavato disjuncti. — Dentium incisivorum superiorum posteriorum anterioris utriusque maxillae lateris corona parum retrorsum spectans, recta, triangularis, compressa, acutissima, basi tuberculorum duorum (anterioris et posterioris) vestigiis instructa; ultimi autem, qui incisivo antecedenti parum approximatus est, corona perpendicularis, simplex, conico-triangularis, compressa, acuta, basi tuberculorum vestigiis haud instructa penultimi incisivi corona fere duplo brevior — *Molarium spuriorum* superiorum anterior incisivorum posteriorum anteriori fere similis, sed major, fortior et praecipue latior, corona conica-triangulari, compressa, basi tuberculis parvis duobus (anteriore et posteriore) instructa. — Molarium spuriorum medius quoad formam anteriori quidem similis, sed tertia parte brevior et angustior, minus validus, et compressus et tuberculorum vestigiis vix instructus. — Molarium spuriorum superiorum ultimi, qui primo molari spurio brevior, sed latior, secundo autem major evadit, corona triangularis, quadrituberculata, tuberculis inaequalibus, tribus scilicet, quorum duo exteriora et unum interius, parvis, quarto vero seu medio in acumen acutum, triangulare, pagina externa sulcatum **) reliqua tubercula longe superans prominente. — *Molares veri* superiores quoad magnitudinem inaequales et mandibulae molaribus latiores quidem, sed breviores. Ultimus reliquis fere tertia parte minor, primus mediis paulo minor. Primi corona fere rhomboidalis angulo tamen externo anteriore antrorsum prominente, mediorum corona transversim oblongo-tetragona, ultimi corona magis oblonga, angulo posteriore vero truncata. Primi, secundi et tertii corona tuberculis quinque instructa, quorum duo sunt ex-

---

*) Dentium incisivorum posteriorum forma talis est, ut eos potius molares spurios, quam incisivos dixeris, nisi ossi intermaxillari essent inserti.

**) Molaris spurii ultimi tuberculum medium molarium verorum tuberculo medio exacte respondet in pagina exteriore vero fossae triangularis loco sulcum oblongum ostendit.

teriora, duo interiora et unum medium. Medium omnium longe maximum, triangulare, in acumen triquetrum, pagina exteriore fossa triangulari excavatum desinit, quae quidem fossa, in duobus molaribus mediis et in molari posteriore magis evoluta atque in primo molari observatur. Tubercula externa medio tuberculo tertia parte breviora. Molaris secundi et tertii tubercula externa et molaris quarti tuberculorum exteriorum anterius apice emarginatione simplici instructa eamque ob causam obtuse bidentata, molaris anterioris tuberculorum externorum posterius autem emarginatione duplici instructum et obtuse tridentatum. Molaris primi tuberculorum exteriorum anterius et molaris ultimi tuberculorum externorum posterius simplicia, acuta, edentata. Tubercula interna, quorum anterius posteriore tertia parte majus et longius evadit, fere oblonga, in acumen sat acutum desinentia. Quarti molaris corona, ob tuberculum interius simplex, tantummodo quadrituberculata.

*Dentes incisivi infra* sex *) approximati, inaequales. Anteriores oblongi, angusti, mediis plus duplo breviores et angustiores scalpro fere triangulari vix acuto instructi. Medii seu laterales anteriores conici, validi, arcuati, dentium laniorum formam admodum referentes et reliquos dentes longitudine superantes, in superficie posteriore arcuata et excavata crista parva longitudinali instructi, in superficie interiore vero sulco admodum profundo, triangulari, paulisper arcuato, inde a dentis coronae basi fere usque ad apicem ejus excurrente et canalem triangulum extrorsum apertum, in coronae basi latiorem et totam basin ad margines usque occupantem efficiente excavati. Incisivorum posteriores abbreviati, conici, acuti paulisper antrorsum vergentes, et incisivis anterioribus paulo breviores, sed eos latitudine duplo superantes. — *Molares spurii* utrinque tres. Molarium spuriorum anterior incisivum posteriorem magnitudine fere duplo superans, corona conico - triangulari, obliqua, paulisper antrorsum tendente, et margine posteriore impressa. Medius anteriore brevior, sed paulo latior corona recta, triangulari - conica paulisper com-

---

*) Numerum senarium secundum dentes maxillae et mandibulae sese invicem attingentes definivimus eamque ob causam in mandibula primum molarem spurium eum diximus, qui primo molari spurio maxillae adteritur.

pressa, parum acuta, basi tuberculorum vestigiis vix distinctis instructa. Ultimus medio longitudine fere aequalis, sed angustior, et corona triangulari, basi tuberculis duobus parvis, anteriore et posteriore, instructus, et in acumen rectum conico-triangulare desinens. — *Molares veri* quatuor, inaequales, molares spurios magnitudine superantes, corona tetragona, rotundata, quadri-vel quinquetuberculata, tuberculis exterioribus et mediis et saepius etiam anterioribus admodum elevatis. Anterior ultimo longior, sed angustior, tuberculis quatuor instructus, quorum anterius minimum, posterius anteriore paulo majus, media magna, basi invicem connata, apice vero libera et conice desinentia. Secundus et tertius anteriore paulo longiores et latiores tuberculis quatuor instructi, quorum posterius minimum, reliqua in processum admodum prominulum, triangularem in pagina interiore plana, ubi tubercula duo interiora cohaerent, sulco longitudinali instructum, pagina exteriore vero compressum connata, cujus apex tria offert tubercula, quorum duo interiora, (anterius conicum reliquis minus et posterius conicum anteriore majus), unum autem exterius triangulare omnium maximum et pagina interiore fere planum. Ultimus molaris mediis quoad formam similis, sed brevior et latior, tuberculum ejus posterius multo magis quam in tribus molaribus anterioribus evolutum et apice suo non simplex, sed in duo tubercula divisum *).

## De palato.

*Palatum* in antica parte cujusvis lateris inter dentem incisivum et primum molarem spurium fossa parum profunda instructum, ad excipiendum secundi dentis incisivi magni apicem, et inter ipsas fossas triquetrum, in media parte vero rugis octo versus rostri apicem sensim brevioribus inaequale. Rugarum quatuor anteriores versus

---

*) Si molarium mandibulae coronam cum maxillae molarium corona comparare vis, duo interiora maxillae et mandibulae molarium tubercula sese correspondebunt, medium autem tuberculum maxillae molarium magno tuberculo externo mandibulae molarium aequiparandum erit. Duorum exteriorum maxillae molarium tuberculorum analoga autem frustra in mandibula quaeres, nisi mandibulae molarium tubercula posteriora eorum rudimenta esse censeas.

anteriora in angulum triangularem desinentes, quinta haud angulata, sexta et septima in medio angulata, angulo retrorsum directo, ultima medio interrupta. Rugarum secunda tertia et quarta reliquis validiores.

### De animalis vivendi genere.

De animalis vivendi genere nihil constat. E proboscidis et unguium structura fodientibus adnumerandum esse concludi potest. Nasus et laminae cribrosae forma olfactus organon evolutum indicare videntur.

---

## CRANII SOLENODONTIS
### *cum propinquorum generum craniis comparatio.*

De Solenodontis similitudine cum aliis animalibus, quoad partes externas jam in introductione egimus, forsan tamen haud inutile erit disquisitiones nonnullas comparativas in variorum generum affinium crania institutas addidisse.

Inspectis variorum animalium craniis in Solenodonte cognitionem quandam cum generis Centetis, Soricis et Myogales cranio inveniri haud negari potest.

Centetis cranium minus accurate consideratum processus pterygoidei forma elongata et partis perpendicularis ossis palati directione, bullae osseae et ossis zygomatici defectu, nec non mandibulae forma propinquum apparet. Soricis cranium bullae osseae et ossis zygomatici defectu, Myogales vero ossium rostrum constituentium figura et dentium incisivorum evolutionis ratione *) cognationem quandam offerunt.

Solenodontis tamen cranium differentias tot peculiares praebet, ut cum cognitorum generum craniorum nullo ad amussim conveniat. Quarum quidem differentiarum notio quo melius elucescat, haud alienum fore spero craniorum affinium et Solenodontis cranii notas primarias ita referre, ut brevi in conspectu posita appareant.

*) In utroque enim genere dentes incisivi anteriores maxillae a reliquis intervallo sunt diremti et reliquis multo majores conspiciuntur, in utroque genere porro dentes incisivi medii mandibulae reliquis incisivis majores evadunt.

## Genus Centetes.

Cranium admodum elongatum. Os occipitis, ossa bregmatis et ossa temporum modice convexa. Ossis occipitis condyli prominentes. Sutura frontalis et sagitalis in cristam insignem elevata. Bulla ossea nulla. Crista propria e corporis ossis sphenoidei lateribus prominens et in latere tympani cavitatis sita. Processus pterygoidei externi et interni apparentes. Os zygomaticum nullum. Mandibulae processus coronoideus extrorsum directus. Mandibulae angulus dilatatus, rotundatus, planus, processum condyloideum haud superans *).

## Genus Sorex.

Cranium elongatum. Os occipitis, ossa bregmatis et ossa temporum valdopere convexa et rotundata, fere inflata, tenuia. Ossis occipitis condyli applanati. Sutura sagittalis et frontalis in cristam haud elevata. Bulla ossea nulla. Processus pterygoidei recti, valde incrassati et cum parte perpendiculari ossis palati recto, pari modo valde incrassato coaliti. Os zygomaticum nullum. Mandibulae processus coronoideus perpendicularis, rectus, elongatus, sat angustus; mandibulae angulus in processum oblongum, admodum angustum, processum condyloideum longe superantem extensus.

## Genus Myogale **).

Cranium elongatum. Os occipitis, os temporum et ossium bregmatis posterior pars convexa. In ossis occipitis angulo lambdoideo processus tridentatus, proprius, laminae formam exhibens. In occipitis squamae latere quovis ***) et in palati quovis latere foramen peculiare insigne. Cristae tres peculiares, acutae, a processu mastoideo radiantes. Sutura sagittalis et frontalis in cristam acutam elevata. Bulla ossea

---

*) Cranii Centetis quam dedimus adumbratio desumta est ex opere eximio: Die Skelete der Chiropteren und Insectivoren von Dr. E. D'Alton d. Ä. und J. Bonn 1831. fol.

**) Quae de Soricis et Myogales diximus propriis nituntur observationibus.

***) Talium foraminum analoga etiam in Phocis (cf. Meckel, Vergl. Anat. Bd. II. 2. 483) et in avibus, praesertim palmipedibus inveniuntur.

oblonga, distincta, cum processu pterygoideo interno coalita. Processus pterygoidei, externi rudimentum. Os zygomaticum, angustum, distinctum. Mandibulae processus coronoideus elongatus, perpendicularis, rectus. Mandibulae angulus in processum tetragonum, fossis tribus peculiaribus, profundis singulari modo excavatum desinens.

### Genus Solenodon.

Cranium admodum elongatum. Os occipitis, ossa bregmatis et ossa temporum modice convexa. Ossis occipitis condyli prominentes. In sutura sagittali crista obtusa, in ossibus frontis coalitis crista nulla. Processus pterygoidei interni soli conspicui, tenues cum partibus ossis palati perpendicularibus suturae ope conjuncti. Bulla ossea nulla eamque ob rem cavitatis tympani interior paries cute tantum clausus. Os zygomaticum nullum. Mandibulae processus coronoideus dilatatus, extrorsum directus. Mandibulae angulus dilatatus, subtetragono-rotundatus, supra partem condyloideam prominens.

---

## CHARACTER GENERIS

*Soledon essentialis et naturalis.*

Quum in animalis descriptione de omnibus partibus et de iis, quae systematicae distinctioni minoris sunt momenti, fusius actum sit, restat adhuc ut characteres essentiales et majoris momenti genus nostrum a reliquis generibus discernentes in conspectum ponamus.

### Character essentialis.

Dentes primores seu incisivi $\frac{6}{6}$, superiorum duo anteriores maximi, a reliquis disjuncti, perpendiculares, unicuspides, inferiorum duo anteriores brevissimi, angustissimi, duo medii longissimi, conici, pagina interna canali aperto, admodum profundo, triangulari excavati. Molares spurii $\frac{6}{6}$. Molares veri $\frac{8}{8}$.

*

### Character naturalis.

Habitus fere inter Soricem et Didelphydem. Rostrum elongatum, proboscide tereti, elongato, nares in apicis lateribus gerente. Oculi minuti. Auriculae magnae, rotundatae, fere calvae. Corpus pilosum. Prymna et uropygii superior facies pilis brevissimis, sericeis, raris obsessae. Pedes ambulatorii, plantigradi, pentadactyli, fissi. Ungues falculares, antipedum longiores. Mammae inguinales (?). Cauda elongata, teres, maxima ex parte squamata.

## TABULARUM EXPLICATIO.

### Tabula I.

Solenodon paradoxus ad dimidiam magnitudinem naturalem redactus.

### Tabula II.

Solenodontis anatome.

*Figura* 1. Cranium cum mandibula a latere inspiciendum.
*Figura* 2. Superior cranii facies.
*Figura* 3. Facies cranii inferior.
*Figura* 4. Baseos cranii interior facies.
*Figura* 5. Interior seu inferior maxillae facies.
*Figura* 6. Maxillae dentes a latere inspecti.
*a a* magnitudine naturali
*b b* molaris spurius ultimus et molares veri magnitudine aucta.
*Figura* 7. Anterior ossis intermaxillaris pars, cui os proboscidis (*a*) adhaeret, cum dentibus incisivis anterioribus.
*Figura* 8. Dentis incisivi anterioris superioris anterior superficies.
*Figura* 9. Mandibula a latere depicta.
*Figura* 10. Mandibulae dentis unius lateris a superficie superiore in conspectum venientes.
*Figura* 11. Mandibulae pars anterior cum quatuor dentibus incisivis anterioribus.
*Figura* 12. Dentis incisivi mandibulae secundi seu medii corona a facie interiore inspecta, ut canalem triangularem ostendat.
*Figura* 13. Pedis anterioris anterior pars a dorsali latere depicta.
*Figura* 14. Pedis posterioris anterior pars a dorsali latere expressa *).

*) Tabulae secundae figura 1 — 5 et figura 7 — 14 magnitudine naturali sunt redditae.

# BEOBACHTUNGEN UND UNTERSUCHUNGEN

ÜBER DIE

# BEROEARTIGEN AKALEPHEN,

VON

H. MERTENS. (*)

(Gelesen den 7. November 1832.)

Wenn man mit Aufmerksamkeit die Akalephen während einiger Zeit in ihrem Elemente studirt hat, so glaubt man überzeugt seyn zu müssen, dass sämmtliche Thiere dieser Classe sich in vier Ordnungen vertheilt finden. Eine blosse Erwähnung der Benennungen, mit welchen ich diese Ordnungen bezeichne, wird hinreichend seyn, den Naturforscher mit meinen Ansichten über die Gruppirung dieser Thiere bekannt zu machen, und ihn selbst in den Stand zu setzen über die Natürlichkeit derselben zu urtheilen. Es sind solche 1) die Beroideen
2) die Medusen,
3) die Physsophoren,
4) die Velellideen,

wohin beyläufig gesagt auch *Physalia* gehört.

---

*) Nachstehende Abhandlung wurde in ihrer jetzigen Form vom Verfasser hinterlassen, jedoch ohne eine Bezeichnung der einzelnen auf den Tafeln dargestellten Theile mit Buchstaben, ebenso wie ohne Kupfererklärung. Den letzterwähnten Mängeln half H. Dr. *Brandt* ab und fügte auch noch überdies einige mit *Br.* bezeichnete Anmerkungen hinzu.

## DIE BEROIDEEN.

(*Ctenophorae Eschsch.*)

Die zu dieser Ordnung gehörigen Thiere unterscheiden sich bei der oberflächlichsten Betrachtung von allen übrigen Akalephen, durch die 4 oder 8 Rippen, die über einen Theil ihrer Oberfläche verlaufen, und welche in ihrer ganzen Länge dem Auge ein beständiges Spiel aller Farben des Regensbogens darbieten. *Eschscholtz* hat daher sehr glücklich dieselben zur Benennung dieser Ordnung benutzt, um so mehr da sich kaum ein andres Merkmal äusserlich auffinden lässt das allen gemeinschaftlich zukäme. Ihr Ansehen ist sehr vielen Modificationen unterworfen, und man könnte geneigt seyn anzunehmen, dass sich keine natürliche Uebereinstimmung in denselben darthun liesse: Bald vollkommen bandartig zu einer ungemeinen Länge ausgedehnt, bald unter der Gestalt einer Glocke, bald ey- oder melonenartig, bald mit besondern flügelförmigen Anhängen versehen, scheinen sie in der That alle Formen *) annehmen zu können. Bey genauerer comparativer Betrachtung indess gelingt es bald an allen diesen verschiedenen Formen einen Faden wahrzunehmen, der uns selbst zu einer natürlichen und philosophischen Eintheilung führt. Man muss bei der Betrachtung der verschiedenen Formen, die diese Ordnung enthält dahin geführt werden, nachzuspüren, welches denn der eigentliche wesentliche Theil des Thieres, welches die Basis sey, die seinen Formen zum Grunde liege, und welche Ursachen daher obwalten, warum Thiere, die offenbar eine grosse natürliche Verwandtschaft untereinander zeigen, in ihnen äussere Ansehen so sehr verschieden seyn können.

Man sieht sich genöthigt an diesen Thieren einen eigentlichen Körper, in dem sich die wesentlichen Eingeweide befinden, und mehr oder weniger flügel- oder mantelartige Anhänge zu unterscheiden.

*) Ueberblickt man die mannichfachen äussern Formen der Quallen, so könnte man sie hierin, aber auch nur hierin, einigermasen mit den Pilzen vergleichen, wo ebenfalls Formmodificationen in ähnlichen Abstufungen vorkommen, namentlich bei den Hut- und Kugelpilzen. *Br.*

Diese Theile nun stehen in den verschiedenen Arten, die diese Ordnung bilden, in sehr verschiedenen Verhältnissen gegen einander. Bald nämlich zeigt sich der Körper, bald die Anhänge als die überwiegenden Massen. Es ist nicht möglich in der Organisation dieser Thiere Theile aufzufinden, die sich besser als diese zu Eintheilungs-Gründen benutzen lassen. Nimmt man auf sie Rücksicht, so zerfallen die Beroideen in 4 Familien, die so natürlich sind, dass sie selbst dem Laien in die Augen fallen, und er trotz der Uebergänge, die sich von einer Familie zur andern zeigen, kaum einen Fehler begehen wird, wenn man sein Urtheil begehrt, kömmt es darauf an die verschiedenen Arten, in diese Familien oder Gattungen zu vertheilen.

Zuerst sehen wir in der Familie oder Gattung *Cestum* den Körper an Masse so vorherrschend, dass das ganze Thier fast aus Nichts Anderem besteht. Es ist derselbe zu beiden Seiten so sehr in die Länge gezogen und dabei so von vorn und hinten zusammengedrückt, dass er ein vollkommen bandartiges Ansehen gewonnen hat. Von dem Mantel zeigt sich nur eine Spur in zwei Franzen oder Säumen, die an dem einen Rande dieses bandförmigen Körpers verlaufen, an ihnen sieht man die irisirenden Rippen, die diese Ordnung der Beroideen charakterisirt, und zwar jederseits zwei, im Ganzen also vier. Von den andern vier in den Farben des Regenbogens spielenden Rippen, sehen wir hier nur die unter denselben verlaufenden Gefässe in der Mitte der Höhe des Thieres durch die ganze Länge des Bandes auf jede Fläche sich erstrecken.

In der zweiten Familie, die aus der Gattung *Callianira* von *Péron* gebildet wird, erscheint der Körper ungemein verkleinert, beschnitten mögte man sagen; indess auch hier herrscht in der Regel noch die Breitendimension über die der Länge vor. An seinen beiden Enden sehen wir einen besondern Anhang sich dergestalt heften, dass dessen Ränder, jederseits gegen die Mitte des Körpers gerichtet sind. In einigen Arten sind die Ränder dieser Anhänge in ihrer ganzen Länge frey; in andern dagegen haben sie sich so einander genähert, dass sie sich in ihrer obern Hälfte (indem auch dort die Ränder des Körpers allmählig abgerundet sind) sogar berüh-

ren und unter einander zum Theil verwachsen sind, so dass hier schon der Mantel den Körper theilweis als eine halbe Glocke umgiebt. Der irisirenden Rippen sind immer acht, von denen bei einigen Arten vier auf dem Mantel und vier auf dem Körper oder auf besondern Organen verlaufen, während in andern dagegen alle acht nur auf dem Mantel zu suchen sind.

In der dritten Familie, die die eigentlichen *Beroën* zusammensetzen, sehen wir den Körper noch mehr beschnitten; hier findet man keine Spur mehr jener bandförmigen Ausdehnung desselben. Die Längendimension herrscht fast immer vor, und die Ränder der mantelförmigen Anhänge, haben sich durch ihre ganze Länge mit einander vereinigt. Die Thiere dieser Familie erscheinen sämmtlich mehr oder weniger kugel-, ey- oder gurkenförmig. Die acht Rippen sind natürlich hier, wo der Mantel den Körper ganz einschliesst nur auf dem ersteren anzutreffen.

Die vierte Familie endlich, die *Idyen*, bilden den strengsten Gegensatz mit der ersten. Der Mantel ist hier der bei weitem vorherrschende Theil, der Körper hat sich so zurückgezogen, dass er fast spurlos verschwindet; das ganze Thier ist Mantel, der eine einzige, grosse Glocke bildet, in deren tiefstem Grunde man die Rudimente desjenigen Theiles wahrnimmt, der in den vorigen Familien Körper genannt wurde.

Wir gehen jetzt über zu der allgemeinen Ansicht der einzelnen Theile oder Organe.

In allen Beroideen, wo sich der Körper als ausgebildeter Theil darstellt, daher in *Cestum*, *Callyanira* und *Beroë*, sehen wir denselben aus einer etwas mehr consistenten Masse gebildet als die des Mantels. Er ist allenthalben sehr zusammengedrückt, nie rund, nicht einmal rundlich, in seinem Grunde indess stets dicker als da wo die Mundöffnung zu suchen ist, so dass wenn man den Körper seiner Höhe nach durchschneidet, die durchschnittene Fläche sich immer dreyeckig zeigt. Am deutlichsten wird dieses bey *Cestum*, das fast aus Nichts als dem Körpertheile besteht.

In der Axe des Körpers bemerkt man die Verdauungsorgane. Diese bestehen zunächst aus einer Höhle, die sich im Grunde des Thieres blind endigt, denn der umschriebene Kreis, den man äusserlich daselbst findet, und der in keiner Beroide fehlt, steht nicht mit der Verdauungshöhle in Verbindung, wie solches mir durch viele Injectionen klar geworden ist. Auch sieht man deutlich, dass die Beroiden die nicht verdauten Nahrungsstoffe wieder durch dieselbe Oeffnung entleeren von der sie aufgenommen werden.

Mit Ausnahme von *Idya* kann man in allen übrigen Beroiden in diesen Organen immer wenigstens zwei Theile unterscheiden, von denen der eine mit dem Schlunde und Magen, der andre mit dem Darm zu vergleichen wäre. Der erstere bietet äusserlich an dem Rande, an welchem die Substanz des Körpers sich am dünnsten, fast häutig, zeigt, eine mehr oder weniger weite glocken- oder trichterförmige Oeffnung dar, die gegen den Grund zu sich sehr verengt. Dieser ganze Theil ist sehr zusammengedrückt, so dass, wenn man das Thier von vorn oder hinten betrachtet seine ganze Breite in die Augen fällt. Es steht derselbe in unmittelbarer Verbindung mit der andern Partie, die den eigentlichen Functionen des Darms vorsteht. Die Verbindungen dieses Theiles sind bei weitem derber als die des Schlundes. Auch er ist zusammengedrückt, jedoch in einem ganz entgegengesetzten Sinne, so dass man das Thier von der Seite betrachten muss um seinen Umfang wahrzunehmen; denn sieht man das Thier gerade von vorn oder hinten so erscheint er als blosses Gefäss oder Faden, eben so wie, wenn man das Thier seitwärts anschaut der Mund oder Schlund kaum wahrzunehmen ist. Dieser Umstand erschwert sehr die Untersuchung dieser Thiere, über deren Bau man zu gar keinem Resultate gelangt, wofern man sie nicht während des Lebens untersucht. Da dann aber eine fortwährende Bewegung statt findet, so hat man beständig eine andre Ansicht des Thieres. Eine Zeichnung, die einen Augenblick früher sehr richtig schien, versteht man nicht mehr, da das Thier gegen das beobachtende Auge anders gestellt ist. Vorzüglich gilt dieses von den eigentlichen Beroëen, die häufig ganz rund, nicht immer erlauben, dass man die Seiten von der vordern und hin-

tern Fläche des Thieres unterscheidet. In dieser nämlichen Familie finden sich überdiess noch mehrere besondere Organe, über deren Bedeutung ich mich bisjetzt noch keinesweges mit Bestimmtheit zu äussern wage.

Die Circulation des Blutes geschieht wahrscheinlich nicht in allen Beroiden auf die nämliche Weise. Am deutlichsten beobachtet man sie in *Beroë* und *Cestum*, wo man die Richtung der Blutkügelchen sehr weit zu verfolgen im Stande ist, in den Callianiren dagegen, vielleicht mit Ausschluss von *Leucothea* und in den Idyen ist es sehr schwer zu einigen entscheidenden Resultaten zu gelangen. Von dem indess, was ich im Allgemeinen in *Beroë* und *Cestum* beobachtete, kann ich folgende Beschreibung geben. Da wo die Einschnürung im Verdauungskanale statt findet, die den Magen von dem Darme trennt steht diese Höhle mit 4 Gefässen in Verbindung, die sich in den Beroen gleich nach einer Anschwellung in zwei Arme theilen und alsdann zu den Rippen gehen unter welchen sie verlaufen. In *Cestum* dagegen, wo nur vier Rippen sind, verlaufen diese Gefässe gerade gegen den Grund des Thieres, und bei den Rippen angelangt steigt von einer jeden derselben wieder ein Gefäss abwärts, welches, wenn es etwa in der Mitte der Höhe des Thieres gekommen ist, sich jederseits durch die ganze Breite des Bandes erstreckt, und an den Extremitäten desselben wieder mit denen zusammenmündet, aus welchen es entsprungen; vielleicht auch noch mit einem andern, welches, wie es mir schien, längst dem untern Rande des Thieres verlief, um wahrscheinlich eine Rückkehr des Blutes gegen die Centralorgane zu bewerkstelligen. In den Idyen bemerkt man dieselben Gefässe unter den Rippen sehr deutlich, erkennt das Gefässnetz, welches sich auf der Oberfläche bildet, und sieht wie diese Gefässe sich in ein Randgefäss münden, von welchem aus auf der innern Oberfläche des Mantels das Blut in zwei grossen Gefässen gegen den Grund zurückkehrt.

Man sucht vergebens in allen freien Akalephen nach doppelten Geschlechtsorganen, und selbst was die weiblichen anbelangt muss ich über die eigentlichen Organe Zweifel hegen. Ich glaube hier dieselben Theile ansehen zu müssen, die sich deutlich in allen Beroen, in *Cestum* und selbst in einigen Callianiren zeigen. Es

sind dieses Organe von offenbar drüsigter Structur, die einerseits mit dem Darmkanal in Verbindung stehen, andrerseits in den meisten Fällen direct mit der Aussenwelt durch den Kanal, durch welchen die Angreifsorgane in das Innere des Körpers zurückgezogen werden können, communiciren. Es sind mehr oder weniger lange Behälter, die, mit Ausschluss dessen was ich in *Callianira* beobachtete, mit dem Darme parallel laufen, bald je zwei, bald nur einfach auf jeder Seite. Sie sind offenbar, mit Keimen angefüllt, und scheinen sich in einer besondern Höhle zu befinden, in welche die Angreifsorgane sich zurückziehen können.

Die Angreifsorgane finden sich in Arten der Familie *Cestum*, *Callianira* und *Beroë*. Sie bestehen meist aus sehr retractilen Fäden, die einseitig mit kleinen Röhrchen versehen sind, an deren Enden man kleine Saugnäpfchen wahrnimmt. Es ist unglaublich zu welcher Länge sich diese Organe ausdehnen können. Meist sind ihrer in jedem Individuo zwei vorhanden. Nie sah ich Theile dieser Art, die auf eine andre Weise verzweigt gewesen wären; und was man deshalb von einer *Callianira* behauptet, scheint wie es selbst aus der Abbildung in der *Encyclopèdie méthodique* deutlich hervorgeht, nur auf fehlerhaften Ansichten zu beruhen. An der *Modeer*'schen Figur, die das Thier, welches er beschreibt, in natürlicher Grösse darstellt, bemerkt man vier Zweige auf's Gerathewohl gezeichnet. In der Darstellung indess, die *Brugières* von der von ihm beobachteteten Art giebt, laufen die Angreifsorgane allerdings scheinbar in 3 Aeste aus, allein selbst diese Zeichnung giebt die Aeste als secundäre an. Ihre Grösse darf kein Einwurf seyn, denn es ist unglaublich zu welcher Länge sie ausgedehnt werden können. Die geringe Anzahl derselben lässt erwarten, dass diese Organe in den untersuchten Exemplaren nicht vollständig vorhanden waren; wie denn überhaupt die Zeichnung der Art ist, dass sie den jetzigen Forderungen keinesweges entspricht, und als nicht existirend betrachtet werden muss.

An den Körper heften sich in den Beroiden, wie wir gesehen haben, Anhänge, deren Entwickelung in den verschiedenen Familien bedeutenden Modificationen unterworfen ist. Während sie in *Cestum* nur mit Mühe beobachtet werden kön-

nen haben sie in *Idya* den Körper vollkommen überflügelt, so dass derselbe kaum wahrzunehmen ist. Ebenso aber wie ihr äusseres Ansehen verschieden ist, sehen wir auch dass ihre Consistenz keinesweges immer dieselbe ist. Diese erscheint bald fester, bald lockerer, bald lassen sich in denselben mit Deutlichkeit eine Menge von Gefässen wahrnehmen, durch deren Vermittelung die unter den Rippen verlaufenden unter einander anatomisiren, bald sind solche dem unbewaffneten Auge völlig unsichtbar. Die irisirenden Rippen, die fast immer auf ihnen verlaufen, zeigen sich ebenfalls bald mehr, bald weniger ausgebildet. Die in bestimmten Zwischenräumen von einander entfernten Blättchen sind bald mit einfachen, platten, sehr dünnen, haarförmig zugespitzten Fäden besetzt, bald sind solche an der Spitze vielfach, pinselartig möchte man sagen, zertheilt und in noch andern Arten sehen wir sämmtliche Fäden zu einer Membran verbunden, die bloss der Länge nach sehr zierlich eingeknickt ist. Ueber die Bedeutung dieser Organe bin ich keinesweges im Reinen; vielleicht sind sie mit Branchien zu vergleichen, wahrscheinlich aber mit den Organen, die wir in andern Ordnungen der Akalephen als solche kennen lernen werden, die Ursache des Nesselns sind, das diese ganze Klasse bezeichnet, und ihr den Namen den sie führt ertheilt hat. Bewegungsorgane sind es gewiss nicht, wie schon *Lamark* mit seinem über alle Begriffe scharfsinnigem Geiste, geäussert hat. Man sieht nicht selten diese Organe sämmtlich in der grössten Bewegung, und doch liegt das Thier ganz ruhig auf dem Grunde des Gefässes, und es bedarf nur einiger Zusammenziehungen und Ausdehnungen des Mantels, um das Thier schnell an die Oberfläche des Wassers zu bringen. Es ist wahr, dass die Bewegungen dieser Rippenblättchen meist den eigentlichen Ortsveränderungen vermittelst des Mantels vorhergehen, wenn nachdem das Thier gefangen wurde, es mehr oder weniger lange auf dem Boden des Gefässes wie todt gelegen hatte; allein dieses beweisst keinesweges, dass sie dieselben hervorbringen, sondern nur dass die Lebensäusserungen überhaupt in ihnen früher wieder hervortreten; wenn sie auf irgend eine Weise unterbrochen waren. Ich habe mich durch vielfältige Beobachtungen überzeugt, dass diese Organe die Reproductionskraft in einem eminent hohen Grade besitzen,

so dass ich keinen Scrupel hege zu behaupten, dass aus ihnen sich vollkommene Thiere entwickeln können, sobald nur wie sich versteht, die Umstände dazu günstig sind. In der Betrachtung der einzelnen Arten die ich zu beobachten Gelegenheit hatte, werde ich einen Theil der Resultate meiner Untersuchungen über diesen Gegenstand mittheilen. Die irisirenden Rippen, die aus diesen Organen gebildet werden, sind sehr bedeutender Contractionen und Dilatationen fähig. In so fern aber das Thier sich in einem mehr oder weniger zusammengezogenen oder ausgedehnten Zustande befindet, muss seine Oberfläche entweder sich als länglicht oder kugeligt zeigen, und daher dieselbe verschiedenen Dimensionen unterworfen seyn. Die in den Farben des Regenbogens spielenden Blättchen können sich aus eben diesem Grunde unmöglich immer in gleichmässiger Entfernung eins von dem andern befinden, sondern müssen je nach dem mehr zusammengezogenen oder ausgedehnten Zustande des Thieres auch einander näher oder ferner gerückt seyn, und eben daher die Räume zwischen denselben in einer und derselben Art zu verschiedenen Zeiten von verschiedener Länge seyn. Die an denselben gehefteten Härchen oder Membranen werden deshalb bald sich einander dachziegelförmig decken, bald eine von der andern so entfernt seyn, dass ihre Länge kaum die Hälfte des Raumes zwischen je zwei Blättchen ausmacht. Aus eben dem Grunde müssen bald die Rippen sich eingebettet in die Haut des Mantels zeigen, bald als auf dessen Oberfläche aufliegend in die Augen fallen.

Obgleich man keine Muskelfasern wahrnimmt, so sollte ich denken, dass man an ihrer Existenz nicht zweifeln darf, wenn man die Bewegungen berücksichtigt, deren das Thier behufs seiner Locomotion fähig ist. In der *Calymma Trevirani* sieht man übrigens ohne grosse Anstrengung des Auges Fasern auf dem Mantel, die bei den Bewegungen desselben sehr an Deutlichkeit gewinnen. *Rang* (*Mémoires de la société naturelle. T. IV. p.* 170) nennt sie geradezu Muskelfasern, und auch *Eschscholtz* bemerkte sie in den braunen Flecken die diese Art bezeichnen. Ob indess diesen wirklich das Zusammenziehungsvermögen der flügelartigen Anhänge zuzuschreiben sey, wage ich noch nicht mit Bestimmtheit zu behaupten.

Von einem Nervensysteme ist in den Beroiden ebensowenig, wie in irgend einer andern Akalephe das Geringste beobachtet worden *).

Sämmtliche Beroiden scheinen die Eigenschaft des phosphorisirenden Leuchtens während ihres Lebens zu besitzen. Die Kraft zu nesseln ist in ihnen sehr schwach. Ihr Aufenthalt ist an keine Zone gebunden, sondern sie finden sich in allen Meeren, unter allen Breitengraden, sowohl in der Nähe der Küsten, wie im hohen Meere. Nach dieser allgemeinen Einleitung, die keinen Anspruch auf eine vollständige Uebersicht des anatomischen Baues der Beroiden macht, wenden wir uns zu der Betrachtung der einzelnen Familien, wo ich mehr im Detail meine Beobachtungen mitzutheilen im Stande bin.

## CESTUM.

Der Körper ist bandartig in die Breite gezogen, so dass seine Breiten-Dimension bei weitem die vorherrschende ist. Vom Mantel findet sich nur eine Andeutung in zwei Franzen, die an die Basis des Thieres angeheftet sind, an dem Grunde derselben verlaufen die vier irisirenden Rippen. — Der Consistenz nach ist das Thier ungemein weich, durchaus gallertartig und gestattet keine Berührung mit der Hand, namentlich gegen die Extreme hin, und vorzüglich ausserhalb seinem Elemente. Seine Länge ist oft ausserordentlich bedeutend, und übertrifft nicht selten die eines Fadens. Die beiden Ränder laufen nicht vollkommen einander parallel, sondern kommen allmählig einander näher, so dass die äussersten Enden eine stumpfe Spitze bilden. Eben so nimmt das Thier an Substanz um ein Merkliches gegen sein Centrum zu. An der Basis ist die Dicke bei weitem bedeutender als an dem entgegengesetzten Rändern, so dass der Rand, an welchen sich die Rudimente des Mantels heften, wohl um drei Mal dicker als derjenige erscheint wo man die Mundöffnung zu suchen hat. Jemand, der sich in der Aufsuchung von Analogien gefällt, könnte sagen die *Cesta* seyen Medusen, deren Scheibe zusammengeklappt wäre. Der untere oder Mundrand läuft indess auch in zwei sehr schmale

---

*) Neuerdings hat aber *Grant* in einer Sitzung der *Zoological Society* über Nerven bei *Beroe ovatus* gesprochen. *Br.*

genbogens spielen, obschon sich daselbst keine mit Cilien versehenen Blättchen finden. Meistens genau im Centro des Thieres befindet sich der Verdauungskanal mit seinen Anhängen. Wie bei fast allen Beroiden besteht dieser zunächst aus zwei Theilen, die in der Art und Weise, in der sie ihre grösste Fläche dem Beobachter darbieten in entgegengesetzten Verhältnissen zu einander stehen, während der jenige, der dem Schlunde und Magen zu entsprechen scheint, in seinem ganzen Umfange erkannt wird. Betrachtet man des Thier von vorn oder hinten (Fig. 1), so erscheint der eigentliche Darm nur in den Dimensionen eines Fadens oder Gefässes, wenn das Thier in derselben Lage zum untersuchenden Auge verbleibt. Derselbe Nachtheil findet dagegen für den Schlund und Magen statt, wenn es gelingt den Darmkanal von der Seite zu betrachten (Fig. 5, 6). Die gallertartige Substanz, die den Grundbestandtheil des ganzen Thieres ausmacht, lässt indess einen Raum frei, der eine Art von glockenförmiger Höhle bildet, in welcher der Magen und Schlund, dessen Dimensionen mannichfachen Veränderungen unterworfen sind, sich befinden. Der Mund der sich an der sehr zugespitzten Kante des bandartigen Thieres findet, erscheint bald in die Länge, bald in die Breite gezogen, etwas sphincterartiges konnte ich indess nicht an demselben wahrnehmen. Die Speiseröhre ist ziemlich weit und verengt sich ein wenig, um diesen Theil von dem Magen zu trennen, in welchem *Eschscholtz* ein Paar besondre, lanzettförmige in das Innere der Höhle vorspringende Falten wahrnahm. Der eigentliche Darm ist unmittelbar von der gallertartigen Substanz umgeben, die die Masse des Körpers bildet, offenbar sind indess seine Wände fester wie der vorhergehenden Theile. Er endigt sich blind an der dicken Kante des Thieres. Meistens bemerkt man ihn angefüllt mit einer breiartigen, weichen Masse, die ich zu verschiedenen Malen durch die Mundöffnung entleert werden sah.

Zu beiden Seiten des Schlundes oder der Speiseröhre sieht man jederseits zwei Säcke angeheftet, die mit einer gelbbraunen, körnigten Masse angefüllt sind und den Theilen zu entsprechen scheinen, die man in den Medusen mit Eierstöcken verglichen hat, und die ohne Zweifel hier derselben Function vorstehen. Ich bin meh-

reremale geneigt gewesen zu glauben, dass die beiden Säcke, die sich an einer Seite befinden, noch von einer besondern Membran umschlossen wären, indess gelang es mir nicht über diesen Punkt zur völligen Klarheit zu gelangen. Nach *Eschscholtz's* Darstellung entspringen an der vordern wie an der hintern Fläche, zwischen diesen Säcken der Fangfäden, die er bei seiner Art (*C. Najadis*) beobachtete. Diese Fangfäden oder Angreifsorgane kommen indess wahrscheinlich nicht jeder Art zu. *Lesueur* erwähnt derselben mit keinem Worte, und sie fehlten durchaus in allen Exemplaren der von mir untersuchten Art. Während der Ueberfahrt von den Bonins-Inseln indess nach Kamtschatka, wo ich an einigen ruhigen, stillen Tagen eine reiche Ausbeute an Akalephen machte, versicherten mir unsre Officiere, dass sie Bänder (so wurden die *Cesta* von ihnen genannt) gesehen hätten, mit langen an die Mitte des Körpers gehefteten Schwänzen. Vergebens sah ich mich damals nach ihnen um, während ich an der richtigen Beobachtung meiner Gefährten zweifelte, bis ich in der *Eschscholtzischen* Zeichnung eine Bürgschaft für die Wahrheit derselben fand.

An der Stelle wo sich die erste den Schlund (Fig. 5, 6 *cc*) vom Magen trennende Einschnürung des Darmkanals befindet, sieht man vier Gefässe (ebd. *aaaa*) auftreten, die nach einem kurzen wenig geschlängelten Verlauf demselben wieder näher kommen, und an der zweiten Einschnürungsstelle des Verdauungskanales (*g*) sich in ihn münden. Diese Gefässe sind offenbar Anhänge des Darmkanales und entsprechen vielleicht den sogenannten Gallenfässen in den Insecten. Eine Richtung der sie enthaltenden Flüssigkeit gegen die Mündungsstelle glaube ich mit Gewissheit beobachtet zu haben. Hier (Fig. 5*g*) indess entspringen vier andre Gefässe (Fig. 5 *eeee*) die in schräger Richtung jedersets sich zu den Rippen begeben, längs welchen sie verlaufen. Genau an der Stelle, wohin die Rudimente der flügelartigen Anhänge anreichen, senden sie einen andern Ast (ebd. *ffff*) fast gerade abwärts, der, wenn er die Mitte der Höhe des Thieres erreicht hat, parallel mit dem Rippengefäss durch die ganze Breite des Thieres verläuft, bis zu den äussersten, wo sich alle acht Gefässe wieder zu vereinigen scheinen. An dem schmalen unteren Rande, glaube ich ebenfalls Spuren von zwei Ge-

fässen wahrgenommen zu haben, die am Grunde zweier bandförmigen Leisten, die wir weiter unten noch näher betrachten werden, verlaufen, und die vielleicht als das Blut zum Centraltheile zurückführenden, also als Venen zu betrachten wären. An den beiden Flächen des Thieres von der Mundöffnung aus steigt zu der Stelle wo die Gefässe (*gg*) entspringen ein Kanal, Falte oder Gefäss aufwärts, welches vielleicht als eine Fortsetzung dieser zurückführenden (?) Gefässe zu betrachten ist. Wenigstens scheint es gewiss, dass Eschscholtz den oberen Theil derselben als solche ansieht. —

Die Gattung *Cestum* wurde zuerst von *Lesueur* im *Nouveau bulletin des sciences de la société philomatique* 1813 *p.* 282 aufgestellt. Die von ihm derselben gegebenen Charactere sind dieselben, wie wir sie angezeigt haben. Er täuschte sich indess offenbar hinsichtlich der Mundöffnung; wo er dieselbe angiebt befindet sich nur ein von einer kreisförmigen Zeichnung umgebner Raum, den ich in der Folge mit dem Namen Narbe (*Stigma*) bezeichnen werde, der den Darmkanal vollkommen schliesst und der sich in allen Beroideen genau an derselben Stelle findet. Ich war lange der Meinung, dass dieses die Afteröffnung sey, kam aber von dieser Ansicht zurück, da Injectionen mich deutlich vom Gegentheile überzeugten. Diese durch die Mundöffnung unternommen, die sich dieser Stelle gegenüber befindet, trieb die gefärbte Flüssigkeit durch die ganze Länge des Darmkanals bis an diese genau umschriebne Stelle, ohne daselbst wieder nach aussen hervorzutreten. Man könnte die Beroideen daher als Beispiele einer naturgemässen *Atresia ani* anführen. Im Sinne *Lesueur's* ist diese Gattung von *Lamark*, *Cuvier*, *Oken* (Isis 1817 p. 1506) *Schweigger* und andern aufgenommen worden. Die vollständigsten Beobachtungen legte *Eschscholtz* über dieselbe in seinem Systeme der Akalephen nieder. *Quoy* und *Gaimard* hatten ohne Zweifel Bruchstücke eines Thieres dieser Gattung vor sich *), welches sie als eine besondere Gattung „*Lemniscus*“ aufstellten und als *L. marginatus p.* 582, *de la partie zoologique du voyage de Freycinet* beschrieben und

*) Vergl. hierüber auch *Cuv. règne anim.* 2ᵉ *ed. Tom. III. p.* 283. *Br.*

*Tab.* 86, *f.* 1. abbildeten. Die einzige Art, die ich von dieser Abtheilung der Beroideen, während der Reise des *Seniavins* zu untersuchen das Glück hatte, scheint in einigen wesentlichen Punkten von den beiden bisher bekannten Arten abzuweichen. Wir erblickten sie zum ersten male in der Südsee am 8. May 1827 früh Morgens unter dem 0° 45′ N. Br. und dem 127° 06′ W. Länge von Greenwich. Wir sahen sie in schmalen, mehrere Fuss langen, silbernen Bändern mit orangebraunen und rothen Einfassungen vorbei schwimmen. Es gelang mir nicht, schon jetzt eines derselben habhaft zu werden. Die ruhige Stille wich einem leichten Winde und diese Zierden des Oceans verschwanden von der Oberfläche, um in der Tiefe ruhigere Regionen aufzusuchen. Am 9. und 10. May indess giengen schon mehrere in unsre Netze; allein nur als Bruchstücke, die mir kein vollkommnes Bild geben konnten. Erst am 11. May, als wir uns unter dem 4° 58′ N. Br. und dem 128° 56′ W. Länge befanden, erhielt ich, während mit einem dichten, das Wasser länger bergenden, sackförmigen Netze gefangen und nur auf kleinere Individuen Jagd gemacht wurde, eine ziemliche Anzahl unverletzter Exemplare.

Die Temperatur der See an der Oberfläche schwankte während dieser 4 Tage, zwischen 21°, 0′ und 23°, 5′ Reaumur. Obgleich diese Thiere im offnen Ocean fast einzig sich den Strömungen des Elementes überliessen um ihren Ort zu verändern, so schwammen sie doch mit grosser Geschwindigkeit und den schönsten, lebhaftesten Windungen, in dem vollkommen durchsichtigen Gefässe, in welches sie mit aller Vorsicht gesetzt waren.

Die Beobachtungen, die ich über das äussere Ansehen, wie dem Baue der innern Organe dieses Thieres zu machen im Stande war, sind schon in der Beschreibung der Gattung aufgeführt worden, von der sie den wesentlichen Theil ausmachen. Hier bleibt mir nur noch übrig derjenigen Erwähnung zu thun, die meiner Art, die ich mit dem Namen *Cestum Amphitrites* belegt habe, eigenthümlich zuzukommen scheinen, da zwei so ausgezeichnete Beobachter wie *Lesueur und Eschscholtz* dieselben mit Stillschweigen übergehen.

Von dem *Cesto Veneris* müsste sich der Gürtel der *Amphitrite* durch zwei Blättchen *) unterscheiden, die das *Stigma*, diejenige Stelle, die *Lesueur* für die Mundöffnung annahm, einfassen. Wir werden dieselben bei mehreren andern Thieren dieser Ordnung unter verschiedner Gestalt wieder erkennen. *Eschscholtz* giebt sie in seinem *Cesto Najadis* mit einander verwachsen fast untertassenartig an. Von beiden Arten würde sich die meinige durch zwei bandförmige Kanten unterscheiden, die an beiden Flächen, der obern wie der untern, durch die ganze Ausdehnung des Thieres verlaufen. Sie sind von ungewöhnlicher Dünne und auf ihrem welligten Rande schimmern ebenfalls, obgleich nur schwach die Farben des Regenbogens. Auf der oberen breiteren Fläche fallen sie leichter in die Augen, zwischen den bedeutenden Rudimenten des Mantels, die lebhafter, vermittelst der gewimperten Blättchen mit denen ihre Rippen geschmückt sind, irisiren; indess auch zwischen den zarten Fortsätzen, in die die untere Fläche ausläuft, verfolgt man sie ohne grosse Anstrengung, sobald man ihnen nur einige Aufmerksamkeit schenkt. Interessant werden uns diese von den übrigen Naturforschern nicht beobachteten Theile dadurch, dass wir sie in mehreren Arten der Familie der *Callianiren* unter der Benennung „Saum" wieder finden, wo sie dazu beitragen werden, die Richtigkeit der Prinzipien, auf welche unsere Eintheilung dieser Thiere begründet ist, wahrscheinlicher zu machen.

Der Gedanke *Lesueur's* die weichen, keine Berührung von irdischen Händen duldenden Bänder zu einem Gürtel zu benutzen, den die zarten Fingerspitzen der aus dem Schaume des Meeres entstandnen Göttin schürzen, ist gewiss sehr glücklich, wahrhaft poetisch und der Natur angemessen. Ich hätte daher auch lieber gesehen, dass *Eschscholtz* seine Art als einen Schmuck der *Nereiden* betrachtet hätte. Haben diese opalfarbigen, crystallenen, durch ihre Durchsichtigkeit fast unsichtbaren Thiere aber nicht vielleicht in den aus der wahren einzigen Quelle der Poesie schöpfenden Griechen die Idee erzeugt, die Schönste der Unsterblichen mit demselben noch anmuthsvoller zu machen? Ein mehrere Zoll breites und sehr langes rosenfarbiges

*) Vermuthlich meint der Verfasser damit die von mir in *Fig.* 6 *Tafel I.* mit *cccc* bezeichneten Theile. *Br.*

*Cestum*, das wir im atlantischen Ocean mehrere male antrafen, ohne es erlangen zu können, erschien uns als der Schleier der *Leucothea*.

Sehr interessant war mir in diesem Thiere eine Vermehrung durch einzelne abgetrennte Theile desselben wahr zu nehmen. Nachdem ich nämlich diese Thiere einige Stundenlang in einem aus weissem, krystallhellen Glase verfertigten, grossen Gefässe beobachtet hatte, machte das eine Exemplar ganz sonderbare Bewegungen, indem es sich spiralförmig um sich selbst wand. Dieses wiederholte es während einer langen Zeit, bis es endlich von selbst zerriss. Es trennten sich darauf in Folge dieses Risses einzelne kleine, gallertartige, Stücke, aus welchen das ganze Thier besteht. Andre Theile des Gürtels lösten sich im Meereswasser auf. Ich betrachtete anfangs kaum diese festeren Theile, die vorzüglich aus Stückchen der Rippen bestanden, und die bald zu Boden sanken. Nach Verlauf einiger Stunden indess sah ich kleine, hüpfende Körperchen, die auf dem Boden des Gefässes umher tanzten. Es waren kleine röthliche Puncte (F. 2, 3) mit einem Strahlenkranze umgeben; es schien als wären es kleine Medusen. Von jetzt an schenkte ich ihnen meine ganze Aufmerksamkeit, und sah wie mit jedem Augenblicke sich immer mehrere derselben erhoben, und entdeckte unter dem Mikroskope zu meinem nicht geringen Erstaunen, dass dieses die kleinen abgetrennten Theile des *Cesti* waren, die Leben bekommen hatten. Nicht lange so verlängerten sie sich etwas und schlugen sich sattelförmig mit ihren Extremen gegen einander. Nur wenige Stunden waren nöthig um ihnen die Länge von fast zwei Linien zu ertheilen. Jetzt war schon die Bandform ausgesprochen (F. 4). Die plötzlich stark einbrechende Nacht erlaubte leider nicht meine Untersuchungen weiter fortzusetzen. Noch in derselben Nacht wurden unsre Segel vom Nordwestpassat gefüllt, der bald frischer werdend uns damals für meine Wünsche zu schnell aus tropischen Meeren entfernte.

Künftigen Reisenden, die glücklicher wie ich, mehrere Arten dieser Gattung mit einander vergleichen können, muss ich es überlassen dem *Cesto Amphitrites* eine Diagnose zu ertheilen.

Die *Cesta* leben in den Meeren der heissen und gemässigten Zone, im hohen Meere sowohl wie in der Nähe der Küsten. Sie mangeln gänzlich denen der kalten. In der nördlichen Hemisphäre scheint ihre äusserste Gränze nicht den 45. Breitengrad zu überschreiten.

## Callianira.

An den Grund des von vorn und hinten zusammengedrückten Körpers legt sich schirmförmig der Mantel. Dieser ist aus zwei an Umfang allmählig zunehmenden Lappen gebildet, die an der Stelle ihres Ursprungs, bei der Narbe, mehr oder weniger mit einander verbunden sind. — Auch die Thiere dieser Gruppe sind von sehr weicher Consistenz, indess ist der eigentliche Körper doch fester, compacter, als die Lappen oder Flügel des Mantels. Eine mittlere Substanz drängt sich gewissermassen noch zwischen beide Theile, indem sie weder so fest wie die des Körpers, noch so weich wie der Mantel ist. Sie bildet zwei wulstige Massen, die die Enden des Körpers einfassen, und deren vorzüglichster Zweck zu seyn scheint, den Flügeln des Mantels eine grössere Anheftungsfläche darzubieten.

Diese Wülste, die eine fast retortenartige Gestalt annehmen, kann man nicht vollständig bis gegen die Narbe verfolgen; sie werden daselbst so unbedeutend, dass man sie ganz aus dem Gesichte verliert, und springen am deutlichsten in die Augen, wenn man das Thier von unten betrachtet, d. h. von der Seite wo sich die Mundöffnung findet. Fast an der Stelle, wo diese Wülste an der vordern, wie der hintern Fläche, sich unseren weiteren Untersuchungen entziehen, erkennt man den Ursprung von vier tentakelartigen Fortsätzen oder Armen, die allen Callianiren zuzukommen scheinen.

Die Form des Körpers ist verschiedenen Modificationen unterworfen. Im Allgemeinen kann man sie indess mit der vergleichen die unsre verschiedenen Aepfelsorten, der Länge nach durchschnitten, uns darbieten würden.

Der Körper ist in den Arten dieser Familie an seiner Basis ebenfalls bei weitem dicker als an dem entgegengesetzten Ende, wo sich die Mundöffnung findet. Die

beiden Platten, die den Körper bilden, weichen an dieser letzteren Stelle indess bedeutend von einander, um wenigstens einen Theil des Wulstes zu umfassen.

Obgleich weniger deutlich als in der vorigen Gattung kann man auch hier fast in allen Arten drei Zusammenschnürungen im Darmkanale wahrnehmen, die die drei Abtheilungen desselben Schlund, Magen und Darm vermuthen lassen. Die Schwierigkeit die es hat eine Ansicht dieser Thiere von der Seite zu gewinnen ist die vorzüglichste Ursache, weshalb ich über diesen Theil ihrer Anatomie mehr im Dunkeln geblieben bin als in den übrigen Familien, und weshalb meine Zeichnungen in dieser Hinsicht denen der übrigen Familien sehr an Deutlichkeit nachstehen.

Nur in der Untergattung *Calymma* scheinen in dieser Familie sich Spuren der Eierstöcke zu finden; sie entgingen durchaus in jeder andern Art als in der *Calymma Trevirani* meiner Beobachtung *).

Das Gefässsystem ist nicht in allen Individuen mit gleicher Leichtigkeit zu erkennen. Am deutlichsten tritt es in *Leucothea* und *Calymma* hervor, wo wir dasselbe näher betrachten werden.

Fangfäden kommen nur wenigen Arten dieser Familie zu, ich bemerkte sie nur bei *Leucothea*, und hier weichen sie sehr, wie wir sehen werden, von denen ab, die uns *Cestum* und die eigentlichen Beroen darbieten. Die tentakelartigen Organe erscheinen in den verschiedenen Untergattungen dieser Gruppe mannigfaltig modificirt in Hinsicht auf ihre Gestalt, wie die verhältnissmässige Länge gegen die des Thieres. In *Calymma* sind sie vierkantig. In *Alcinoë* und *Bolina* sind sie häutig und in *Leucothea* endlich sind sie ausgehöhlt.

Interessante Verschiedenheiten bieten ebenfalls die mantelförmigen Anhänge und die irisirenden Rippen dar, die sich zum Theil sehr gut benutzen lassen die Untergattungen zu charakterisiren. Ganz getrennt erscheinen die beiden Hälften in *Leucothea* und in einer Art wenigstens von *Alcikoë;* in *Calymma* dagegen sind beide Lappen mehr oder weniger mit einander verbunden, und in *Bolina* bilden sie schon

---

*) Fehlen dürfen sie aber doch wohl kaum. *Br.*

eine fast vollständige Glocke für den ganzen Körper. In *Calymma* und *Bolina* verlaufen sämmtliche acht Rippen auf dem Mantel, in *Leucothea* dagegen nur vier derselben, während die andern vier an den Körper selbst geheftet sind, in *Alcinoë* sieht man ebenfalls nur vier den Mantel schmücken, die andern vier dagegen zieren den innern Rand der Tentakeln. Unter allen Beroiden erfreuen die Callianiren sich der freiesten Bewegungen; es hängen diese indess nur einzig und allein von dem Mantel ab, den man fast beständig in Thätigkeit erblickt. Durch sein abwechselndes Oeffnen und Schliessen erinnert er lebhaft an die *Systole* und *Diastole* der Scheibe der Medusen. In den Ortsveränderungen scheinen diese Thiere, wie auch die eigentlichen Beroen und Idyen, immer eine spiralförmige Richtung zu beobachten, so dass einigen wiederholten Ruderschlägen mit dem Mantel das Thier sich auch zugleich um seine Axe gedreht hat. Meistens sehen wir hier die Mundöffnung höchst beständig nach unten gerichtet, indess keinesweges binden sich die Thiere an diese Regel, denn alle Arten dieser Gruppe habe ich ohne Ausnahme in Stellungen beobachtet, wo die Narbe der am tiefsten liegende Theil war, der kleinen *Bolina* schien es vollkommen gleichgültig zu seyn, in welcher Lage sie sich befand. Durch die Meere aller Zonen scheinen die Callianiren verbreitet zu seyn, wenigstens fand ich Arten derselben von der Linie, fast bis zum 66sten Grade N. Breite. Die wärmeren Regionen der gemässigten Zone scheinen sie indess vorzugsweise zu bewohnen.

Das Studium dieser Thiere wird sehr erschwert durch die grosse Mannigfaltigkeit, die vermittelst der Bewegungen des Mantels und der Veränderungen der Stellung in dem äussern Ansehen derselben hervorgebracht werden. Gewinnt man eine Seitenansicht des Thieres, so verhindert der Mantel, dass man sich eine klare Vorstellung von dem Baue dieser Wesen mache. Bald sieht man dieselben segelförmig ausgebreitet, bald halb nach vorn geschlagen, dass man glauben möchte eine *Idya* vor sich zu haben. Von vorn oder hinten sind die Erscheinungen noch mannichfaltiger und es wird oft viele Zeit erheischt, bevor man dahin kommt die Ursachen zu erkennen, die dieselben bewirken. Am leichtesten noch erkennt

man die Thiere dieser Familie wenn man sie von unten betrachtet. Die einander gegenüberstehenden Lappen des Mantels fallen alsdann am schnellsten ins Gesicht und der von vorn und hinten zusammengedrückte Körper, an dessen Enden sie angeheftet erscheinen, und der sie von einander entfernt hält, bezeichnen auffallend und charakteristisch sämmtliche Callianiren.

In der Nacht, und unter günstigen Umständen, verbreiten die Callianiren ein sehr lebhaftes, phosphorisches Leuchten, das sich in der Gestalt oft sehr grosser scheibenförmiger Massen manifestirt, deren Färbung nach den verschiedenen Arten verschieden zu seyn scheint.

*Oken* (Lehrb. d. Zool. Th. I. p. 134) und fast gleichzeitig mit ihm *Lamark* haben das Verdienst, diesen Thieren ihre eigne Stelle angewiesen zu haben, und sehr richtig leitete sie ihr Scharfsinn *Bruguières Beroë hexagona* (*Encycl. pl.* 90. *fig.* 5. 6) hierher zu bringen.

*Cuvier* (*règne animal.* 4. *p.* 60) folgt *Lamark* und theilt mit ihm dieselben Ansichten. Unbegreiflich ist es wie *Schweigger* (Handbuch der Naturgeschichte der skelettlosen ungegliederten Thiere, p. 498) zwischen *Callianira* und *Beroë* die Gattung *Diphyes Cuv.* schieben kann. *Eschscholtz* hatte in seinem Berichte aus Kamtschatka, der im 1. Bande des Jahrganges 1825 der Isis abgedruckt ist, diese Familie der Beroiden sehr richtig in ihrem ganzen Umfange aufgefasst, und sie mit einem Namen belegt der nicht besser gewählt sein konnte, indem er das charakterische Merkmal derselben, die Lappen des Mantels dazu benutzt hatte. Er nannte sie *Beroidae lobatae*, und bemerkte, dass die Gattung *Callianira Lam.* dieselben bildete. In seinem Systeme der Akalephen indess hat *Eschscholtz* geglaubt diese Idee aufgeben zu müssen. In diesem neuesten Werke entfernt er die Callianiren mit Fangfäden aus seiner zweiten Familie den Mnemiiden, um sie mit *Cestum* und den eigentlichen Beroen in eine Familie zu vereinigen, die kein anderes Merkmal mit einander gemein haben als die Fangfäden, Organe, die offenbar von sehr geringer Bedeutung sind, da sie so vielen Thieren dieser Ordnung durchaus

mangeln *). Die Callianiriden von *Eschscholtz* enthalten jetzt Arten von drei sehr verschiedenen Gruppen, die in keiner andern natürlichen Verwandtschaft mit einander stehen als dass sie sämmtlich Beroiden sind.

Die *Mnemiidae* von *Eschscholtz* gehören (vielleicht mit Ausnahme von *Eucharis*) sämmtlich zu der Gruppe der Beroiden die wir jetzt betrachten.

Zwei Gattungen unsrer Callianiren sind von *Rang* (in den *Mémoires de la société naturelle. T. IV. p.* 166) monographisch bearbeitet worden. Die eine dieser Gattungen ist *Alcinoë;* wahrscheinlich, ich möchte fast sagen ohne allen Zweifel *Eschscholtzen's Mnemia* und die andre *Ocyroë*, die mit *Eschscholtzen's Calymma* zusammenfällt, eine Benennung, der wir den Vorzug haben geben müssen, weil sie von älterem Dato ist.

Die Arten dieser Familie, die ich zu beobachten Gelegenheit hatte, finden sich in vier Gattungen vertheilt, zu deren näherer Untersuchung ich jetzt übergehe.

## LEUCOTHEA. *n.*

Der Mantel ist deutlich aus zwei Lappen gebildet, die jederseits von der Narbe entspringen. Von den irisirenden Rippen verlaufen vier auf dem Mantel, die andern vier dagegen sind an den Körper selbst geheftet.

Obgleich auf diese Weise sich die ganze vordere und hintere Fläche fast unbedeckt dem Auge darbietet, wenn die grossen Lappen des Mantels dieselben nicht bedecken, so existirt dessen ungeachtet doch eine Andeutung an die Bildung des Mantels in den eigentlichen Beroën, wo derselbe den ganzen Körper des Thieres umhüllt. Betrachtet man nämlich genau die Gegend der Narbe, die Stelle wo die Lappen des Mantels ihrer Ursprung nehmen, so sieht man, dass in der That beide mit einander verbunden sind, die Ränder des Mantels der einen Seite möchte man

*) Diese Behauptung des Verfassers, vom Mangel der Fangfäden, gegen einen so grossen Quallenkenner wie Eschscholtz, der zweimal die Welt besonders der Quallen wegen umsegelte, scheint mir beim jetzigen Zustande unserer Quallenkenntniss noch etwas gewagt, besonders wenn man erwägt, wie leicht zarte Theile, wie Fangfäden, abreissen und so Veranlassung zur Annahme eines Mangels geben können. *Br.*

sagen springen nur um die Narbe weg, um jenseits derselben mit denen der andern Seite wieder zusammenzufliessen. Indess da der Mantel hier wieder etwas an Substanz zunimmt, so bildet er noch zwei, freilich sehr kleine Lappen, die ihrer Richtung und Stellung nach ein Kreuz mit den grösseren darstellen. Die seitlichen Ränder dieser kleineren Art indess, sind mit dem Körper innig verbunden, so dass diese Läppchen gewissermassen zwei Bögen, oder richtiger häutige Brücken bilden. Man mögte sagen, die Oberhaut des Körpers sei in dieser Gegend blasenförmig aufgetrieben und die so gebildete Blase an ihren beiden Enden geöffnet, so dass sie das Ansehen eines weiten, aber kurzen Kanals bekömmt. In der *Leucothea formosa* ahmt dieser vordere und hintere blasenförmige Lappen fast die Gestalt einer umgedrehten Leyer nach. Ich habe mich länger bei der Beschreibung dieser Anhänge des Mantels verweilt, indem ich überzeugt bin, dass sie nicht ohne Bedeutung für andre Arten der Callianiriden seyn werden.

*Brugières* war *Modeer's Beroë hexagona* noch sehr unvollkommen bekannt, dasselbe gilt von der von *Péron* und *Lesueur* in dem 15. Bande der *Annales du Musée* abgebildeten Art, und es leidet keinen Zweifel, dass es noch mehrere unbekannte Arten dieser Gruppe der Beroiden giebt. Vielleicht erreichen diese kleineren Lappen in einigen derselben eine grössere Ausbildung, und in diesem Falle könnten sie das schon schwierige Studium der Callianiriden noch schwieriger machen.

Die Form des Körpers ist, wenn man sie mit der eines Blattes vergleichen wollte, nierenförmig ausgerandet und von etwas festerer Substanz wie die Flügel. Der Darmkanal hat nur eine eingeschnürte Stelle, und das Thier von seinen beiden breiten Flächen betrachtet lässt ihn in seiner ganzen Länge fast in gleicher Breite erblicken. Die Mundöffnung führt zu einem trichterförmigen, ziemlich weiten Schlunde. Von jenen Gefässen die wir im *Cesto* mit den Gallengefässen der Insecten verglichen haben zeigte sich mir hier nichts. Wie aber im *Cesto* der Schlund und Magen sich in einem glockenförmigen Raume eingeschlossen findet, so sehen wir denselben (*p*) auch hier nicht fehlen, aber auch der dem eigentlichen Darm entsprechende Theil ist hier noch von einer cy- oder richtiger lanzettförmigen Masse

umgeben, die von vielen Gefässen durchzogen ist, die förmlich aus dem Darm zu entspringen scheinen. Ich habe schon in den allgemeinen Betrachtungen zu dieser Gruppe der Callianiren erwähnt, dass der Körper jederseits fast eingefasst wird von dem Wulste. Hier namentlich sehen wir denselben sehr ausgebildet, an jeder Fläche ist er aber hier noch an seinem ausgehölten Rande garnirt von einer sehr eleganten, bandförmigen Falte, die die Epidermis des Körpers bildet, die ebenfalls den Wulst und die innere Fläche des Mantels überzieht. Diese Falte, die ich zur grössern Bequemlichkeit mit dem Namen Saum belegt habe, vergleiche ich durchaus mit den beiden bandförmigen Leisten *), die im *Cesto Amphitrites* wenigstens sich zwischen den Rudimenten des Mantels zeigen. Dieser Saum verläuft längst dem Wulste; wo dieser aber aufhört nimmt er fast plötzlich sehr ab und bezeichnet den glockenförmigen Raum, in welchem sich der Schlund befindet, bis zum Darmkanal, und sehr leicht wird man denselben daher in meiner Zeichnung erkennen. Vom Gefässsysteme habe ich in dieser Art folgendes beobachten können. An der Basis des Saumes sieht man ein Gefäss (Taf. 2, 1.) verlaufen, das, wo derselbe sich an den Rand der glockenförmigen Höhle begiebt, diesen verlässt und seine gerade Richtung gegen die Axe des Körpers und zwar gegen den Mund (*p*) nimmt, hier trifft es mit dem der andern Seite zusammen. Aus ihrer Verbindung entsteht ein einfaches Gefäss (*kk*), welches gerade in der Mittellinie des Thiers vom Munde bis zur Narbe (*d*) verläuft. Hier scheint allerdings ein Ringgefäss vorhanden zu seyn in welches es sich mündet, und von welchem unmittelbar die unter den irisirenden Rippen verlaufenden Gefässe entspringen. Die auf dem Mantel verlaufenden schlagen sich bogenförmig gegen sich selbst um und begeben sich längs dem Rande der Lappen wieder gegen die Narbe zu, ohne dass es mir indess möglich war sie bis dahin zu verfolgen. Die mittleren Rippen, die an den Körper geheftet sind, sind nur sehr klein und steigen nicht über die Hälfte der Höhe des Körpers herab. Die sich unter ihnen befindenden Gefässe nehmen ihre Richtung auswärts von ih-

*) Auch hier spielen auf ihrem rosenfarbenen Rande die lieblichen Farben des Regenbogens.
*Mert.*

nen ebenfalls wieder nach oben. Es ist mir nicht unwahrscheinlich, dass diese Gefässe jederseits in die an der Basis des Saumes verlaufenden übergehen. Deutlich erkennt man die Circulation in dem Gefässe *k*, und Kügelchen die sich gegen die Narbe zu begeben. Die Wülste und die ganze innere Fläche des Mantels bieten das engste Gefässnetz dar, das man sich nur vorstellen kann. Vorzüglich deutlich zeigen es die Wülste. Aber auch hier darf man sich nicht einbilden, dass man dasselbe beständig und mit Leichtigkeit sehen kann. Nur auf Augenblicke bei einer sehr vortheilhaften Beleuchtung kann man sich diesen herrlichen Anblick verschaffen. Wie ich dasselbe zum erstenmale beobachtet, glaubte ich die Zeichnung eines äusserst feinen Micrometers zu sehen, nur mit diesem lässt es sich vergleichen, und man begreift daher leicht, dass meine Zeichnung nur eine sehr schwache Vorstellung davon geben kann. Eben sowie man ein Stück Glas, auf welchem ein Micrometer eingeätzt ist, lange in den Händen gehabt haben kann, ohne des Meisterwerkes inne zu werden, welches sich auf demselben befindet, so kann man auch ganze Stunden mit dem Studio der Callianiren beschäftigt gewesen seyn, ohne von diesem künstlichen Gefässnetze eine Ahndung bekommen zu haben, bis plötzlich eine besondre Bewegung des Thieres dasselbe dem Auge enthüllt, um es leider nach einem Augenblicke wieder dem Beobachter zu entziehen. Mehr als irgend eine andre Classe von Thieren erheischen die Akalephen, dass man sie recht eigentlich belauscht, will man zu einigen höhern Resultaten über ihren Bau gelangen. Wie oft habe ich unterbrochen mehrere Stunden lang beym Sonnen- wie reichlichem Kerzenlicht ein einziges Thier dieser Classe mit der gespanntesten Aufmerksamkeit betrachtet, ohne eine Beobachtung gemacht zu haben, die mir Aufklärung über seine Organisation gegeben hätte. Wie manches interessante Thier habe ich nicht eingebüsst, weil ich meine Aufmerksamkeit nicht theilen wollte, und wie wenigen meiner Zeichnungen mögte man es dessen ungeachtet ansehen, dass oft mehrtägige unausgesetzte Anstrengung erfordert wurde, um nur das zu sehen, was zur Entwerfung der Abbildung nöthig war!

Ich bin nämlich durchgängig von dem Grundsatze ausgegangen, dass die Zeichnung eines naturhistorischen Gegenstandes, die von einem Naturforscher angefertigt wird, so beschaffen seyn muss, dass derjenige, der, ohne den Gegenstand *in natura* vor sich zu haben, eine Kenntniss von demselben sich erwerben will, sie nur genau betrachten darf, um denselben leicht und schnell kennen zu lernen. Organe und Theile die im Originale selbst oft nur in Folge der grössten Mühe und Aufmerksamkeit erkannt werden können, die oft nur ein zufälliger günstiger Moment enthüllt, müssen in der Zeichnung hervorgehoben werden, damit sie schnell in die Augen fallen, und sollte auch dieselbe dadurch von ihrer Eleganz, von der Weichheit ihrer Umrisse, ja von ihrer Natürlichkeit etwas einbüssen. Die Zeichnung eines Naturforschers muss den ganzen Schatz seiner mühevollen Beobachtungen entfalten, sonst verfehlt die Zeichnung ihren Zweck, der nur in Belehrung bestehen soll. Nur dadurch unterscheidet sich seine Zeichnung von der des eigentlichen Malers, der meistens nur darauf bedacht ist den höchsten Grad der artistischen Vollkommenheit hervorzubringen. Aber so schön und gefällig auch eine solche Zeichnung auf den ersten Anblick aussehen mag, der Gelehrte der den Gegenstand nicht kennt kann sie stunden- ja tagelang beobachten, wie er das Dargestellte in der Natur betrachten würde, er kommt zu keinem Resultate, da diese sich ihm nicht so gefällig zeigt, seine Anstrengungen endlich durch Entdeckungen zu krönen. Kurz die Zeichnung des Naturforschers soll das Resultat seines Studiums seyn. Der Einwurf den man mir machen könnte, dass hierdurch der Natur doch eigentlich Gewalt angethan würde, fällt weg, sobald man überhaupt nur den Grundsatz vor Augen hat, dass die schwarzen Striche, deren man sich zu Umrissen auf dem weissen Papier bedienen muss, durchaus in der Natur fehlen. Das Bestreben des Künstlers geht dahin, diese Disharmonie, soviel nur immer möglich, aufzuheben. Der zeichnende Naturforscher dagegen freut sich dieser nothwendigen Bedingniss der Zeichnung, da sie es allein ist, durch welche er die für seinen Zweck so unentbehrliche Deutlichkeit hervorbringt. Vorzüglich gilt dieses von dem in Frage stehenden

Thiere. Jeder der nur je sich mit ihrer Beobachtung beschäftigt hat, weiss, dass namentlich hier die Natur mit deutlichen Umrissen sehr geizig gewesen ist.

Ueber die Bedeutung der oben erwähnten Wülste und des die innere Wand des Mantels überziehenden Gefässnetzes kann kein Zweifel bestehen. Auffallend ist es aber allerdings, dass in diesen niedern fast überall vom sauerstoffhaltigem Elemente bespülten Thieren eine so grosse Vorrichtung zur Decarbonisation der Säfte Statt findet. Die Einschnürungsstelle des Darmkanals wird äusserlich auf jeder der beiden Flächen des Körpers bezeichnet durch drei kleine Höckerchen (Taf. II. *cccc*), durch eine kleine Oeffnung die sich in jedem derselben findet tritt ein Fangarm, die beiden seitlichen (*ll*) sind mit secundären Aesten versehen, ganz nach Art derselben Organe in andern Beroiden, der mittlere (*n*) dagegen ist einfach und nur an seinem Ende mit einer Saugöffnung versehen. Dieser letztere ist auch bedeutend dicker als die übrigen; man möchte ihn mit einem eigentlichen Rüssel vergleichen. Sämmtliche Saugfäden, deren also im Ganzen 6 vorhanden sind, können fast gänzlich in das Innere des Thieres zurückgezogen werden, so dass sie beinahe spurlos verschwinden. Allein ausser diesen bedeutenden Angreifsorganen ist die *Leucothea* noch mit andern ausgerüstet. Längs der ganzen Basis, nämlich des Saumes, treten noch eine grosse Menge kleiner, einfacher Sauger hervor. Diese verhalten sich durchaus wie die Arme der längeren Fangfäden. Da wo oben der Saum aufhört und man den Wulst nicht weiter verfolgen kann, bemerkt man noch diese Saugarme, das Gefäss, in welches sie sich durchaus zurückziehen können, schlägt sich über den Ursprung des Wulstes weg, und man sieht es noch auf der convexen Seite des Wulstes fast bis zur Mitte der Höhe des Thieres herabsteigen; und bis hierher ist es allenthalben dicht mit Saugfäden besetzt.

Die tentakelartigen Anhänge des Körpers (Taf. 2. *cccc*) sind an der einen Fläche canalartig ausgehölt, während sie an der andern dem Körper zugewendeten Fläche rund sind. Die ausgehölte Fläche ist mit zwei Rippchen verziert, die mit irisirenden Blättchen besetzt sind. Die Blättchen scheinen mit gewimperten Rän-

dern versehen zu seyn, während die acht, die Beroiden bezeichnende Rippen, statt der Wimpern mit einer dünnen vielfach gefaltenen Membran geziert sind.

Die äussere Fläche des Mantels (Taf. 3) ist überall dicht mit kleinen Hervorragungen besetzt, die täuschend die Füsse der Holothurien nachahmen. Auch sie scheinen an ihren Spitzen mit saugnapfartigen Organen versehen zu seyn, und bei der Berührung ist das Thier im Stande sie zum Theil einzuziehen. Man bemerkt sie ebenfalls an einer sehr kleinen Stelle des Körpers zwischen dem Darmcanal und den kürzeren Rippen.

Für Ovarien nehme ich auch hier die beiden Organe (Taf. 2, *ce*) die vorn wie hinten längs den Gefässen *k* verlaufen und an welche sich die seitlichen Fangfäden (*ll*) heften.

Ich verschaffte mir dieses schöne Thier in der Nähe der Azorischen Inseln am 12. Juni 1829 bei einer Temperatur des Meeres von 17 — 18° R.

## Alcinoe *Rang.*

Die beiden den Mantel bildenden Lappen (*bc*) sind entweder vollkommen von einander getrennt oder kaum an ihrem Ursprunge mit einander verbunden. Von den acht irisirenden (*rrrr*, *nnnn*) Rippen verlaufen 4 (*r*) auf dem Mantel, die andern 4 (*n*) längs dem innern Rande der Tentakeln (*t*). Die Form des von vorn und hinten zusammengedrückten Körpers ist vollkommen eiförmig nur durch die seitlichen Wülste die sehr ausgesprochen sind, bekommt er ein mehr oder weniger herzförmiges Ansehen. Der Darmkanal scheint durchaus vollkommen so gebildet zu seyn, wie in der *Leucothea*, mit seiner Höhle stehen indess hier weder Fangarme, noch Eierstöcke in Verbindung. Beide Organe schienen durchaus zu fehlen*). Die Lappen des Mantels (*b. c*) ragen nur wenig (als *c*) über den Körper hinweg. In der von mir beobachteten Art sind beide vollkommen von einander getrennt.

---

*) Ueber das wirkliche Fehlen dieser Theile dürften wohl erst künftige Beobachtungen entscheiden können, da die drei Exemplare, die der Verfasser beobachtete, zur Constatirung wohl nicht hinreichen möchten. *Br.*

Ueber jedem Lappen laufen von der Narbe (*d*) bis fast zu seiner Extremität zwei irisirende Rippen. Die Bewegungen desselben sind bei weitem schwächer als die, deren der Mantel der *Leucothea* fähig ist. Die Tentakeln (*t*) haben etwa die Länge des Mantels, und entspringen unmittelbar von der Narbe. Sie sind durchaus flach, ihre obere, der Narbe nähere Hälfte indess dicker, fleischiger als in der unteren, wo sie vollkommen häutig oder blattförmig werden. Die obere Hälfte ist mit ihrem ganzen äusseren Rande an die innere ausgehölte des Wulstes geheftet, und nur der untere ganz blattförmige Theil des Tentakels ist mit beiden Rändern frei und daher vollkommner Bewegungen nach allen Seiten hin fähig. Längs den innern Rändern des obern Theils des Tentakels verlaufen die übrigen vier irisirenden Rippen (*n*), die wir bei *Leucothea* an den Körper selbst geheftet erblicken. Die übrigen Ränder der Tentakeln sind eingefasst mit einem irisirenden Saume, der selbst da nicht fehlt, wo der Tentakel mit dem Wulste verwachsen ist, dessen Nath er bezeichnet. Ueber die Circulation machte ich in dieser Art keine Bemerkungen.

Ich fing die beschriebene Art in drei Exemplaren am 28. Jan. 1827 unter dem 44° 12′ südl. Breite und 56° 30′ westl. L. von Greenwich, 750 Werst nördlich von den Falkland's Inseln und 630 Werst von der nächsten amerikanischen Küste. Sie zeigte sich daselbst nichts weniger als selten während des ganzen Tages. Anfangs lagen die gefangenen Exemplare in dem mit Seewasser angefüllten, grossen, vollkommen durchsichtigen Gefässe bewegungslos auf dem Boden, und liessen mich ohne alle Aufschlüsse über ihre Organisation. Die grosse Durchsichtigkeit der ungemein schwach rosenroth gefärbten Lappen des Mantels und die sehr schwach rosenrothe Tinte des Körpers die vom krystallhellen Seewasser im Gefässe kaum zu unterscheiden war, machte die Untersuchung sehr schwierig. Erst nach einiger Zeit fingen die oscillirenden Bewegungen in den Rippen an die Aufmerksamkeit zu reizen. Wie jetzt nur einige Sonnenstrahlen auf dieselben fielen, spielten diese auf sehr lebhafte Weise in den schönsten Farben der Iris. Bald darauf erhob sich das eine der drei Exemplare aus seinem bewegungslosen Zustande, und den Mantel öffnend und schliessend, bewegte es sich im Glase umher, nicht lange so folgten auch

die andern Exemplare seinem Beispiele. Nichts beschreibt die Mannigfaltigkeit und Lieblichkeit der Farben, die sich jetzt bei jeder Bewegung der Rippen äusserte.

*Rang* stellte zuerst die Gattung *Alcinoë* (*Mémoires de la société d'hist. nat. T. IV. p.* 168) auf. Die Abbildung die er von der von ihm beschriebenen Form (*Alcinoë vermicularis*) liefert, lässt keinen Zweifel hierüber obwalten: indessen irrt er, wenn er behauptet, dass die *A. vermicularis* acht mit Cilien versehene, irisirende Rippen habe. Offenbar täuschten ihn die ebenfalls, obschon schwächer, irisirenden Säume.

*Eschscholtz* führt unter dem Namen *Mnemia* eine Gattung auf, von der allerdings zwei Species (*Mnemia Schweiggeri et Kuhlii*) hierher zu gehören scheinen. Die dritte Art indess, die von *Chamisso* schon früher in den *Nov. act. Acad. Leop. Car. X. p.* 362. *T.* 31. *fig.* 3, als *Callianira tetraptera* beschrieben und abgebildet worden ist, kann, wenn anders das Bruchstück, welches die Zeichnung liefert, richtig dargestellt ist, unmöglich zu dieser Gattung gebracht werden. Es ist sehr zu bedauern, dass dieses letztere Thier nicht gehörig beobachtet werden konnte. Es ist durchaus unmöglich aus der Beschreibung über seine Organisation zu urtheilen. Dass es zur Abtheilung der Callianiren gehöre, geht aus der Abbildung hervor; allein ob es einer der von mir beobachteten Untergattungen beigezählt werden könne, wage ich nicht zu entscheiden.

Es unterscheidet sich die *Alcinoë rosea* von *Alc. vermicularis* schon auf den ersten Anblick dadurch, dass die Lappen bis an die Narbe von einander getrennt bleiben, während *Rang's* Abbildung sie offenbar am Grunde vereinigt angiebt. Ebenso scheint es, dass *Eschscholtzens* beide Arten die Lappen auf eine analoge Weise gebildet haben. Die durchaus glatte Oberfläche meiner Art, die weder durch wurmartige Strichelchen, wie *A. vermicularis*, noch durch dunkle Körnchen, wie *A. Schweiggeri*, gezeichnet ist, charakterisirt die beschriebene Species. Die *Mnemia Kuhlii Eschsch.*, besitzt in zwei pfriemenförmigen Fortsätzen in der Gegend der Narbe ein Kennzeichen, welches sie mit keiner der andern bisher bekannten Arten verwechseln lässt.

## Calymma *Eschsch.*

Beide Lappen des Mantels sind mit einander vereinigt. Die irisirenden Rippen verlaufen sämmtlich auf dem Mantel, vier derselben in der Mitte, die andern vier längs dem Rande desselben.

In dem von vorn und hinten zusammengedrückten Körper herrscht offenbar die Dimension der Breite vor. Der Darmkanal (Fig. I. *c*) weicht eben nicht wesentlich in seiner Bildung von dem der übrigen Callianiren ab. Er verläuft in einem scharf begränzten Raum von fast geigenförmiger Gestalt (Fig. I. *bb*), der durch einen Mangel an Parenchym in der Masse des Körpers hervorgebracht wird. Nach einer kleinen Anschwellung, die bei der Beobachtung des Thieres von vorn oder hinten im Ernährungskanale sichtbar wird, folgt eine eingeschnürte Stelle, von welcher sich zu beiden Seiten unter einem rechten Winkel ein kaum *s*-förmig gebogener Kanal (*e*) begiebt, der mit einer gelblichen, breiigten Masse gefüllt, durchaus den Organen analog zu seyn scheint, die in den Medusen für Ovarien angesehen wurden, und die wir in der Gattung *Cestum* deutlich wieder erkannt haben. Unmittelbar nach dem Abgang dieser Organe sieht man an jeder Fläche von dem Darmkanale zwei Gefässe gehen, die sich in der Gegend der Narbe (*d*) zu den mittleren irisirenden Rippen (*n*) begeben.

Die Lappen des Mantels (*mr*), die sich erst jenseits der Mitte der Höhe des Körpers als solche (*m*) entwickeln, können denselben nie ganz einhüllen. Der obere Theil des Mantels (*p*) bedeckt den Grund des Körpers mehr dach- als glokkenförmig, über den untern Theil desselben ragen die Lappen (*mr*) weit hinweg. Die Bewegungen derselben sind sehr lebhaft und das Thier benutzt sie offenbar zur Ortsveränderung. Die Anordnung der irisirenden Rippen (*no*) bezeichnet diese Untergattung ganz besonders. Sie verlaufen sämmtlich auf dem Mantel, dessen Lappen sie indess kaum erreichen, die vier mittleren kürzeren (*nnnn*) sind von ihrem Ursprunge von der Narbe (*d*) an, mit gewimperten blattartigen Organen besetzt, die die Ursachen der Regenbogenfarben sind. Die äussern längern (*oooo*)

dagegen sehen wir nur dann erst mit diesen Organen besetzt, wenn die Rippen den Rand des Mantels, längs welchem sie verlaufen, erreicht haben. Die Tentakeln (*t*) entspringen vom Körper ungefähr in der Gegend, wo der Mantel zur Bildung seiner Lappen an Ausdehnung zunimmt. Sie sind verhältnissmässig kurz und vierkantig. Zwei dieser Kanten sind mit sehr kleinen Cilien bedeckt, die lebhaft irisiren, die andern beiden haben statt der Wimpern einen geflügelten Rand, oder Saum, der ebenfalls, obgleich viel schwächer, die Farben des Regenbogens wiedergiebt. An den Spitzen sind diese Organe etwas von den Seiten eingedrückt.

Am 3. December 1826 im Atlantischen Meere unter dem fünften Grade nördlicher Breite und dem neunzehnten Grade westlicher Länge gegen 680 Werst von der Afrikanischen Küste bei sehr ruhigem Wetter, aber electrischer Stimmung in der Luft, die sich am Nachmittage durch Bildung typhonartiger Wolken, und am Abend durch von Zeit zu Zeit erfolgende Lichtemanationen in den dunkeln *Cumulis* offenbarte, die den ganzen westlichen Horizont einnahmen, und von dort in langer und breiter Richtung gegen den Zenith anstiegen, leuchtete das Meer seit einigen Wochen zum erstenmale wieder. Es bestand dasselbe in einer zahllosen Menge kleiner Funken und grosser, runder, tellerförmiger Flächen, die langsam und oftmals mit Veränderung der Intensität des Lichts an dem Schiffe vorüberzogen. Dieses Phänomen, das an das Leuchten der *Medusa capillata* an der norwegischen Küste erinnerte, fesselte lange unsre Aufmerksamkeit. Die Erscheinungen des Tages wurden herbeigerufen um dasselbe zu erklären. Die grosse *Physalia* wollten mehrere heute wahrgenommen haben; Velellen sah ich häufig; allein einerseits, dass die Organisation beider genannten Thiere nicht erlaubte, dass sie freiwillig den Spiegel des Oceans verliessen, und dieses Leuchten sich doch offenbar aus der Tiefe gegen die Oberfläche des Meeres erhob, und andrerseits der Umstand, dass ihr Erscheinen zu selten im Vergleich mit diesen nächtlichen Gesichtern war, widerstritt dieser Annahme. Unter vergeblichen Versuchen eine dieser scheibenförmigen Massen zu fangen, gingen einige Stunden vorüber. Gegen 11 Uhr des Nachts war der Himmel vollkommen heiter, nnd der Mond im schönsten Glanze. Das Leuchten

des Meeres dauerte als wahres Wetterleuchten desselben fort, und schien die Decke zu lüften, die eine ungeheure Menge von Boniten und Thuniten verhüllte, die sich um das Hintertheil unseres Schiffes versammelt hatten.

Am folgenden Abend, den 4. December, traten um sieben Uhr dieselben Erscheinungen wieder auf. Das Leuchten war indess bei weitem intensiver, obgleich ärmer an Funken wie gestern. Langsam bewegten sich die grossen, tellerartigen Massen dicht unter der Oberfläche des durch keine Welle unebengemachten Meeres. In grösseren und kleineren Zwischenräumen stellte sich wahres Wetterleuchten des Meeres ein, selbst die vielen das Schiff umschwimmenden Fische erschienen von einem phosphorischen Glanze umgeben, der genau ihre Umrisse in den mannigfachen Windungen erkennen liess. Runde, kugelförmige Körper mit sehr starkem, grünlichten Lichte vollendeten dieses Feuerwerk des Meeres, welches durch die dunkeln, schwarzen *Cumuli*, die langsam von Westen aus am Horizonte aufstiegen, noch mehr gehoben wurde. Dieselben Betrachtungen, dieselben Versuche dieser leuchtenden Massen Meister zu werden, fanden am folgenden Tage statt, aber glücklicher als am vorigen fingen wir in unsern Netzen einen der oft erwähnten scheibenförmigen Körper. Es war eine grosse, blau opalisirende, gallertartige Masse, die leider durch die ihr widerfahrne rohe Behandlung Nichts als ihre Consistenz und vier gelbe Flecken, die dieselbe bezeichneten, erkennen liess. Bald verfloss sie unter unsern Augen in dem mit Seewasser angefüllten Gefässe, in welches sie zur näheren Untersuchung gesetzt wurde, und liess uns nicht viel klüger als gestern.

Erst am 5. December Abends, wie gerade die Sonne hinter dem Horizonte hinabsinken wollte, fing Lieutenant *Ratmanow* eins dieser Thiere. Er bewilligte es mir gern, und während der untere Theil des Netzes, welches diesen Schatz barg, sich auch im Meere befand, wurde ein Gefäss sorgfältig unter dasselbe gebracht, und so erhielten wir ein vollkommen wohl erhaltenes Exemplar. Unser Zeichner *Postels*, und ich waren gleich, so lange die kurze eintretende Dämmerung es erlaubte, mit der Zeichnung und Beobachtung desselben beschäftigt. Die lebhaften Bewegungen des Thieres, das Erstaunen worin uns seine Schönheit versetzte, die Seltsamkeit

seines Baues, liessen uns nicht weit kommen, und ich musste Kerzenlicht zur Untersuchung zu Hülfe zu nehmen. Das Erste was sich dem sorgfältig beobachtenden Auge darbot war die Medusenartige Bewegung. Das Thier schien eine Glocke vorzustellen, deren *Limbus* sich abwechselnd contrahirte und dilatirte, durchaus so wie die Medusen im baltischen Meere und Kattegat es uns gezeigt hatten. Bald aber fand sich, dass es in der That nur schien, als hätte man eine Glocke vor sich, indem es sich offenbarte, dass das für eine ununterbrochene Fläche Gehaltene sich an zwei Stellen öffnete und schloss. Nun erst wurde es klar, dass das Thier, welches ich vor mir hatte, aus zwei wesentlichen Theilen bestand, aus einem Körper nämlich und dessen Anhängen. Diese letzteren heften sich an die beiden entgegengesetzten Enden des Körpers, und durch ihr beständiges, bogenförmiges Oeffnen und Schliessen ahmten sie die Bewegungen der nordischen Quallen nach.

Da ich am selbigen Abend das Thier gehörig untersucht hatte und ich mir einbildete dasselbe so ziemlich verstanden zu haben, so legte ich es in starken Branntwein. Die Erfahrung hatte mich schon gelehrt, dass von allen Schönheiten, die Thiere dieser Familie am Abende enthüllen am folgenden Morgen oft nicht das Geringste zurückgeblieben war. Die Thiere waren vielmehr ganz vom Meereswasser aufgelöst und dieses hatte durch sie nur eine gewisse Klebrigkeit erhalten. Wie ich indess am 6. December früh Morgens nach meiner *Calymma* sahe um mich über den Bestand derselben zu belehren, finde ich, dass das ganze Thier dennoch zerflossen war und eine flüssige Substanz darstellte auf welcher der leichtere Branntwein schwamm, der, wie es schien, in keine Verbindung mit derselben getreten war. Indess zeigte sich bei näherer Untersuchung, dass ein gelatinös-fibröser Theil zurückgeblieben war. Diesen gewissermassen ein Skelet darstellenden Rückstand habe ich unter Fig. 3 abgebildet. Man wird leicht die Basis eines Theiles der Gebilde erkennen und als einen Beweis der Richtigkeit meiner gegebenen Ansicht betrachten. Was aber die stumpfen zickzackförmig gewundenen Gefässe bedeuten, die man zu beiden Seiten des Darmkanals erblickt, darüber konnte ich mir damals keine Erklärung geben und ich musste mich mit der Hoffnung begnügen,

in andern Orten späterhin darüber Licht zu erhalten. Nachdem ich jedoch in *Cestum Amphitrites* die Gefässe wahrgenommen hatte, die durch die ganze Breite des Thieres verlaufen, so glaubte ich in denselben die nämlichen Gefässe wieder erkennen zu müssen, über die ich sechs Monate früher in dieser *Calymma* vollkommen im Dunkeln geblieben war.

*Eschscholtz* hat diese Gattung zuerst in seinem Berichte aus Kamtschatka an die Isis (1825), aufgestellt, dann später noch einmal in seinem Systeme der Akalephen p. 33. Die Beschreibung, die er indess lieferte, konnte nur sehr unvollkommen ausfallen, da das Exemplar, welches er vor sich hatte sehr beschädigt war. Indess hebt seine Zeichnung und einige Puncte in der Beschreibung der einzigen Art, die er sah, alle Zweifel die man hegen könnte, ob die hier aufgestellte Art identisch mit der seinigen sey. Etwas später als *Eschscholtz*, hat *Rang* dieselbe Gattung unter dem Namen *Ocyroë* (*Mém. de la societé d'hist. nat. T. IV. p.* 169), bei weitem vollständiger bekannt gemacht. Ihm kamen drei Arten derselben zu Gesicht, die bis auf den eigentlichen Körper er sehr gut abbildet und beschreibt. Die *Calymma Trevirani* nennt er *guttata*, ein Name der allerdings sehr bezeichnend ist, den ich aber nicht annehmen durfte, da nicht sowohl *Eschscholtzens* Benennung älter ist, sondern auch der Name *Ocyroë* schon von *Péron* einer Medusen-Gattung ertheilt wurde, über die man bis jetzt nichts weniger als im Reinen ist, ob sie mit einer andern vereinigt werden müsse oder nicht.

Die *Calymma Trevirani* wird bezeichnet durch vier grosse, gelbe Flecken, die die Lappen des Mantels zieren.

Die mittleren Rippen sind offenbar kürzer wie die äusseren. Von der Anheftungs-Stelle des Mantels an die Wülste sieht man deutlich Querstreifen sich in die Substanz der Lappen begeben, die, wie es scheint, nicht ohne Beziehung auf die Bewegungsfähigkeit sind. Beim Oeffnen und Schliessen dieser Flügel nehmlich sieht man deutlich, dass sie sich ausdehnen und verengern. Es schien mir, als könne sich der Rand der Lappen nach innen und aussen umschlagen, weshalb ich in demselben ein Analogon des Schleiers der Medusen zu finden glaubte.

## Bolina *Mert.*

Der Mantel ist aus einem Stücke gebildet und umgiebt den grössten Theil des Körpers, über welchen die Lappen weit hinwegragen. Die acht irisirenden Rippen verlaufen nur auf dem Mantel, von der Narbe gleichförmig gegen den Limbus.

Es bildet diese Gattung ein sehr interessantes Verbindungsglied zwischen den *Callianiren* und den eigentlichen *Beroën*. Während in den Bewegungen des Thieres und den sehr entwickelten Lappen die Organisation der *Callianiren* auf das deutlichste ausgesprochen ist, erkennt man in der Neigung des Mantels den ganzen Körper zu umschliessen, das die *Beroën* am meisten characterisirende Merkmal. Der Körper selbst bietet in seinem Bau nichts von dem der übrigen *Callianiren* Abweichendes dar. In der *Bolina septentrionalis* wenigstens, sind die Wülste ungemein deutlich ausgesprochen. Der Darmkanal ist ganz einfach und scheint durchaus wie in *Alcinoë* gebildet. Die Tentakeln sind häutig und ihr Rand ist bald mit Cilien gewimpert, bald mit einem irisirenden Saume eingefasst. Der Mantel bildet wie schon bemerkt wurde, eine unvollkommne Hülle um den Körper des Thieres, die sich hier mehr schirm-, dort mehr glockenförmig gestaltet. Die Oberfläche desselben kann glatt oder durch Wärzchen uneben erscheinen. Von der Narbe (*d*) entspringen die irisirenden Rippen und gehen von dort anfangs fast gleichweit von einander entfernt, verlaufend gegen die Ränder des Mantels. Die vier Rippen (*eeee*), die sich zu den Lappen des Mantels (*b*) (siehe besonders F. 1.) begeben, übertreffen die zwischen ihnen liegenden (*ee*) um das Doppelte an Länge. Während indess jene kleineren bis zum Rande mit irisirenden Blättchen bedeckt sind, sind die längeren, oft kaum bis über die Hälfte ihrer Länge versehen *).

### 1) *Bolina elegans.* Mert.

Der Mantel umgiebt glockenförmig den grössten Theil des Körpers, die Oberfläche des Mantels wird durch zahlreiche Papillen höckerig, die Tentakeln sind von einem irisirenden Saume eingefasst.

---

*) Die vom Apoll verfolgte Nymphe, die sich in die Fluthen des Meeres stürzte und nicht wieder gesehen wurde, hat mir den Namen für diese Untergattung gegeben. *Mert.*

Die Umrisse des Körpers dieses Thieres, die man durch den durchsichtigen Mantel verfolgen kann, zeigen nur, dass er in seiner Bildung in Nichts Wesentlichem von dem andrer *Callianiren* abweicht. Er ist ebenfalls sehr von vorn und hinten zusammen gedrückt. Durch seine ganze Länge verläuft der Darmkanal, dessen trichterförmig erweiterte äussere Oeffnung durch zwei kleine Fortsätze bezeichnet wird. Uebrigens hat der Körper kaum die Hälfte der Länge der Flügel, und nur ein Drittheil desselben ragt über den Rand des mittleren Theiles hinweg. Der Mantel umgiebt anfangs eng den Körper, kaum aber hat er die untern Grenzen desselben erreicht, so dehnt er sich weit aus um die sehr beträchtlichen Lappen (*b*) zu bilden. Diese letzteren sind es, die vorzüglich bei den Bewegungen thätig sind. Betrachtet man das Thier von der Seite der Narbe und befinden sich die Lappen in der *Systole* (*Fig.* 3), so könnte man diese *Bolina* mit einer *Idya* verwechseln. Die ganze Oberfläche des Mantels wird uneben durch eine Menge kleiner, fleischiger, zugespitzter, papillenartiger Hervorragungen. Gegen den Grund des Mantels indess stehen sie häufiger und dichter an einander gedrängt als gegen die Ränder des Mantels. Die irisirenden Rippen (*c*) laufen anfangs fast parallel mit einander, nur leicht gebogen von der Narbe (*d*) bis gegen ein Drittheil der Höhe des Mantels. Hier endigen sich die kürzeren derselben, indem solche den kürzern mittleren Theil des Mantels erreicht haben. Die andern, längeren Rippen dagegen setzen ihren Lauf über die Lappen des Mantels fort, dessen äusserstes Ende sie beinahe erreichen. Nachdem hier die irisirenden Blättchen, die nach und nach an Grösse abnehmen, ganz verschwunden sind, tritt das unter denselben verlaufende Gefäss als ein brauner Faden deutlicher hervor. Dieses schlägt sich hier gegen sich selbst um und läuft etwas gewunden längs dem innern Rande gegen die Stelle hin, wo eine Einschnürung in dem Mantel die untere Gränze des Körpers bezeichnet, steigt dann bogenförmig wieder abwärts und dann noch einmal wieder nach oben, wo es sich in der Mitte der grössten Ausdehnung des Mantels an der eigentlichen Seite des Thieres mit dem Gefässe der andern Seite desselben Lappens vereinigt. Die Lappen selbst sind an ihrem untersten Rande tief eingeschnitten.

Die vollkommen glatten, durchaus häutigen Tentakeln reichen bis zum untern oder Mund-Rande des Körpers. Sie sind ringsum von einem eleganten, welligten Bande eingefasst, welches wie die Rippen, obwohl schwächer, mit allen Farben des Regenbogens geschmückt ist.

Ich fieng diese schöne, überaus lieblich anzublickende, leicht rosenroth gefärbte Art in der Südsee am 11. Mai 1827.

2) *Bolina septentrionalis.* Mert.

Der Mantel (*b*) umgiebt mehr schirmartig fast den ganzen Körper. Die Oberfläche desselben ist durchaus glatt. Die Ränder der Tentakeln (*t*) reichlich mit irisirenden Cilien besetzt.

Diese kleine Art, von der meine Zeichnung die doppelte Grösse angiebt, war sehr häufig an den Gestaden der Insel Matthaei im Behringischen Meere. Ich fieng sie auf einer Ausfahrt sehr nahe bei dem zackigt zerrissenen Pinnacle, einem kleinen felsigten Eilande von dieser beträchtlichen Insel, am 31. August 1827. Die Mantelbewegungen dieses niedlichen, hellblau gefärbten, fast wasserhellen Thieres sind sehr langsam. Die Ortsveränderung wird durch eine beständige spiralförmige Rotation des Thieres um seine Axe hervorgebracht, die nur dann und wann durch ein Zusammenschlagen der Flügel unterstützt wird. Nach den Stellungen die das Thier annimmt und häufig verändert, ist es durchaus unmöglich das Oben und Unten desselben zu bestimmen, wenn man nicht einmal festgesetzte Puncte zur Bestimmung deshalb zu Hülfe nimmt. Der Körper ist ausgezeichnet durch seine im Verhältniss der Grösse des Thieres sehr beträchtlichen Wülste, die deutlicher als in irgend einer andern Art der Callianiren mit diesem künstlichen, mikrometerartigen Gefässnetze überzogen sind, dessen bei *Leucothea* Erwähnung gethan wurde. Auch hier sieht man wie sich dasselbe ebenfalls über die innere Fläche des Mantels ausbreitet. Die irisirenden Rippen (*e*) des Mantels treten stark hervor, durch das beträchtliche unter denselben verlaufende Gefäss. Der gewimperten Blättchen sind

indess nur sehr wenige, und die längeren Rippen sind nur zum Theil von ihnen bedeckt.

Die Tentakeln (*t*), obschon nicht so dünn wie in der vorigen Art, sind doch durchaus häutig zu nennen. Sie sind sehr wenig ausgehöhlt, und reichlich mit langen Wimpern längs ihren Rändern besetzt.

*Eschscholtz* führt eine Gattung *Axiotima* auf und bildet sie auf der 2. Tafel seines Systems der Akalephen ab. Indess die Abbildung, so wie die Beschreibung, giebt deutlich zu erkennen, dass keine vollständigen Exemplare dem Verfasser derselben zu Gebote standen. Das durchaus Abweichende beider Hälften des Thieres lässt sich nicht mit der Symmetrie im Baue aller übrigen Akalephen dieser Ordnung reimen. Es leidet keinen Zweifel, dass das Thier zu den Callianiren gehört, allein wohin ist durchaus nicht zu entscheiden.

Ueber die Gattung *Eucharis* von *Eschscholtz* bin ich ebenfalls sehr im Dunkeln. In seinem Bericht in der Isis bringt *Eschscholtz* sie unter die gelappten Beroën, in seinem Systeme unter die Mnemien, die sonst sämmtlich zu unsern Callianiren gehören. An diesem letzteren Orte spricht er ihr die Lappen ab, allein die Organe, die wir Tentakeln nennen, und die das zweite hervorstechende Kennzeichen der *Eschscholtzischen Mnemia* ausmachten, schreibt er ihnen zu. Er nennt sie *Appendices circum os.* In seiner Beschreibung wie Abbildung aber stellt er dieselben nicht als solche dar, sondern nur als äussere Anhänge des Mantels, die sich in Nichts als ihrer viereckigen Gestalt von den kleinen pfriemenförmigen Anhängen unterscheiden, die das Hauptkennzeichen seiner *Mnemia Kuhlii* sind.

Die Darstellung von *Beroë multicornis* (*Quoy et Gaimard*, *Voyage de Freycinet Zoologie*, p. 574. T. 74. fig. 1), ist zu unvollkommen, als das man mit Gewissheit sie in irgend eine Gattung der Beroïden unterbringen könnte.

## Beroë.

Der von *den Seiten* zusammengedrückte Körper ist überall vom Mantel umhüllt. Die untern Ränder desselben sind nach innen gegen sich selbst umgeschlagen und

heften sich an die eigentliche Mundöffnung. Obgleich auch diese Thiere von sehr weicher Consistenz sind, so sind sie doch leichter zu handhaben als die der beiden vorhergehenden Gattungen. Der überall geschlossene Mantel schützt den Körper mehr gegen äussere Eindrücke, und da er selbst durch denselben ausgespannt ist, hat auch er an Festigkeit und Elasticität gewonnen.

Das äussere Ansehen der Thiere dieser Gattung ist ebenfalls sehr verschieden. Bald sind sie oval, bald mehr oder weniger kugelförmig, bald ist ihre Oberfläche eben, bald durch Rippen und andre Hervorragungen uneben, und in noch andern Fällen sind sie bestimmt von einer zusammengedrückten Gestalt. Die eigentliche Form des Körpers dagegen lässt sich äusserlich nicht in allen Arten erkennen, aus der Lage der Eingeweide indess überzeugt man sich, dass dieselbe hier nicht wie in den beiden vorigen Gattungen von hinten und vorn, sondern von den Seiten zusammengedrückt ist. Die sich in denselben befindenden Organe erscheinen hier deutlicher und vollkommener ausgebildet als in irgend einer andern Abtheilung der Beroiden.

Uebrigens steht auch hier der Körper nichts weniger als beständig in denselben Verhältnissen zum Mantel, bald ist er mit diesem von gleicher Länge, bald unverhältnissmässig klein im Vergleich zu ihm. — Durch die ganze Länge des Körpers verläuft der Darmkanal. Er beginnt mit einer meist sehr weiten sich allmählich trichterförmig verengenden Mund- oder Schlundöffnung. Von den Winkeln derselben verläuft bis zu seiner einzigen Einschnürung in allen Arten, die ich untersuchte, eine leistenförmige Falte (*m*), (in einer Art der *Beroë glandiformis* erscheint sie doppelt) welche durch den nach innen geschlagenen Mantel gebildet zu seyn scheint. Bei der Seitenansicht des Thieres tritt sie deutlich hervor, betrachtet man dagegen dasselbe gerade von vorn oder hinten, so erkennt man sie nicht, indem dieser Theil des Darmkanals im entgegengesetzten Verhältniss zu dem übrigen ausgedehnt ist, also die Leisten, die die Winkel des Mundes bezeichnen, sich nur dann deutlich zeigen können, wenn sie dem Auge gegenüberstehen. Die Einschnürungsstelle, die der zweiten Contraction im Darme der Gattung *Cestum* ent-

spricht, wird ausser dem Aufhören dieser Leiste noch durch den Ursprung der blutführenden Gefässe und mehrerer anderer Organe bezeichnet, die wir jetzt näher untersuchen wollen. Die Gefässe, die ich in *Cestum* mit den Gallegefässen der Insecten verglichen habe, sind in der Mehrzahl der Arten sehr deutlich. Hier sind sie mit *f* dort mit *a* bezeichnet, bald kann man sie bis zur Mundöffnung verfolgen, wo man sie sogar noch gegen sich selbst umwenden sieht, in andern Fällen dagegen, sind sie sehr kurz (*Beroë octoptera*) und in noch andern fehlen sie wahrscheinlich *) ganz (*Beroë glandiformis*). Wo sie sich indess finden, scheinen ihrer immer vier zu seyn, wegen der geringeren Durchsichtigkeit indess erkennt man dieselben nicht so leicht wie im *Cestum* und man sieht meistens nur die beiden jeder Seite zu gleicher Zeit. In einigen Arten sind sie von offenbar drüsigter Struktur, während in andern sie als blosse Gefässe auftreten. Mehr nach aussen von diesen, die Leber wie es scheint vertretenden Gefässen, steht meistens jederseits ein weiter Sack mit dem Darmkanal an dieser Stelle in Verbindung. In diesen Säcken befinden sich die Organe die in *Cestum* für Ovarien angesehen worden sind. In den gewöhnlicheren Fällen scheinen sie auch hier doppelt zu seyn, in einer Art indess (*Beroë Cucumis*), sind sie offenbar in jedem Sacke einfach und nur gegen die Mundöffnung zu in zwei Hörner gespalten, so dass man sie vielleicht überall richtiger als einfach angäbe, da sie in der That bei ihrem Ursprunge mit einander vereinigt sind, in *Beroë Cucumis* würde diese Vereinigungsstelle nur zu einem Sacke verlängert seyn, in *Beroë glandiformis* aber entgiengen sie meiner Beobachtung ganz und gar. Wo sie sich finden, sind sie mit einer körnigten, breyartigen Masse angefüllt, deren Färbung in den verschiedenen Arten verschieden ist. Von der Vereinigungsstelle der beiden Säcke entspringen die Fangarme, deren hier keine Art mehr als zwei besitzt. Diese sind einer sehr grossen Contraction fähig und können fast ganz in das Innere eines Kanals verborgen werden, der von ihrer Ursprungsstelle bis dorthin, wo sie aus dem Mantel nach aussen treten, verläuft. Mit Ausnahme von *Be-*

*) Wenn es wesentliche, den Gallengefässen der Insecten vergleichbare Organe sind, dürften sie schwerlich fehlen. *Br.*

*roë glandiformis* wo sie sehr kurz und durchaus einfach erschienen, sind sie überall längs einer Seite mit ebenfalls sehr contraktilen Röhrchen besetzt, die an ihrem Ende mit einem Saugapparate versehen sind. Die äusserste Spitze des langen Fangarmes scheint in einigen Arten wenigstens noch überdiess in einem grösseren Saugrüssel auszulaufen. Unglaublich ist es zu welcher Länge und zu welchem Umfang diese Organe sich plötzlich ausdehnen können. *Eschscholtz* scheint der Meinung zu seyn, dass in Folge der Contractionen des Sackes, in dem, wie wir gesehen haben, die Eierstöcke sich befinden, diese Fangfäden sich so sehr erweitern, indem auf diese Weise die in den Säcken enthaltene Flüssigkeit in dieselben getrieben würde*). Allein diese Höhlen nehmen keinesweges in demselben Verhältniss an Umfang zu, wie die grosse Masse dieser Fangfäden erheischen müsste, sollten sie sich mit ihrem Inhalte in dieselben bergen. Man begreift nicht woher die Masse kommt, die man unter seinen Augen aus dem kurzen Kanal hervortreten sieht, der von der Höhle der Eierstöcke bis zu der äussern Wand des Thieres verläuft und in welchen sie sich eben so schnell zurückziehen. Bei Injectionen, die man von der Mundöffnung anstellte, füllten sich diese Höhlen von dem Darm aus vollkommen mit der eingesprützten Flüssigkeit und ein Theil derselben tritt neben den Fangorganen aus dem Kanale nach aussen, nie aber sah ich, dass sich den Fangorganen selbst auch nur die geringste Färbung ertheilt hatte. Die Fäden selbst besitzen mit ihren Röhrchen eine grosse Contractilität und durch die Saugmündung an ihren Spitzen füllen sie sich unmittelbar mit Meerwasser, so wie sie aus der Höhle des Körpers treten. Es schien mir nie, dass die Fäden die Fähigkeit des Nesselns besässen, obschon ich sehr häufig Versuche deshalb angestellt habe. Die Thiere, als kleine Crustaceen, kleine Fische, wurden durch dieselben gefesselt, indem der Saugapparat sich an dieselben legte. In einigen Arten habe ich bis zu mehreren Zollen die kleinen Röhrchen ausdehnen können, wenn ich bemüht war sie von der Glasfläche oder meinen Fingern abzutrennen, an welche sie sich mit unglaublicher Schnelle fest gesogen hatten.

*) *Eschscholtz*, System der Akalephen, pag. 8.

Endlich steht die Höhle des Darms an dieser eingeschnürten Stelle mit dem Ursprunge des Gefässsystemes in Verbindung. Es entsteht dasselbe aus vier Stämmen, (Taf. 8. fig. 4, 5, *c*) die, nachdem sie sich ein wenig der Narbe genähert haben, zwiebelartig anschwellen und dann sich in zwei Aeste (ebd. g, *h*) spalten, die an die irisirenden Rippen gehen und unter denselben verlaufen. Durch eine Menge regelmässig von einander entfernter Queräste anastomosiren sämmtliche untereinander. Genau an der vordern und hintern Fläche, an den Flächen wo sich die Mündungen der Kanäle zeigen, aus welchen die Angreifungsorgane hervortreten, sieht man bei glücklicher Injection ein Längengefäss verlaufen, welches von keiner irisirenden Rippe bedeckt wird, von diesem aus sieht man deutlich Gefässe sich in das Innere des Thieres begeben. An der Narbe treten sämmtliche Gefässe zusammen und höchst wahrscheinlich auch an der Mundöffnung. Hier scheint sich ein Ringgefäss zu befinden, von welchem aus sich auf der innern Fläche des Mantels, parallel mit den unbedeckten Gefässen auf der äussern Fläche, zwei mehr oder weniger gewundene Gefässe begeben, die als das Blut rückführend anzusehen sind. Man verliert sie dort aus dem Gesicht wo die 4 Arterien-Stämme ihren Ursprung nehmen. Auf eine höchst interessante Weise tritt also hier das Gefässsystem aus dem Darmkanal hervor und zeigt die grosse Analogie, die zwischen beiden herrscht. Indess stehen die Arterien nicht in unmittelbarer Verbindung mit dem Darme. Die durch den Mund injicirte Flüssigkeit geht keinesweges unmittelbar in sie über, sondern sie füllt erst die Säcke, in welchem die Eierstöcke liegen und erst von dort dringt sie weiter in die Gefässe. Es scheint mir durchaus gewiss, dass Anastomosen zwischen den beiden Gefässen herrschen, die, wenn man das Thier genau von vorn oder hinten beobachtet, in die Augen fallen und von dem das eine äusserlich verläuft, das andre im Innern an den Darm geheftet gegen die Narbe aufwärts steigt, so dass sich also hier vier Venen und acht Arterien befinden werden.

Wie wir schon gesehen haben ist der Mantel hier nie getheilt; als eine einfache Hülle, als ein Cylinder umgiebt er den Körper des Thieres, und bestimmt das äussere Ansehen desselben, welches wie schon erwähnt wurde mannigfachen Abwei-

chungen unterworfen seyn kann. Der irisirenden Rippen sind immer acht; allein nicht alle sind gleichmässig mit jenen Blättchen bedeckt, durch welche die Fähigkeit das Licht mit den Farben des Regenbogens zu reflektiren hervorgebracht wird. Bald nämlich sind alle von der Narbe an bis zum Mundrande mit denselben besetzt, bald haben nur vier derselben den Vorzug, indem die andern vier anfangs nur als Gefässe von der Narbe zu entspringen scheinen, in andern Fällen sind alle nur von der Narbe bis zur Hälfte des Mantels irisirend. Wo die Oberfläche des Mantels durch mehr oder weniger flügelförmige Leisten uneben gemacht ist, befinden sich die Rippen immer auf der Kante dieser Vorsprünge. Obgleich aber der Mantel sich stets nur als eine einfache Hülle zeigt, so erkennt man doch eine Andeutung an die Bildung desselben bei den *Callianiren* in der äussern Vene und dem Kanale, aus welchem die Fangorgane treten, indem die innern Ränder der Lappen des Mantels genau dieser Vene und Kanale entsprechen. Fast überall ist die Narbe jederseits von einer blattförmigen Zeichnung eingefasst, die in einer *Idya* wenigstens als besondere Organe deutlicher hervortreten.

Die Bewegungen der Thiere dieser Gattung sind auf eine sehr bestimmte Weise spiralförmig, die Mundöffnung des Mantels unterstützt die Ortsveränderung durch Oeffnen und Zusammenziehen ihres Randes, das indess nur sehr langsam vor sich geht. In dieser Hinsicht stehen die Beroën bei weitem den Arten der *Callianiren* nach. Die Mundöffnung bleibt hier häufiger nach oben als in den beiden vorhergehenden Gattungen. Indess ist auch hier ihre Richtung keinesweges gebunden, vielmehr sieht man die Thiere sehr häufig mit derselben nach unten vorwärts gehen.

Auch die Beroën sind durch alle Zonen verbreitet. *Scoresby* bildet unsere *Beroë compressa* aus der Nähe von Spitzbergen ab und *Eschscholtzens Cydippe elliptica* wurde in der Nähe des Aequators gefangen.

Unstreitig leuchten auch die Beroën unter günstigen Umständen, obgleich ich mich keiner besondern Erfahrung desfalls entsinne.

*Eschscholtz* hat geglaubt, für die Arten dieser Gattung einen besondern Namen schaffen zu müssen, und begreift sie daher unter der Benennung *Cydippe*, indem

*Fréminville*, als er das Bedürfniss fühlte, zwei Gattungen der Beroiden aufzustellen, der zuerst von *Brown* als *Beroë* beschriebnen und abgebildeten Art den Namen *Idya* ertheilte. Allein da jetzt schon einmal allgemein, im *Fréminvilleschen* Sinne beide Gattungen angenommen sind und *Oken* schon vor 13 Jahren in seiner trefflichen Naturgeschichte diese Gattungen unter dieser Benennung unterscheidet, so scheint es mir als würde durch eine abermalige Umtauschung die Verwirrung noch grösser gemacht.

Es herrscht übrigens noch die grösste Confusion hinsichtlich der Arten, die diese Gattung bilden. Keine Art der europäischen Gewässer ist genau bekannt, geschweige denn die fremder Meere. Durch die Bewegungen, die verschiedenen Grade der Zusammenziehung oder Ausdehnung einer und derselben Art, wird die Gestalt bald mehr ei-, bald mehr kugelförmig. Die Grösse fast aller Akalephen ist bei gleicher Ausbildung der innern Theile so verschieden, dass es unmöglich wird sie zu Unterscheidungscriterien benutzen zu wollen. Ebenso ist die Färbung derselben den grössten Abweichungen unterworfen, und namentlich sehen wir die der Fangorgane fast abhängig von dem Colorit der Thiere, die die *Beroë* gerade zu ihrer Nahrung ausgesogen hatte. Nur die genaue Untersuchung der inneren Theile, die Art und Weise wie die Rippen mit irisirenden Blättchen versehen sind, und die Beschaffenheit der Oberfläche können zu Merkmalen führen, vermittelst welcher mit Bestimmtheit sich eine Art der Beroën wird erkennen und beschreiben lassen. Wahrscheinlich werden auch die Beroën in verschiedene Untergattungen vertheilt werden müssen, indess fehlt es zur Zeit noch an Kenntniss einer gehörigen Menge von Arten, um dieselben aufstellen zu können *).

### 1) *Beroë Cucumis. n.*

Das ganze Thier stellt äusserlich einen achteckigten Cylinder dar. Eine ebene Fläche wechselt mit einer gewölbten ab. Sämmtliche Rippen sind mit irisirenden Blättchen von der Narbe an bis fast zum Mundende besetzt.

*) Sollten nicht eine Gruppe vielleicht die mit einfachen, astlosen Fangarmen wie *B. glandiformis* die andere die mit ästigen, wie *B. cucumis*, *octoptera* etc. bilden? *Br.*

Dieses vollkommen durchsichtige, sehr wenig hellblau gefärbte Thier, hat eine mehr oder weniger eiförmige oder richtiger gurkenförmige Gestalt *). Seine acht gleich langen, etwas welligt verlaufenden Rippen, sind überall mit irisirenden Blättchen besetzt, die jedoch an Grösse denen aller übrigen von mir untersuchten Beroiden weichen müssen. In keiner Art der Beroiden erkennt man so leicht wie in dieser den in den verschiedenen Theilen des Thiers nach verschiedenen Richtungen hin entwickelten Darmkanal. Betrachet man nämlich den Mund-, Schlund- und Magentheil desselben, so sieht man diesen in seiner grössten Ausdehnung, wenn man das Thier von vorn oder hinten, d. i. von den Seiten betrachtet, an welchen die Fangfäden nach aussen treten; der eigentliche Darmtheil erscheint bei dieser nämlichen Ansicht genau wie wir es in *Cestum* sahen als ein blosser Faden (F. 2). Wünscht man diesen dagegen in seiner platten birnförmigen Gestalt zu untersuchen so muss die *Beroë* so gestellt werden, dass man sie von den Seiten betrachtet. Jetzt zeigen sich die Fangfäden rechts und links vom beschauenden Auge (F. 1) und der aufnehmende Theil des Darms erscheint als ein viereckiges Gefäss.

Die Mundöffnung ist mancher Veränderungen fähig, bald ist sie zugespitzt, bald in die Breite gezogen, und manchmal sogar nach aussen umgestülpt. Fast immer erkennt man gleich hinter derselben eine leichte Zusammenschnürung. Vom Munde beinahe bis zum Abgange des Gefässes verfolgt man an diesem Theile des Darmkanals die Falte, die die Mundwinkel bezeichnet (*a*). Wie auch in den Beroën der früher betrachteten Gattungen liegt derselbe in einer besondern Höhle des Körpers (*u*). In der Nähe der Einschnürungsstelle des Darmkanals verschwindet indess jede Spur der Mundwinkelfalten und dieses Organ erscheint daselbst fast rund. Hinter dieser Einschnürung, die an die in den Hymenopteren und andern Insecten erinnert, dehnt sich der Darmkanal allmälig wieder aus (Fig. 4, *r*), jedoch wie schon be-

*) Auf den ersten Anblick möchte man dieselbe für rund halten, allein man überzeugt sich, dass die Oberfläche eigentlich aus langen Facetten gebildet ist, von denen abwechselnd eine eben, die andre erhaben ist. *Mert.*

merkt wurde stark von den Seiten zusammengedrückt, verengt sich darauf wieder zu einem Kanal und endigt sich blind an der Narbe (*d*).

Die die Eierstöcke (*e*) haltenden Säcke (*k*) sind dicht an den Sack geheftet, in welchem sich der Anfangs-Theil des Darmkanals befindet, und fast von gleicher Länge mit demselben. Sie sind hier indess äusserst dünnwandig, obgleich von bedeutendem Umfange. Die Eierstöcke sind in ihrer untern Hälfte einfach, in der obern jedoch gespalten. Genau in der Spaltungsstelle heften sich an dieselben die Wurzeln (*s*) der Fangarme (*l*), die aus einem Kanal (*m*) nach aussen treten, der anfangs gegen die Narbe mit dem Darm parallel läuft, dann aber unter einem rechten Winkel sich von demselben entfernt. Der Anfang wie das Ende der Fangarme scheint ohne secundäre Nebenäste zu seyn. Die Gallengefässe (*f*) sind sehr dünn und lang und erscheinen als einfache, undurchsichtige Kanäle.

Der *Bulbus* an der Basis der arteriellen Gefässe (*c*) ist sehr bedeutend. Die weitere Beschreibung der Gefässe ist schon in der Beschreibung der Gattung gegeben, indem solche hauptsächlich von der sehr gelungenen, bei dieser Art unternommenen Injection entlehnt ist. Die Stelle an der sie vom Darmkanal entspringen, ist ungefähr am Ende des zweiten Drittheils vom Munde bis zur Narbe.

Es wurde diese Art zuerst beobachtet auf der Ueberfahrt von Sitcha nach Unalaschka vom 25—26. Juli 1827 unter dem 54° 09′—65° nördl. Breite und dem 144° 35′—145° 57′ westl. Länge von Greenwich.

Sie zeigte sich nicht sehr selten, aber immer nur einzeln zwischen zahlreichen Exemplaren der *Aequorea kamtschatica*, vorzüglich des Morgens früh und des Abends in der Dämmerung.

Später sah ich sie wieder am 12. Mai 1828 unter dem 36° 13′ nördl. Breite und dem 211° 3′ westl. Länge.

Es war diese Art die mir über den innern Bau dieser interessanten Abtheilung der Akalephen zuerst klare Aufschlüsse gab, die mich in den Stand setzten über manche Theile mit Bestimmtheit zu sprechen, über die ich bis dahin nur Vermu-

thungen hegen durfte; ebenso lieferte sie den Leitfaden zu den Untersuchungen der Arten, die mir erst später zu Gesichte kamen.

## 2) *Beroë compressa. n.*

Das ganze Thier ist sehr von den Seiten zusammengedrückt, oder vielleicht richtiger nach vorn und hinten ausgezogen, das Ansehen wird dadurch gewissermassen geflügelt, und die so entstandenen vier Flügel sind wieder mehr oder weniger tief eingeschnitten. Die Rippen der kleineren oder Seitenflügel, die zugleich die kürzeren sind, sind in ihrem ganzen Verlauf mit irisirenden Blättchen besetzt, die grösseren und längeren Flügel dagegen, die der vorderen und hinteren Fläche entsprechen, haben Rippen, deren Anfang an der Narbe (Fig. 1, *d*) der irisirenden Blättchen ermangelt.

Diese äusserst schöne *Beroë*, vielleicht die eleganteste ihrer Gattung, ist so sehr von den Seiten zusammengedrückt, dass ihre beiden Durchmesser sich wie 1 : 3 verhalten. Ihre Oberfläche ist nichts weniger als glatt, sondern durch acht flügelförmige Vorsprünge durchaus uneben. Diese Vorsprünge indess sind nicht von gleicher Länge. In zwei derselben, die den Seitentheilen des Thieres nach unserer Ansicht entsprechen, sind sie kürzer, indem sie nur von der Mundöffnung bis zur Narbe unter einem sanften Bogen verlaufen. Die anderen längeren aber, die sich an der vorderen und hinteren Fläche befinden, ragen um ein Bedeutendes über die Narbe (*d*) hinweg, so dass dadurch die Seitenansicht des Thieres bei geschlossener Mundöffnung ein vollkommen herzförmiges Ansehen (Fig. 1) gewinnt. Die das Irisiren hervorbringenden Organe sind hier grösser und vollkommner ausgebildet, als in irgend einer der übrigen Arten, die ich zu untersuchen Gelegenheit hatte, mit der einzigen Ausnahme vielleicht von *Leucothea*, wo sie sehr entwickelt sind. In der Art aber, die wir jetzt betrachten, sind diese Blättchen mit an der Spitze vielfach gespaltenen, flachen Wimpern versehen. Die Rippen, die die kleineren Flügel bezeichnen, sind ihrer ganzen Länge nach von ihnen bedeckt, die der grösseren Flügel aber sind vom Munde an nur bis zu jener Stelle mit ihnen besetzt, die am

weitesten über die Narbe, die hier schon von zwei Blättern eingefasst ist (Fig. 1 und 4, *d*), hinwegragten; von dort an ist der unter einem spitzen Winkel nach innen eingeschlagene Theil des Rippenkanals von ihnen entblösst, und solcher nur an seiner braunen Farbe kenntlich. Diese Rippengefässe bilden hier offenbare Blutleiter (*sinus*). Sie sind weit und ragen mit einer spitzen Kante in die Substanz des Thieres: deutlich beobachtete ich, dass von hier sich baumartig verzweigte Gefässe gegen den Darmkanal erstrecken. Leider gelang mir in dieser Art keine Injection. Ihr Ursprung ist indess, wie mir die Durchsichtigkeit, und das schöne Wetter, welches meine Untersuchung begünstigte, deutlich zeigte, durchaus wie in der vorigen Art, nur dass die Stämme bei ihrem Austritt aus dem Magen weniger deutlich zwiebelförmig angeschwollen sind. Hier zeigt sich dem Beobachter schon auf das deutlichste die Analogie dieser Gefässe mit denen, die man in den Medusen aus den Magenhöhlen gegen den Rand der Scheibe sich begeben sieht. Denke man sich den Körper mehr in die Höhle des Mantels zurückgedrängt, wie in den Idyen, und diesen letzteren schirmförmig ausgebreitet. so hat man das Bild einer vollkommenen Meduse.

Die Mundöffnung ist auch hier in der Regel nach oben gerichtet, und das Ende des Darmkanals zeigt seine grösste Breite in der grössten Fläche des Thieres, die den Seiten desselben entsprechen. Der Anfangstheil des Darmkanals dagegen zeigt bei derselben Ansicht nichts als die Mundwinkelleiste (*m*). Auch er liegt in einer besondern Höhle eingeschlossen (*n*), die allmählig enger werdend, bei der Einschnürungsstelle ganz obliterirt. Die Gallengefässe (*f*) erscheinen hier als ganz drüsigte gewundene Organe, die bis an die Mundspitze reichen, und dort noch nach aussen gegen sich selbst eingeschlagen sind.

Die Säcke (*k*) in denen sich die Ovarien (*e*) befinden, trennen sich vom Darmkanal in der Form eines Kanals, und entfernen sich beträchtlich zu beiden Seiten von der Höhle, die ihn birgt, biegen sich alsdann unter einem rechten Winkel gegen die Mundöffnung (*a*) um, und hier erst sich beträchtlich ausdehnend, treten sie in ihrer eigentlichen Gestalt als Säcke auf. Die Eierstöcke selbst sind allerdings

einfach so lange sie von dem engen Kanale dieser Säcke verlaufen, kaum aber haben sich diese umgebogen, so spalten sich auch die Ovarien (*e*). In keinem der Exemplare indess, die ich untersuchte, waren beide Hörner der Eyerstöcke von gleicher Grösse, sondern das Eine immer um etwas kleiner als das Andre. Genau an ihrer Spaltungsstelle heftet sich auch hier der Fangarm (*l*). Weiter indess gegen die Narbe hin als in den andern Beroën treten hier diese Angreifsorgane nach aussen hervor. Sie verlaufen indess hier nicht bis zu ihrem Austritt in einen geschlossenen Kanal, sondern nur in einer nach aussen offenen Rinne, die sich an den Extremen der grossen Flügel befindet. Sie entspringt in dem Mantel genau der Stelle gegenüber, wo sich die Einschnürung des Darmkanals befindet, und endigt sich allmählig weiter werdend an den äussersten Fortsätzen der grösseren Flügel. Nach innen verengt sie sich und schliesst sich vollkommen, so dass das Ganze eigentlich nur als eine keilförmige Spalte zu betrachten ist. Ihrer ganzen Länge nach sind die Fangarme mit secundären Saugröhren besetzt. In der Nähe unserer Observationszelte, am Strande der stürmischen Bucht des heiligen Kreuzes in der Nähe der Mündung des Anadyrs an der nordöstlichsten Spitze von Asien, überzeugte ich mich, dass diese Fangarme dem Thiere zu gleicher Zeit dazu dienen sich bei stürmischem Wetter in der Tiefe an Steinen zu fesseln, um nicht an die sturmbewegte Oberfläche getrieben zu werden. Es heftet sich mit diesen Organen an den Boden des Meeres, wenn ich mich so ausdrücken darf, wie ein Schiff mit seinen Ankern, namentlich wenn dasselbe wie an gefährlichen Plätzen geschieht auf zwei Ankern reitet. Ich beobachtete während einer ziemlichen Weile, wie mehrere Exemplare dieser *Beroë* es auf diese Weise zu verhüten wussten, dass sie nicht von der wachsenden Fluth gegen den Strand geschleudert wurden.

Ich wiederholte an dieser Art die Beobachtungen, die ich über die Erzeugung neuer Individuen aus Theilen der irisirenden Rippen vorzugsweise in *Cestum* gemacht hatte. Auch hier produciren sie am schnellsten neue Individuen. Hat man einen Theil einer solchen Rippe vom Thiere getrennt, so liegt derselbe anfangs ohne sichtbare Bewegung einige Stunden auf dem Boden des Gefässes, dann aber beginnt

er anfangs langsam, dann sehr lebhaft zu arbeiten. Die beiden Enden begegnen sich und scheinen mit einander zu verwachsen. Man glaubt in diesem Zustande eine *Beroë* mit nur zwei irisirenden Rippen vor sich zu haben, betrachtet man sie aber von der Seite, so überzeugt man sich, dass das Ganze nur einen Ring vorstellt. Am folgenden Tage kann man schon bemerken wie die Wimpern der irisirenden Blättchen gegen die Ränder zunehmen und in der Mitte verschwinden, so dass bald der Ring an seinen beiden Rändern irisirt, also schon 4 irisirende Rippen hat, während seine Fläche glatt erscheint; die Ränder indess nähern sich bald deutlich einander und verwachsen schon am 2ten Tage; zu gleicher Zeit bilden sich auf der neuen Fläche Cilien. Am 3ten Tage verlässt das Thier bereits den Boden des Gefässes und hebt sich durch eigne Kraft bis fast an die Oberfläche des in demselben enthaltenen Wassers, und schwimmt daselbst mit scheinbarer Leichtigkeit umher. Es gelang mir leider nicht diese interessanten Versuche weiter fortzusetzen. Am Tage unsrer Abfahrt aus der Bucht des heiligen Kreuzes wurde durch Versehen das Wasser aus dem Gefässe, in welchem sie sich fanden, ausgegossen, und es bot sich mir keine weitere Gelegenheit dieselben zu erneuern dar.

Bei stillem Wetter zeigte sich diese schöne rosenroth gefärbte *Beroë* im August und September 1828, wie schon bemerkt wurde, in der Bucht des heiligen Kreuzes.

Es ist, wie ich kaum zweifle dieselbe Art, die *Scoresby* an den Küsten Spitzbergen's antraf und in seinem *Account of the arctic regions*, *Vol. II. Tab. XVI. fig.* 4, abbildet.

3) *Beroë octoptera.* n.

Die Gestalt des Thieres ist birnförmig, die Oberfläche aber uneben durch acht gleichgrosse und gleichmässig von einander entfernte flügelförmige Fortsätze, auf deren äusserster Kante die Rippen verlaufen, die nicht völlig von der Narbe bis über die Hälfte mit irisirenden Blättchen versehen sind.

Diese kleine nicht mehr als erbsengrosse, rosenroth gefärbte Art, ist ausgezeichnet durch die acht flügelförmigen Fortsätze, die gleich wie die Speichen eines Ra-

des um dessen Axe gestellt sind, sich von der fast gleichförmig runden Oberfläche des Thieres entfernen. Ihre Richtung ist stets etwas gewunden und da sie nur sehr dünnwandig sind, so sind sie ein beständiges Spiel des sie umgebenden Elementes. Die irisirenden gewimperten Blättchen reichen weder bis an die Narbe noch bis an die Mundöffnung, jedoch rücken sie der ersteren um vieles näher als der letzteren. Der Sack, in dem sich der Anfangstheil des Darmkanals befindet, ist verhältnissmässig sehr weit, aber dafür auch kürzer als in den beiden erstgenannten Arten dieser Gattung. Die Mundwinkelleiste ist sehr deutlich unter dem Mikroskop zu sehen, unter welchem überhaupt man nur zu einer Kenntniss dieses Thieres gelangen kann. Die Lebergefässe sind sehr kurz, sie reichen kaum bis zur Hälfte des Raumes, zwischen der Stelle ihres Ursprungs und der Mundöffnung. Die Gefässe verlassen in einer kleinen Entfernung von ihnen den Darmkanal, und ich konnte kaum eine Anschwellung an ihrem Ursprunge wahrnehmen. Die Verengerung des Darms findet indess hier noch keinesweges statt, obgleich von den Mundwinkelfalten auch keine Spur mehr zu sehen ist. Der Kanal, der sich zu dem Eierstockbehälter ausdehnt, ist hier sehr weit, die Hörner der Ovarien selbst sehr bedeutend, und deutlich mit einem Gefässe versehen, welches vielleicht als Ausführungsgang zu betrachten ist. Auch hier heften sich die Fangarme genau an die Stelle, wo die einfachen Eierstöcke sich in zwei Hörner spalten. Sie sind sehr lang und ihre Saugröhre häufig korkenzieherartig aufgerollt, und können äusserst schnell ausgestreckt werden.

Das Stigma ist auch hier durch ein Federchen gezeichnet.

Die Bewegungen des Thieres sind ziemlich lebhaft und die Veränderungen der Dimensionen der Mundöffnung bedeutend.

Ich beobachtete diese Art zu zwei verschiedenen Perioden unsrer Reise in zwei sehr verschiedenen Meeren. Zuerst am 12. März 1827 fing ich sie in der Nähe der Küste Chili's zwischen der Bucht von Conception und der von Valparaiso. Fast anderthalb Jahre später traf ich sie wieder an in der hohen Breite der Behringsstrasse in der Nähe der Bucht St. Laurentii. Die vollkommene Uebereinstimmung

meiner zu beiden Zeiten entworfenen Zeichnungen *), wie die der Beschreibungen lassen keinen Zweifel bei mir über ihre Identität obwalten. Die Akalephen überhaupt sind keinesweges an so bestimmte Grenzen gebunden wie Péron es anzunehmen schien. In der Betrachtung der Medusen werden wir namentlich auf mehreren Arten treffen, die ich unter den verschiedensten Umständen, in verschiedenen und in den entferntesten Längen wie Breiten von einander antraf. Selbst die Temperatur des Meeres bildet keine Grenzen für den Wohnort einer Art. Der Umstand vielleicht, dass selbst in tropischen Meeren in verschiedenen Tiefen Wärmegrade herrschen, die denen der höheren Breiten an der Oberfläche entsprechen, erklärt die Gleichgültigkeit, die diese Bewohner des Oceans für die Temperatur des Elementes in welchem sie leben, zu haben scheinen.

### 4) *Beroë glandiformis. n.*

Das Thier ist fast gleichförmig rund oder oval, die äussere Oberfläche nur leicht achtmal eingekerbt. Die Rippen sind bis zur Hälfte ihrer Länge mit irisirenden Blättchen besetzt. Der Mantel übertrifft den Körper fast sechs mal an Länge.

Durch diesen letzten Umstand macht diese Art einen deutlichen Uebergang zu den Idyen, wo der Körper noch mehr in den Hintergrund tritt. Sie ist von diesen in der That hauptsächlich nur durch den dickern Mantel unterschieden, indem wie in der Beschreibung der Gattung schon angemerkt wurde, derselbe sich gegen sich selbst nach innen umschlägt und an die Mundöffnung heftet. Der Körper selbst ist wie gesagt ungemein klein, jedoch erkennt man die weite Mundöffnung (*a*) in demselben, obschon ich nie die eigentlichen Grenzen desselben unterscheiden konnte.

---

*) Die beiden mir vorliegenden Zeichnungen kann ich nicht für so übereinstimmend halten als der Verfasser meint und bin daher geneigt an der von ihm angenommenen specifischen Identität zu zweifeln. Fig. 1 und 2 der Tafel 8 gehören der einen, wahrscheinlich der spätern, und Fig. 3 und 4 der andern frühern Periode an. Zwei auf demselben Blatte mit Fig. 3 und 4 befindliche, Fig. 3 und 4 vergrössert darstellende Figuren hat der Verfasser auf Tafel 8 nicht dargestellt und diese eben zeigen sich von Fig. 1 und 2 sehr verschieden, namentlich fehlen die blattartigen Zeichnungen an der Narbe. Die Rippen sind kürzer, die Fangarme weit weniger ästig und von den Flügeln bemerkt man eben nichts. *Br*

Der Mund läuft indess deutlich in vier Zipfel aus. Diese stehen durch Hautfalten mit der innern Wand des Mantels in Verbindung, so dass an den Bewegungen des Mundes das ganze Thier Theil nimmt. Hinter dieser Oeffnung des Speisekanals zieht sich derselbe zusammen, schwillt darauf wieder bauchförmig an, und bewirkt eine zweite Einschnürung. Von dieser gehen nicht nur die Gefässe zu den Rippen ab, sondern auch jene, die wir als blutrückführende Organe in den übrigen Beroën kennen gelernt haben. Sie erscheinen hier indess bei weitem entwickelter. So wie die Rippengefässe sich an der Oeffnung des Mantels gegen sich selbst umschlagen, sieht man sie in der Mitte zwischen beiden Wänden des Mantels als zwei durch eine schmale Membran verbundene Gefässe gegen die Stelle hin begeben, wo die Fangarme nach aussen treten; von hier gehen sie wieder mehr nach innen gegen die Narbe (*d*) hin, verlaufen über den Rand des Mundes, und verbreiten sich an der Stelle, wo die andern Gefässe auf eine ähnliche Weise wie in den übrigen Beroën ihren Ursprung nehmen. Nach dieser zweiten Einschnürung im Darmkanal schwillt derselbe noch einmal an zu einer von den Seiten zusammengedrückten Blase und endigt sich blind an der Narbe (*d*), die durch zwei ganzrandige Blättchen bezeichnet ist. Von hier begiebt sich in dieser *Beroë* der Kanal durch welchen die Angreifsorgane etwa in der Mitte der Höhe des Thieres nach Aussen gelangen. Keine Spur bemerkte ich übrigens hier weder von Ovarien noch Lebergefässen. Der ganze Bau erscheint daher bei weitem einfacher(?). Obgleich ich aber wohl bis an sechs Exemplare dieser Art zu Gesicht bekam, um sie untersuchen zu können, so sah ich doch keines, an dem die Fangarme mit secundären Saugröhrchen besetzt gewesen wären. Sie waren freilich stets von keiner sehr bedeutenden Länge, und einigen Exemplaren fehlten sie ganz und gar. Ich wage es deshalb nicht mich hier mit Bestimmtheit darüber auszusprechen, ob die *Beroë glandiformis* eine Art sey, die sich durch einfache Fangarme von allen bisher bekannten auszeichnen würde.

Die Bewegungen des Thieres sind äusserst schwach und nur in bedeutenden Zwischenräumen sieht man dasselbe seinen Mantel öffnen und wieder schliessen. Die

Spitze desselben wird bei dieser Gelegenheit einwärts gezogen, so dass dadurch äusserlich eine fast trichterförmige Vertiefung entsteht. Zu gleicher Zeit wird dabei die Hälfte des Mantels, die der Narbe entspricht, so gegen dieselbe gezogen, dass die untere Hälfte dadurch wie abgeschnitten wird, und indem diese sich gegen die Mundöffnung zuspitzt, dass das ganze Thier einige Aehnlichkeit mit einer Eichel die in ihrer *Cupula* liegt, bekömmt. Der Name, den ich dieser Art beigelegt habe, verdankt dieser Aehnlichkeit seinen Ursprung.

Das Thier ist übrigens ungemein zart und verlangt die sorgfältigste Behandlung. Seine Farbe ist sehr hell-blau mit bräunlichen Rippenkanälen.

Ich erhielt diese Art in der Behringstrasse sowohl in der Bucht St. Laurentii als in der Durchfahrt die zum Andenken des Schiffes, welches sie entdeckte, Seniavins-Strasse genannt wurde. *Eschscholtz* beschreibt (System der Akalephen, p. 27) under dem Namen *Cydippe dimidiata*, eine Art die er auf der Taf. 2 Fig. 2 abbildet, die mit meiner Art sehr viel Verwandtschaft hat und wahrscheinlich sogar mit ihr zusammenfällt. Sie wurde von *Banks* und *Solonders* zwischen Neuseeland und Neusüdwallis beobachtet und von ihnen *Beroë biloba* genannt. Die secundären Saugnäpfchen an den Fangarmen abgerechnet, finde ich keinen Unterschied mit meiner Art. *Eschscholtz* nahm sie nur auf nach einer Abbildung in *Banks* Bibliothek *).

## I d y a.

Der Körper ist nur im Rudimente vorhanden, der Mantel bildet einen weiten Sack, in dessen tiefstem Grunde sich meistens die Theile auffinden lassen, die die wesentlichen Organe des Körpers bilden.

Man sollte vermuthen, dass in Folge der Dünne und Zartheit des Mantels, die zu dieser Gattung gehörigen Thiere die weichsten und die sorgfältigste Behandlung

*) Für die Identität der *B. glandiformis* mit *Cydippe dimidiata Eschsch.* möchte ich keineswegs stimmen; denn selbst abgesehen davon, dass die erstere in der Behringsstrasse, die letztere in der Südsee angetroffen wurde, so scheinen mir doch auch die zwischen den Mertens'schen Darstellungen und den Eschscholtzischen waltenden Differenzen etwas zu bedeutend. Allerdings aber passen *einige* Punkte der Beschreibung auf beide Arten. *Br.*

erheischenden Arten unter den Beroiden seyn müssten; allein diesem ist nicht so. Bei der Berührung zieht sich der Mantel zu einer ziemlich festen Kugel zusammen, die man sicherer als irgend eine Art einer andern Gattung dieser Ordnung der Akalephen mit den Händen aus einem Gefässe in das andere bringen kann.

Die Fähigkeit sich zusammen zu ziehen, die die Idyen in so grossen Grade besitzen, wirkt sehr auf ihr äusseres Ansehen ein. Bald hat man einen vollkommenen Sack, bald eine ei- bald eine kugelförmige Masse vor sich. Eben so variirt die Gestalt des Sackes, der bald länglich, bald bauchig, bald mit einer nierenförmigen Mündung versehen ist, bald wieder gelappt sich dem Auge darbietet.

Aeusserlich an ihrem Grunde ist stets die Narbe mit den Blättern geziert, die meist wie in den Beroën auf dem Mantel liegen, so dass man nur die Zeichnung des Randes derselben wahrnimmt. In einer Art, meiner *Idya penicillata,* indess muss man sie auf besonderen Fortsätzen suchen, die zugleich ein Analogon der Fangarme wie der Tentakeln zu seyn scheinen, und die bei Beschreibung der Art näher betrachtet werden sollen. Die Gefässe, die unter den acht irisirenden Rippen verlaufen, entspringen durchaus auf eine analoge Weise von dem Darmkanal wie in den andern Gattungen der Beroiden, und wie sich versteht in der unmittelbaren Nähe der Narbe. Selten, vielleicht nie reichen die irisirenden Blättchen bis an das Stigma. An den Saum des Sackes, den der Mantel bildet münden sich die acht Gefässe in ein allgemeines Randgefäss, nachdem sie vorher unter sich viele Anastomosen vermittelst kleiner Aestchen, die dem blossen Auge äusserlich sichtbar sind, eingegangen waren. Aus dem Randgefässe kehrt auf der innern Fläche des Mantels die Saftmasse in zwei grossen ebenfalls durch Anastomosen häufig unter sich verbundenen Gefässen, gegen den Körper zurück. Der Saum des Sackes ist manchmal von einem häutigen Rande eingefasst, den wir in den Medusen unter der Benennung des Schleiers sehr häufig wieder antreffen werden. Ueberhaupt ist die Verwandtschaft dieser Familie mit den Medusen sehr gross, und die *Eschscholtzische* Gattung *Pandora* scheint durch eine Reihe feiner Fäden, die sich an das Ringgefäss des Randes heften, den unmittelbaren Uebergang zu den Medusen zu

*

bilden. In ihren Bewegungen stehen die Idyen den andern Beroiden sehr an Schnelle nach. Ihre Ortsveränderungen gehen ungeachtet der starken Zusammenziehungen des Mantels nur langsam vor sich. Mehr als eine andere Beroide scheinen sie sich den Strömungen des Elementes zu überlassen. Ihre Arten finden sich ebenfalls in den verschiedenartigsten Zonen.

*Fréminville* trennte die Idyen zuerst von den übrigen Beroën im *Nouveau bulletin de la société philomatique* 1809, und *Oken* nahm diese Gattung in seine Naturgeschichte auf. Ob die Gattung *Medea Eschsch.* aber als Untergattung hinlängliche Charaktere besitze, wage ich nicht zu entscheiden. Mir scheint sie in nichts Wesentlichem von Idya verschieden, ihre geringe Grösse kann nicht als Gattungsmerkmal aufgeführt werden und was die übrigen Kennzeichen anbelangt, so wurden dieselben schon als solche in der allgemeinen Uebersicht gewürdigt. Ueberhaupt aber herrscht auch in den Arten dieser Gattung eine solche Verwirrung, dass es unmöglich ist, sich über die Identität derselben mit Bestimmtheit auszusprechen.

### 1) *Idya penicillata. n.*

Die irisirenden Blättchen reichen an vier Rippen fast bis an die Narbe, an den vier andern hören sie früher am Grunde des Sackes auf, dagegen sind diese letzteren fast bis zum Randgefässe mit denselben besetzt, während die ersteren in bedeutender Entfernung von demselben schon ihrer entbehren. Der Grund des Mantels trägt zwei Fortsätze, die mit kleinen fangfädenartigen Organen (*c*) besetzt sind.

Diese beiden Fortsätze, die man gewissermassen mit zwei kleinen Quasten vergleichen könnte, stellen zwei Platten dar, die mit carmoisinrothen federartig getheilten Fäden eingefasst sind. Das Thier kann diese Organe etwas zurückziehen und thut solches bei einer Berührung. Erlauben diese Theile eine Vergleichung mit den Fangarmen anderer Beroiden? *) Es scheint mir dieses nicht ohne Wahr-

*) Die geringe Entwickelung dieser Theile bei der nahe verwandten *Idya Mertensii*, und die Insertion neben der Narbe so wie die offenbare Analogie mit den blattähnlichen Theilen an der Narbe bei *Beroë octoptera*, *glandiformis* etc. scheinen wohl nicht für diese Idee zu sprechen. *Br.*

scheinlichkeit, um so mehr da auch sie mit dem obgleich sehr kurzen Darmkanal in Verbindung stehen. Dazu kommt, dass alle Fäden nur mit secundären Aestchen besetzt sind. Nur wäre hier ihre Zahl jederseits sehr vermehrt, in dem man an jedem Blatte bis zu 18 zählen kann; allein diese vermehrte Anzahl wird vielleicht compensirt durch die geringe Länge derselben, und überdiess wird diese nichts besonderes haben, sobald wir uns des zusammengesetzten Apparates dieser Organe in *Leucothea* erinnern.

Bei der genauen Betrachtung des Mantels aber drängt sich eine Bemerkung auf, die ich hier um so weniger anzuführen unterlassen darf, da sie vielleicht nicht ohne Beziehung auf die Bildung desselben ist. Man bemerkt nämlich, wenn man das Thier von aussen betrachtet (Fig. 1, 2, 4), zwischen den beiden kleineren Rippen, das heisst denjenigen, die fast bis zur Narbe mit irisirenden Blättchen besetzt sind, und die der vordern und hintern Fläche entsprechen, einen schwarzen Streifen (Fig. 6, $x$). Ehe ich zu einer genauen Kenntniss des Thieres gelangt war, glaubte ich bald, dass es der Darmkanal, bald dass es das Ovarium seyn könnte; allein ich überzeugte mich, dass es nur jene Blut zurückführende Gefässe der innern Fläche seyen. Sind dieses die Ueberreste einer früheren Oeffnung? sind sie Näthe, oder zeigen sie nur das Bestreben der Natur auch hier einen Substanz-Mangel anzudeuten, wo in anderen congenerischen Arten eine vollkommene Trennung Statt findet? Interessant ist es gewiss, dass sich dieser äusserlich schwarze Streif mit ebensoviel Deutlichkeit auch in andern Arten zeigt, wie *Eschscholtz's* Abbildungen zum Beispiel darthun. Die schwarzen Punkte in der Zeichnung derselben, die mich anfangs zusammengesetzte Organe in denselben vermuthen liessen, erkannte ich unter dem Mikroskop für kleine Sternchen (Fig. 5, 6, 7), wie man sie häufig auf der Epidermis der Pflanzen wahrnimmt. Sternchen derselben Bildung zeigen sich sehr häufig rund um den äusseren Grund des Mantels. Der Mantel selbst besteht deutlich aus zwei Lamellen, einer inneren und einer äusseren. Zwischen denselben liegt ein zelliges Gewebe, welches die zwischen den Rippen befindliche Zeichnung bestimmt, und in welches offenbar die Blutkügelchen verlaufen. Manchmal können

die Rippen, in Folge der Bewegungen des Thieres, ganz durch die über denselben sich zusammenschlagende äussere Haut versteckt werden. Deutlich giebt sich hier der Bau der irisirenden Blättchen kund. An einer kleinen Lamelle bemerkt man eine halbmondförmig gekrümmte Leiste, von der mehrere platte Fäden herabhängen, die an ihrer Spitze in viele kleine Härchen, die gegen sich selbst umgeschlagen werden können, auslaufen. Die die Narbe einfassenden Blätter liegen in der Mitte des Feldes das die Aestchen bildet. Es wurde schon bemerkt, dass die Form des Thieres grosser Veränderungen fähig sey, meine Tafel giebt vier derselben an, ausser diesen aber legt sich der Sack noch manchmal gegen sich selbst cylinderartig zusammen. Der Körper ist freilich nur im Rudimente vorhanden, jedoch könnte man vielleicht sagen, dass wie in *Cestum* und *Leucothea* er von hinten und vorn, in *Beroë* dagegen von den Seiten zusammengedrückt ist, so sey er hier von oben und hinten comprimirt. Wenigstens ist eine dickere Scheibe im Gewebe nicht nur dieser, sondern auch der zweiten von mir beobachteten *Idya* nicht zu verkennen. In dem Centro derselben erkennt man die Verdauungsorgane im Wesentlichen durchaus so gebildet, wie wir sie in der Gattung *Beroë* angetroffen haben. Ich glaube, dass es wesentlich ist hier zu bemerken, dass meine Zeichnung derselben 10 Wochen früher angefertigt wurde als die der *Beroë cucumiformis* die mir zuerst, wie angeführt worden ist, Aufschlüsse über den Bau dieser Theile, so wie derjenigen die mit der Cirkulation in Verbindung stehen, gab.

Diese sehr schöne und ausgezeichnete Art wurde in der Südsee am 12. Mai in fünf Exemplaren gefangen.

2) *Idya Mertensii* *). Brandt.

Alle acht Rippengefässe sind gleichmässig von der Nähe der Narbe an bis zum Randgefässe mit irisirenden Blättchen besetzt.

---

*) *Mertens* hatte für diese Art die Benennung *Idya macrostoma* angenommen, obgleich er die Identität seiner Form mit der bei *Péron* (*Voy. pl.* 31. *fig.* 1.) als *Beroë macrostoma* dargestellen *Idya* nicht ohne Grund in Zweifel zieht; mir scheint es daher zur Vermeidung künftiger Verwechselung, die der

Beobachtet man das Thier schwimmend im Meere, so bietet es kaum etwas anderes als einen gleichmässig breiten offenen Sack dar, der sich indess bei Berührung namentlich seiner inneren Fläche fast kugelförmig zusammenzieht, die weite Oeffnung wird dabei vollkommen geschlossen. Man begreift leicht wie dieses starke Contractionsvermögen in enger Beziehung mit der nothwendigen Ernährungsweise dieses Thieres steht. Die Verdauungsorgane nehmen im tiefsten Grunde des Sackes einen ungemein kleinen Raum ein, so dass es mir sogar unmöglich wurde eine deutliche Vorstellung von denselben zu erlangen, und ich mich daher genöthigt sah diesen wesentlichen Theil des Thieres in meiner Zeichnung unberücksichtigt zu lassen. Nur durch die vollkommene Zusammenziehung des Thieres, wobei es sich auf ein Volumen reducirt, welches man kaum für möglich hält, beobachtete man dasselbe nur in seinem ausgedehnten Zustande, wird es in Stand gesetzt die in seine Höhle durch Zufall geführten Thierchen zur Nahrung zu benutzen, indem es nur auf diese Weise dieselben mit seiner Mundöffnung in Berührung bringen kann. Ihrer ganzen Länge nach sind die Rippen-Gefässe die hier alle in fast gleichförmiger Entfernung von einander stehen, mit irisirenden Blättchen versehen. Sie anastomosiren mit einander in Folge einer Menge von kleinen Gefässen, die sich baumartig verzweigen und deren Verlauf man leicht mit unbewaffnetem Auge verfolgen kann. Zwischen ihren Verzweigungen beobachtet man eine Menge kleiner, gelber Pünktchen, und ich würde nicht angestanden haben, diese Art für identisch mit *Beroë punctata Esch.* zu erklären, wenn die Beschreibung, die dieser Gelehrte von seiner Art giebt, mit der Abbildung die er liefert, übereinstimmte *).

---

Ausdruck *macrostoma* veranlassen könnte, wenn sich die *Mertens'sche* Form als von der *Péronschen* verschieden erweist, zweckmässig die von *Mertens* beobachtete Art *Idya Mertensii* zu nennen. *Br.*

*) *Beroë punctata* (*Chamisso* in *Nova Acta Acad. Caesareae Leop.-Car. T. X. p.* 361. *Tab.* 31. *fig.* 1, und *Eschscholtz*, der Chamisso's Namen annahm; *Syst. d. Acaleph. p.* 37) ist mit *Idya Mertensii* nicht identisch. Chamisso's Beschreibung und Abbildung geben, ebenso wie *Eschscholtz's* Beschreibung die Rippen nicht bis zum Mund gehend an; wenn aber bei der *Eschscholtz'schen* Abbildung Taf. 3. Fig. 1 die Rippen das Mundende erreichen, so möchte ich es für einen Fehler im Stich erklären, der sich bei der grossen Entfernung *Eschscholtz's* von Berlin, wo seine Tafeln von einem nicht sorgsamen Arbeiter gestochen wurden, recht wohl einschleichen konnte. *Br.*

Der äussern Form des Thieres nach stimmt es ebenfalls durchaus mit der Abbildung überein, die *Lesueur* von der *Beroë macrostoma Péron* entworfen hat; allein erwägt man die Genauigkeit, mit der so manche Zeichnung von *Lesueur* entworfen ist, so kann man die schlangenartig zwischen den Rippen verlaufenden Gefässe nicht in Einklang mit dem verzweigten Bau derselben in unserer Art bringen. Der Rand des Sackes ist in dieser Art deutlich mit einer kleinen Membran eingefasst, die bei den Zusammenziehungen des Thieres dazu dient die Oeffnung noch vollkommener zu schliessen. Sie hat ihr vollkommenes Analogon mit einem Organe, welches wir fast in allen Medusen unter dem Namen des Schleyers anführen werden.

Ich beobachtete diese Art ziemlich häufig am 31. März und 1. und 2. April *).

---

## ERKLÄRUNG DER ABBILDUNGEN.

### Tafel I.

Fig. 1. *Cestum Amphitrites* nach dem Leben gezeichnet und zwar nach einem kleineren Exemplar.

Fig. 2, 3, 4. Verschiedene Entwickelungsstufen der aus einzelnen abgetrennten Theilen, vorzüglich der Blättchen der irisirenden Rippen, sich entwickelnden jungen Thierchen.

Fig. 5. Der Verdauungskanal, woran man die Speiseröhre (*cc*) und den durch Puncte angedeuteten Magen *mm*, den durch eine Abschnürung *g* vom Magen gesonderten Darm *n*, der an der Narbe oder dem Stigma *s* blind endet,

---

*) Da diese Angabe des Verfassers ungenügend ist in Bezug auf den Fundort, so befragte ich seinen Reisegefährten *Postels*, der mir nach seinem Journal berichtete: „Ohne Zweifel wurde diese Art im Jahre 1829 unter dem 35° 50′ südl. Breite und $22\frac{1}{2}°$ östl. Länge gegen 120 Werst von der südafrikanischen Küste gefunden, wo wir sehr viele Quallenformen sahen, denn 1827 waren wir um diese Zeit in Chili, wo wir uns mehr auf dem Lande beschäftigten, und 1828 zwischen den Carolinen, wo wir wenige oder gar keine Thiere dieser Art beobachteten.“ *Br.*

ferner die von *Mertens* entdeckten vier Leberschläuche *aaaa*, die Eierstöcke *dd* und verschiedene (wahrscheinlich sämmtliche arterielle) Gefässe *e* und *f* (s. Seite 490.) bemerkt.

Fig. 6. Die Speiseröhre *cc* mit dem Magen *mm*, den Leberschläuchen *aaaa*, dem (hier sehr ausgedehnten) Darm *n*, der bei *g* vom Magen abgeschnürt ist und *cccc* (wahrscheinlich) die an der Narbe befindlichen Blättchen.

## Tafel 2.

*Leucothea formosa* so dargestellt, dass sie die verschiedenen Organe zeigt. Daran *a* die Mundspalte *c* die Höcker woraus die Fangarme (*ln*) entspringen, wovon die seitlichen mit Anhängen (secundären Aesten) versehenen mit *l*, der mittlere, einfache mit *n* bezeichnet sind; ferner das Stigma *d* die Eierstöcke *e*, das aus der Vereinigung der beiden (*rr*) von der Wulst kommenden Gefässe entstehende zur Narbe laufende Gefäss *k*, der den Magen einschliessende glockenförmige Körpertheil *p* und die tentakelartigen Anhänge *tttt*.

## Tafel 3.

*Leucothea formosa* die der in Fig. 2 dargestellten entgegengesetzte Fläche des Mantels mit den vier seitlichen Fangarmen und tentakelartigen Anhängen zeigend.

## Tafel 4.

*Alcinoe rosea* Fig. 1 mit einander genäherten Fig. 2 mit von einander entfernten und Fig. 3 mit ausgebreiteten Mantelhälften. Fig. 4 Dasselbe Thier von der Mundöffnung aus betrachtet.

An den genannten Figuren bezeichnet *a* den Mund; *b*, *c* den Mantel (namentlich *c* den den Körper überragenden Theil desselben), *d* das Stigma, zwischen welchem und dem Munde *a* der Verdauungskanal liegt, *n* die auf den Tentakeln (*t*) und *r* die auf dem Mantel verlaufenden irisirenden Rippen.

## TAFEL 5.

*Calymma Trevirani.* Fig. 1 mit geöffnetem Mantel. Man sieht daran den Mund *a* den geigenförmigen Raum (*b*), worin der Nahrungskanal *c* und die Eierstöcke *e* liegen, ferner die Narbe *d*, die von ihr ausgehenden längeren äusseren *o* und kürzeren inneren Rippen *n*, den Mantel *p* mit seinen Lappen *mr*, und die Tentakeln *t*.

Fig. 2 dasselbe Thier von der Narbe aus betrachtet mit etwas nach oben gewendetem im Grunde sichtbarem Mundtheil. Die Buchstaben bezeichnen dieselben Theile wie in der vorigen Figur.

Fig. 3 der skelettähnliche Rückstand, welcher am folgendem Tage sich zeigte als das Thier in Brandtwein gelegt worden war.

## TAFEL 6.

*Bolina elegans* in verschiedenen Zuständen der Expansion und Contraction.

Fig. 1 Dieselbe mit ausgebreitetem Mantel,

Fig. 2 in einer ähnlichen Stellung mit vorgestreckten Tentakeln,

Fig. 3 contrahirt von der Narbe aus gesehen und

Fig. 4 mit ausgebreitetem Mantel vom Munde aus betrachtet.

Bei allen Figuren bezeichnet *a* den Mund, *b* den Mantel, *d* die Narbe, *e* die irisirenden Rippen, *t* die Tentakeln.

## TAFEL 7.

*Bolina septentrionalis* in verschiedenen Ansichten.

Fig. 1 Dieselbe von der Narbe aus betraehtet mit ausgebreiteten Mantellappen,

Fig. 2 schief schwimmend mit dem Munde nach oben gesehen, mit etwas genäherten Mantellappen,

Fig. 3, ebenfalls schief schwimmend, aber mit ausgebreiteten Mantellappen und dem Munde nach unten.

Fig. 4 Das Thier von der Narbe, und

Fig. 5 mit ausgebreitetem Mantel vom Munde aus betrachtet.

In allen diesen Darstellungen bezeichnet *a* den Mund, *b* den Mantel, *d* die Narbe, *c* die irisirenden Rippen, *t* die Tentakeln.

## Tafel 8.

*Beroë cucumis* in mehreren Ansichten.

Fig. 1. Dieselbe im ausgedehnten Zustande mit zwei ausgebreiteten von ihrem Ursprunge an sichtbaren Fangfäden.

Fig. 2. Dasselbe Thier nur eine Fläche, worauf ein vollständiger, am Ende abgeschnittener Fangfaden sichtbar ist, dem Beschauer zuwendend.

Fig. 3. Das Thier contrahirt mit den in ihren Kanal, dessen Oeffnung *m* bezeichnet, zurückgezogenen Fangfäden.

Fig. 4. Die inneren Organe des Thiers. Daran *a* die Falte die über den Nahrungskanal läuft, *n* der Raum, in welchem der Nahrungskanal liegt, *f* die Leberschläuche, *k* die Säcke, worin die Eierstöcke liegen, *e* die Eierstöcke, *s* die neben der Mitte der Eierstöcke befindliche Fangfadenbasis. *t* der Fangfaden, *m* der Kanal desselben, *c* der Anfang der arteriellen Gefässe, welche Aeste *g c*, *h* zu den Rippen senden, *r* die Anschwellung des Darmes, *d* die Narbe.

Fig. 5. Dieselben Theile von der Seite, *a* der Mund, *d* die Narbe, *l* der Raum für den Verdauungskanal (*k*), *e* der Eierstock, *s* die Basis des Fangfadens, *c* der Stamm der zu den Rippen führenden Gefässe (*gh*), *t* der Fangfaden, *m* der Kanal desselben.

## Tafel 9.

*Beroë compressa* in mehreren Ansichten.

Fig. 1. Dieselbe mit ausgebreitetem Mantel und ausgebreiteten Fangarmen. *a* Der Mund, *d* die Narbe, *e* der Eierstock, *f* der Leberschlauch, *k* der Sack worin der Eierstock (*e*) liegt, *m* der Mundwinkel, *n* der Raum worin der Darmkanal liegt, *t* der Fangfaden.

*

Fig. 2. Dieselbe mit einander genäherten Mantelhälften, *e* der Eierstock.

Fig. 3. Das Thier von der Mundspalte aus, und

Fig. 5 von der Narbe (*d*) aus gesehen.

## Tafel 10.

Fig. 1—4. *Beroe octoptera Mert.* in mehreren Grössen und Ansichten, alle mit dem Mundende nach oben gerichtet.

## Tafel 11.

Fig. 1 — 5. *Beroë glandiformis* in mehreren Grössen und Ansichten.

In Fig. 2, 4, 5 mit nach oben gerichteter Narbe (*d*) und nach unten gerichtetem Munde (*a*); in Fig. 1 mit nach unten gerichtetem Narbenende (*d*) und nach oben gerichtetem Mundende (*a*).

Fig. 3. Das Thier von der Narbe (*d*) aus gesehen.

## Tafel 12.

*Idya penicillata* in mehreren Zuständen der Ausdehnung.

Fig. 1. Das Thier mässig ausgedehnt, aber zum Theil das Mundende zeigend, *e* Die Narbe mit den quastenförmigen Anhängen.

Fig. 2. Dasselbe in etwas gekrümmter Lage.

Fig. 3. Das Thier in ganz ausgedehntem Zustande.

Fig. 4. Dasselbe mässig ausgedehnt.

Fig. 5, 6. Mikroskopische Details vom Narbenende und den Narbenblättchen.

Fig. 7. Das Gefässnetz von eben der Stelle her.

Fig. 8. Ein Stück, das Gefässnetz darstellend, wie es zwischen zwei Rippen liegt.

### Tafel 13.

*Idya Mertensii Br.* in verschiedenen Expansions- und Contractionszuständen.

Fig. 1. Das Thier sehr ausgedehnt und das Mund- (*a*) und Narbenende (*d*) zeigend.

Fig. 2. Das Thier etwas ausgedehnt das Narbenende (*d*) zeigend.

Fig. 3. Das Thier ganz kugelartig zusammengezogen, das Narbenende zeigend.

Fig. 4. Dasselbe zusammengezogen vom Mundende aus gesehen.

---

Anmerk. Sämmtliche blos mit *D. H. M.* bezeichnete Tafeln wurden von *Mertens* selbst gestochen.

# STELLARUM COMPOSITARUM

### 37 INSIGNIUM MENSURAE MICROMETRICAE

## PER TUBUM MAGNUM FRAUNHOFERIANUM

### IN SPECULA DORPATENSI INSTITUTAE.

AUCTORE

F. G. W. STRUVE.

---

(Conventui exhib. die 29. Decembris 1832.)

Magni videtur esse momenti quantitatum per observationes acceptarum praecisionem certius cognoscere, quam ex sola comparatione singularum mensurarum cum medio ex serie aliqua deducto fieri potest, quippe quod medium si adest causa, quae errores provocet constantes, errori obnoxium sit simili ac singula mensura. Nulla vero occasione magis opus est certis distantiarum et directionum mensuris, quam in orbitis stellarum duplicium cognoscendis, quarum axis major paucorum plerumque minutorum secundorum, interdum ne unius quidem spatium in superficie coeli amplecti videatur. Dubitari vero potest de priorum observationum circa stellas duplices praecisione, imprimis quod ad distantias attinet. Nam in egregio opere clarissimorum virorum Herschelii II et Southii, annis 1824 et 1825 edito, viciniorum stellarum distantias aliquanto veris majores esse exhibitas probabile est. Vide quae dixi in epistola ad Herschelium in actis Societatis regiae astronomicae Londinensis, Vol. II. pag. 443. seq. Magni ideo intererat simultaneas observationes institutas apparatibus indolis valde diversae inter se comparare. Quae fuit

ratio, cur anno 1830 Regiomonti aliquot dies commoratus cum clarissimo Besselio complures eligerem stellas duplices, quas uterque nostrum suis observaret subsidiis. Observationes hae finitae sunt tam Regiomonti, quam Dorpati. Illo loco micrometrum objectivum quod vocatur Heliometri eximii Fraunhoferiani ad mensuras inserviebat, in nostra specula micrometrum filare tubi magni Fraunhoferiani adhibebatur. In schemate observationum nostrarum sequenti, columna prima diem observationis exhibet. Cui si asteriscus est appositus, eo observationem interdiu esse institutam significatur. Columna secunda amplificationem lentis ocularis adhibitae continet, cujus vis plerisque occasionibus seu $=480$ seu $=600$ erat, rarius minor $=320$, interdum vero etiam $=800$, tempore postremo. Fraunhoferus enim ipse amplificationem $=600$ transgredi in tubo nostro noluit. At majores interdum adhiberi posse vires per experientiam sperabam, ideoque lentes duas oculares octocenties et millies amplificantes in instituto optico Monachiensi perficiendas curavi, easque mox acceptas coelo favente in stellis duplicibus proximis eximiae esse virtutis reperi.

Passus singulus cochleae micrometricae $=15'',315$, cujus millesimae partes legi possunt. Utrimque a filo primo filum secundum per hanc cochleam ita moveri potest, ut bis filorum intervallum respondeat stellarum distantiae et per lectionum in scala differentiam pretium accipiatur distantiae inter stellas duplicis. Sed etiam filum primum seorsim moveri potest per cochleam alteram, non vero ad mensuram adaptatam. Ita situ fili primi mutato eandem distantiam in diversis cochleae micrometricae regionibus metiri poteris si simplici non contentus fueris operatione. Quarta schematis nostri columna, cui numerus mensurarum inscriptus est, prodit quot in diversis cochleae partibus, plerumque inter se contiguis, duplex mensura instituta sit. Non vero majori observationum numero major fides semper est tribuenda, quae praecipue ex aëris pendeat conditione, qua minus favente per plures operationes mensura accipitur vix comparanda cum unica mensura, quae coelo optimo facta est. Media itaque sunt sumta distantiarum non respectis hujus columnae numeris, sed ita ut singulis diebus idem tribueretur pondus. In universum quidem

post medium annum 1830 observationes aliquanto majori gaudent praecisione, quippe quae cum Besselianis comparandae non nisi occasionibus secundis instituerentur. In omnibus vero mensuris severa lex fuit, effectum lusus nocui in cochleae motu eo prorsus evitare, ut cochlea micrometrica positivo semper moveretur sensu, id est ita ut index, si filum in stellam ducebatur, semper a minori ad majorem progrederetur scalae numerum. Sed altera etiam usus sum cautela, quae mihi non exigui momenti videtur esse, si maxima in distantiis appetitur certitudo. Mutato fili primi situ, ita ut jam in nova cochleae micrometricae parte mensura fieret, numquam statim filum primum sua cochlea in distantiam duxi a secundo stellarum intervallo ad amussim aequalem. Sed ipsa cochlea micrometrica, sensu negativo paululum reducta, denuo positive movebatur ad distantiam filorum primo loco stellis aequandam. Eo modo id vitium evitatur, quod ex methodo repetitoria ut in instrumentis circularibus ita etiam in micrometris locum haberi potest, oriundum ex metalli flexibilitate et tensionis variabilis effectu.

Utraque adhibita cautela penitissime nobis persuasum est errores constantes in mensuris nostris ex causa mechanica nullos esse posse. Iisdem vero cautelis neglectis distantias semper veris majores ex mensura evadere debere, facile intelligitur. Ex optica causa constantes errores oriri posse, non prorsus negabo; id vero certum est eos in perfectiori instrumento minores fore quam in imperfectiori.

Anguli positioris $= \omega$, quos quinta columna exhibet, ita intelligendi, ut sint $= o$, si comes est ad Boream in eodem declinationis circulo a majori, $= 90^\circ$ si comes ejusdem declinationis in ascensione recta sequitur; quae angulorum designatio a Herschelio II et Besselio jure commendatae et adhibitae sunt. Ex directione fili parallela cum linea stellarum centra jungenti angulus determinatur. Parallelismus hic repetitis vicibus produci potest. Plerumque bis eum observavi, interdum saepius, donec lectiones in circulo diviso satisfacere viderentur praecisioni optatae. Numerus hic observationum non est adscriptus, et idem ideo diversis diebus est pondus pro angulis $= \omega$ supponendum.

*

Columna 6 et 7 differentias distantiarum et angulorum, singulis diebus acceptorum, a mediis exhibent, *dr* et *dw*. Columna 8 pretia offert *rdw*, ex quibus angulorum praevisio eadem mensura judicatur ac distantiarum.

Omnes stellarum 37 mensurae 348 observationes singulorum dierum continent, comparatas ad *dr* et *rdw* cognoscendas cum 47 mediis. Summa omnium $(dr)^2$ est $= 4{,}2129$, omnium $(rdw)^2$ vero $= 2{,}3131$. Hinc pro mensura singuli diei accipitur:

$$\begin{aligned} \text{Error medius in } r &= 0'',1183; \\ \text{— — in } rdw &= 0,\ 0877; \\ \text{error probabilis in } r &= 0,\ 0799; \\ \text{— — in } rdw &= 0,\ 0590. \end{aligned}$$

Ex postremis deducti sunt errores probabiles pro mediis tam distantiis quam angulis, quales in schemate appositi sunt, per formulas $\frac{0'',0799}{\sqrt{n}}$ et Arc. sin. $\frac{0'',0590}{r\cdot\sqrt{n}}$, si $n$ est observationum numerus. Error probabilis in singulo angulo 0″,0590 minor est quam in distantia 0″,0799. Illum ab apparatus perfectione prope non pendere perspicitur, sed unice ex visus praecisione, qua parallelismum judicamus. Circuli enim ad angulos legendos inservientis divisio multo subtilior est quam pro distantiis stellarum duplicium egemus. Error probabilis vero in distantiis tam a visus praecisione quam ex apparatus virtute pendet. Inter utrumque errorem probabilem exiguum discrimen 0″, 0208 probat errores ex causa mechanica prodeuntes esse valde parvos, quorum, si placet, pretium probabile in mensura singuli diei per $\sqrt{(0{,}0799^2 - 0{,}0590^2)} = 0'',0539$ proxime $\frac{1}{20}''$ aestumabimus.

### 60. η Cassiopeiae.

*Major* (4) *flava*, *minor* (7. 8) *purpurea.*

| Epocha. | Ampli-ficatio. | Distantia = r. | Numerus mensur. | Angulus = w. | Differentiae a medio. | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | | | | | dr. | dw. | r·dw. |
| 1831. Octbr. 27 | 320 | 9″,70 | 2 | 86°,0 | — 0″, 08 | — 1°, 60 | — 0″,22 |
| Novbr. 17* | 480 | 9, 83 | 3 | 88, 0 | + 0, 05 | + 0, 40 | + 0, 05 |
| 1832. Mart. 1 | 480 | 9, 84 | 3 | 87, 6 | + 0, 06 | 0, 00 | + 0, 05 |
| — 10* | 480 | 9, 80 | 4 | 88, 6 | + 0, 02 | + 1, 00 | + 0, 14 |
| — 13* | 480 | 9, 73 | 2 | 87, 8 | — 0, 05 | + 0, 02 | + 0, 03 |
| Medium pro 1832, 05 | | 9″, 780 | | 87°, 60 | | | |
| Error probabilis | | 0″, 036 | | 0°, 15 | | | |

### 100. ζ Piscium.

*Major* (4. 5), *minor* (5. 6); *albae. Suspicor minoris lumen esse variabile.*

| Epocha. | Ampli-ficatio. | Distantia = r. | Numerus mensur. | Angulus = w. | Differentiae a medio. | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | | | | | dr. | dw. | r·dw. |
| 1832. Octbr. 15 | 320 | 23″,59 | 3 | 63°,50 | + 0″,14 | — 0°, 23 | — 0″,09 |
| — 20 | 320 | 23, 42 | 3 | 63, 55 | — 0, 03 | — 0, 18 | — 0, 07 |
| — 26 | 480 | 23, 29 | 3 | 63, 65 | — 0, 16 | — 0, 08 | — 0, 03 |
| Novbr. 10 | 320 | 23, 48 | 3 | 64, 20 | + 0, 03 | + 0, 47 | + 0, 19 |
| — 18 | 320 | 23, 47 | 3 | 63, 75 | + 0, 02 | + 0, 02 | + 0, 01 |
| Medium pro 1832, 83 | | 23″, 450 | | 63°, 73 | | | |
| Error probabilis | | 0″, 036 | | 0°, 06 | | | |

### 180. γ Arietis.

*Utraque* (4); *egregie albae. Borealis paulo minor.*

| Epocha. | Ampli-ficatio. | Distantia = r. | Numerus mensur. | Angulus = r. | Differentiae a medio. | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | | | | | dr. | dw. | r·dw. |
| 1828. Febr. 13* | 480 | 8″,59 | 1 | 359°, 2 | — 0″, 04 | — 0°, 78 | — 0″, 12 |
| 1829. Mart. 6* | 320 | 8, 56 | 3 | 360, 5 | — 0, 07 | + 0, 52 | + 0, 08 |
| 1831. — 8* | 320 | 8, 54 | 3 | 360, 3 | — 0, 09 | + 0, 32 | + 0, 05 |
| — 17* | 320 | 8, 59 | 3 | 360, 8 | — 0, 04 | + 0, 82 | + 0, 12 |
| Decbr. 5 | 480 | 8, 98 | 4 | 359,95 | + 0, 35 | — 0, 03 | 0, 00 |
| 1832. Febr. 17* | 600 | 8, 63 | 2 | 359, 5 | 0, 00 | — 0, 48 | — 0, 07 |
| — 19* | 320 | 8, 53 | 7 | 359, 6 | — 0, 10 | — 0, 38 | — 0, 06 |
| Medium pro 1830, 84 | | 8″, 631 | | 359°, 98 | | | |
| Error probabilis | | 0″, 030 | | 0°, 15 | | | |

## 202. α Piscium.

*Major* (3) *albasubviridis*, *minor* (4) *subpurpurea.*

| Epocha. | Amplificatio. | Distantia = r. | Numerus mensur. | Angulus = w. | Differentiae a medio. dr. | dw. | r·dw. |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 1825. Octbr. 23 | 600 | 3″,57 | 2 | 336°, 8 | — 0″, 07 | + 1°, 08 | + 0″, 07 |
| 1832. Febr. 12* | 480 | 3, 78 | 2 | 334, 7 | + 0, 14 | — 1, 02 | — 0, 06 |
| — 17* | 600 | 3, 52 | 4 | 336, 2 | — 0, 12 | + 0, 48 | + 0, 03 |
| Octbr. 15 | 600 | 3, 54 | 2 | 335, 2 | — 0, 10 | — 0, 52 | — 0, 03 |
| Decbr. 13 | 480 | 3, 77 | 4 | 335, 7 | + 0, 13 | — 0, 02 | 0, 00 |

Medium pro 1831, 16 3″,636 335°,72
Error probabilis 0″,036 0°,41

## 205. γ Andromedae.

*Major* (3) *aurea*, *minor* (5) *caerulea. Colores egregii.*

| Epocha. | Amplificatio. | Distantia = r. | Numerus mensur. | Angulus = w. | Differentiae a medio. dr. | dw. | r·dw. |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 1827. Mart. 18* | 480 | 10″,39 | 1 | 61°,9 | + 0″, 06 | — 0°, 54 | — 0″, 10 |
| 1829. Febr. 28* | 480 | 10, 38 | 3 | 63, 2 | + 0, 05 | + 0, 76 | + 0, 14 |
| 1830. Mart. 9* | 480 | 10, 22 | 2 | 62, 2 | — 0, 11 | — 0, 22 | — 0, 04 |
| 1831. — 13* | 320 | 10, 43 | 3 | 62, 0 | + 0, 10 | — 0, 44 | — 0, 08 |
| — 17* | 320 | 10, 19 | 5 | 62, 6 | — 0, 14 | + 0, 16 | + 0, 03 |
| — 22* | 480 | 10, 38 | 3 | 62, 75 | + 0, 05 | + 0, 31 | + 0, 06 |

Medium pro 1830, 03 10″,332 62°,44
Error probabilis 0″,033 0°,13

## 227. ι Trianguli.

*Major* (5) *flava*, *minor* (6. 7) *caerulea.*

| Epocha. | Amplificatio. | Distantia = r. | Numerus mensur. | Angulus = w. | Differentiae a medio. dr. | dw. | r·dw. |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 1829. Mart. 6* | 320 | 3″, 46 | 2 | 81°,7 | — 0″, 14 | + 3°, 84 | + 0″, 24 |
| 1830. — 9* | 480 | 3, 42 | 2 | 78, 2 | — 0, 18 | + 0, 34 | + 0, 02 |
| 1831. Febr. 28 | 480 | 3, 74 | 2 | 77, 2 | + 0, 14 | — 0, 16 | — 0, 01 |
| 1832. — 27* | 480 | 3, 69 | 2 | 76, 8 | + 0, 10 | — 1, 06 | — 0, 07 |
| — Mart. 13* | 480 | 3, 68 | 2 | 74, 9 | + 0, 08 | — 2, 96 | — 0, 18 |

Medium pro 1830, 98 3″,598 77°,86
Error probabilis 0″, 036 0°,42

Diminutio anguli respondet observationi Herscheli I, qui pro anno 1781, 8 invenerat $w = 85°,62$; at jam aliquanto celerior videtur esse.

### 550. 1 Camelopardali.

*Major* (5) *albasubflava*, *minor* (5. 6) *alba subcaerulea.*

| Epocha. | Amplificatio. | Distantia = *r*. | Numerus mensur. | Angulus = *w*. | Differentiae a medio. *dr*. | *dw*. | *r·dw*. |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 1828. April. 7* | 320 | 10″, 09 | 1 | 306°, 7 | — 0″, 04 | — 0°, 37 | — 0″, 06 |
| — 17* | 480 | 10, 36 | 1 | 307, 3 | + 0, 23 | + 0, 23 | + 0, 04 |
| 1831. — 2* | 320 | 10, 29 | 1 | 307, 3 | + 0, 16 | + 0, 23 | + 0, 04 |
| — 19* | 320 | 9, 84 | 1 | 307, 6 | — 0, 29 | + 0, 53 | + 0, 09 |
| — 20* | 320 | 9, 99 | 3 | 306, 9 | — 0, 14 | — 0, 17 | — 0, 03 |
| — 21* | 320 | 10, 11 | 3 | 307,. 4 | — 0, 02 | + 0, 33 | + 0, 06 |
| 1832. — 17* | 480 | 10, 25 | 3 | 306, 3 | + 0, 12 | — 0, 77 | — 0, 14 |
| Medium pro 1830, 57 | | 10″, 133 | | 307°, 07 | | | |
| Error probabilis | | 0″, 030 | | 0°, 13 | | | |

### 716. 118 Tauri.

*Major* (6) *alba*, *minor* (7) *alba subcaerulea.*

| Epocha. | Amplificatio. | Distantia = *r*. | Numerus mensur. | Angulus = *w*. | Differentiae a medio. *dr*. | *dw*. | *r·dw*. |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 1827. Febr. 28 | 480 | 4″, 88 | 1 | 195°, 95 | — 0″, 01 | — 0°, 82 | — 0″, 07 |
| Mart. 9 | 320 | 5, 22 | 1 | 197, 6 | + 0, 33 | + 0, 83 | + 0, 07 |
| 1831. — 28* | 480 | 4, 94 | 1 | 196, 6 | + 0, 05 | — 0, 17 | — 0, 01 |
| April 2* | 320 | 4, 65 | 1 | 196, 6 | — 0, 24 | — 0, 17 | — 0, 01 |
| — 22 | 480 | 4, 78 | 2 | 197, 1 | — 0, 11 | + 0, 33 | + 0, 03 |
| Medium pro 1829, 63 | | 4″, 894 | | 196°, 77 | | | |
| Error probabilis | | 0″, 036 | | 0°, 31 | | | |

### 738. λ Orionis.

*Major* (4) *subflava*, *minor* (6) *purpurea.*

| Epocha. | Amplificatio. | Distantia = *r*. | Numerus mensur. | Angulus = *w*. | Differentiae a medio. *dr*. | *dw*. | *r·dw*. |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 1829. Mart. 14* | 320 | 4″, 20 | 1 | 37°, 2 | — 3°, 12 | — 0″, 04 | — 0″, 23 |
| 1831. — 17* | 320 | 4, 17 | 2 | 44, 0 | + 3, 68 | — 0, 07 | + 0, 27 |
| — 20* | 480 | 4, 24 | 1 | 40, 1 | — 0, 22 | 0, 00 | — 0, 02 |
| — 21* | 480 | 4, 33 | 2 | 40, 4 | + 0, 08 | + 0, 09 | + 0, 01 |
| — 22* | 480 | 4, 24 | 2 | 39, 9 | — 0, 42 | 0, 00 | — 0, 03 |
| Medium pro 1830, 81 | | 4″, 236 | | 40°, 32 | | | |
| Error probabilis | | 0″, 036 | | 0°, 35 | | | |

### 774. ζ Orionis.

*Major* (2) *egregie flava*, *minor* (5) *rubrocinerea.*

| Epocha. | Amplificatio. | Distantia = r. | Numerus mensur. | Angulus = w. | Differentiae a medio. dr. | dw. | r·dw. |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 1831. Mart. 17* | 600 | 2″,46 | 1 | 149°,6 | + 0″,11 | — 1°,70 | — 0″,07 |
| — 20* | 480 | 2, 26 | 2 | 153, 7 | — 0, 09 | + 2, 40 | + 0, 10 |
| — 21* | 600 | 2, 28 | 3 | 150, 8 | — 0, 07 | — 0, 50 | — 0, 02 |
| — 22* | 480 | 2, 36 | 2 | 152, 2 | + 0, 01 | + 0, 90 | + 0, 04 |
| — 27* | 480 | 2, 27 | 3 | 151, 5 | — 0, 08 | + 0, 20 | + 0, 01 |
| — 28* | 480 | 2, 45 | 3 | 150, 0 | + 0, 10 | — 1, 30 | — 0, 06 |
| Medium pro 1831, 22 | | 2″,347 | | 151°,30 | | | |
| Error probabilis | | 0″,033 | | 0°,62 | | | |

### 845. 41 Aurigae.

*Major* (5) *minor* (6); *albae subflavae.*

| Epocha. | Amplificatio. | Distantia = r. | Numerus mensur. | Angulus = w. | Differentiae a medio. dr. | dw. | r·dw. |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 1827. April. 14 | 600 | 7″,95 | 1 | 364°,1 | + 0″,04 | + 0°,66 | + 0″,09 |
| — 16* | 480 | 7, 99 | 1 | 353, 1 | 0, 00 | — 0, 34 | — 0, 05 |
| 1831. — 25 | 480 | 7, 84 | 1 | 354, 0 | — 0, 15 | + 0, 56 | + 0, 08 |
| — 27 | 480 | 8, 09 | 2 | 353, 1 | + 0, 10 | — 0, 34 | — 0, 05 |
| — 28 | 480 | 8, 07 | 2 | 352, 9 | + 0, 08 | — 0, 54 | — 0, 08 |
| Medium pro 1829, 71 | | 7″,988 | | 353°,44 | | | |
| Error probabilis | | 0″,036 | | 0°,19 | | | |

### 982. 38 Geminorum.

*Major* (6) *flava*, *minor* (3) *subcaerulea.*

| Epocha. | Amplificatio. | Distantia = r. | Numerus mensur. | Angulus = w. | Differentiae a medio. dr. | dw. | r·dw. |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 1827. April. 10* | 480 | 5″,77 | 1 | 176°,6 | + 0″,01 | + 1°,72 | + 0″,17 |
| 1828. Mart. 11 | 320 | 5, 63 | 1 | 172, 8 | — 0, 13 | — 2, 08 | — 0, 21 |
| April. 9* | 480 | 5, 63 | 1 | 175, 5 | — 0, 13 | + 0, 62 | + 0, 06 |
| 1831. Mart. 26* | 480 | 5, 68 | 1 | 175, 8 | — 0, 08 | + 0, 92 | + 0, 09 |
| — 28* | 600 | 5, 97 | 1 | 173, 7 | + 0, 21 | — 1, 18 | — 0, 12 |
| Medium pro 1829, 24 | | 5″,756 | | 174°,88 | | | |
| Error probabilis | | 0″,036 | | 0°,26 | | | |

1065. 20 Lyncis.

*Utraque (7) egregie alba. Minor est prior.*

| Epocha. | Amplificatio. | Distantia = r. | Numerus mensur. | Angulus = w. | Differentiae a medio. dr. | dw. | r·dw. |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 1828. April. 28 | 480 | 15″, 34 | 1 | 252°, 7 | + 0″, 30 | — 0°, 70 | — 0″, 18 |
| 1829. Mai 8* | 320 | 14, 93 | 2 | 253, 47 | — 0, 11 | + 0, 07 | + 0, 02 |
| 1831. — 13* | 320 | 14, 98 | 2 | 254, 1 | — 0, 06 | + 0, 70 | + 0, 18 |
| — 17* | 320 | 15, 00 | 2 | 253, 65 | — 0, 04 | + 0, 25 | + 0, 06 |
| 1832. — 9* | 320 | 14, 93 | 2 | 253, 1 | — 0, 11 | — 0, 30 | — 0, 08 |
| Medium pro 1830, 55 | | 15, 036 | | 253, 40 | | | |
| Error probabilis | | = 0, 36 | | 0, 19 | | | |

1110. Castor.

*Major (2, 3) subviridis, minor (3, 4) certe viridior.*

| Epocha. | Amplificatio. | Distantia = r. | Numerus mensur. | Angulus = w | Differentiae a medio. dr. | dw. | r·dw. |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 1826. Mart. 8 | 480 | 4″, 61 | 2 | 262°, 8 | + 0″, 18 | — 0°, 49 | — 0″, 04 |
| — 15 | 480 | 4, 25 | 3 | 261, 9 | — 0, 18 | — 1, 38 | — 0, 10 |
| — 20* | 600 | 4, 38 | 2 | 261, 8 | — 0, 05 | — 1, 46 | — 0, 11 |
| — 21* | 600 | 4, 36 | 1 | 262, 0 | — 0, 07 | — 1, 26 | — 0, 09 |
| April. 22* | 600 | 4, 42 | 2 | 264, 2 | — 0, 01 | + 1, 02 | + 0, 08 |
| 1827. — 7* | 600 | 4, 45 | 1 | 261, 4 | + 0, 02 | — 0, 99 | — 0, 08 |
| — 9* | 600 | 4, 36 | 1 | 263, 0 | — 0, 07 | + 0, 62 | + 0, 04 |
| — 19* | 600 | 4, 51 | 1 | 262, 1 | + 0, 08 | — 0, 26 | — 0, 02 |
| — 20* | 600 | 4, 35 | 1 | 262, 8 | — 0, 08 | + 0, 44 | + 0, 03 |
| 1828. — 17* | 600 | 4, 42 | 1 | 262, 1 | — 0, 01 | + 0, 57 | + 0, 04 |
| — 20* | 600 | 4, 29 | 3 | 262, 2 | — 0, 14 | + 0, 70 | + 0, 05 |
| 1829. Mart. 18 | 320 | 4, 57 | 1 | 259, 5 | + 0, 14 | — 1, 23 | — 0, 09 |
| April. 20* | 600 | 4, 21 | 2 | 261, 5 | — 0, 22 | + 0, 85 | + 0, 07 |
| Mai. 8* | 600 | 4, 30 | 2 | 260, 2 | — 0, 13 | — 0, 40 | — 0, 03 |
| 1831. April. 19* | 480 | 4, 36 | 2 | 259, 3 | — 0, 07 | + 0, 35 | + 0, 03 |
| — 22* | 600 | 4, 46 | 2 | 260, 2 | + 0, 03 | + 1, 26 | + 0, 10 |
| — 25* | 600 | 4, 50 | 10 | 259, 3 | + 0, 07 | + 0, 37 | + 0, 03 |
| — 27* | 600 | 4, 48 | 5 | 259, 1 | + 0, 05 | + 0, 17 | + 0, 01 |
| — 28* | 600 | 4, 52 | 4 | 259, 9 | + 0, 09 | + 0, 97 | + 0, 08 |
| 1832. — 20* | 480 | 4, 83 | 2 | 258, 8 | + 0, 40 | + 0, 70 | + 0, 05 |
| Mai. 15* | 480 | 4, 38 | 4 | 257, 7 | — 0, 05 | — 0, 34 | — 0, 03 |
| — 20* | 600 | 4, 48 | 3 | 257, 5 | + 0, 05 | — 0, 53 | — 0, 04 |
| Medium pro 1829, 03 | | 4″, 431 | | 260°, 88 | | | |
| Error probabilis | | = 0″, 017 | | 0°, 16 | | | |

Distantiae mutatio exigua est, at continua apparet anguli diminutio. In sequenti singulorum annorum media composui:

| Epocha. | Numerus dierum | Distantia = r. | Error prob. in r. | Angulus = w. | Error prob. in w. | Angulus ex formula | Correctio formulae. |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 1826, 23 | 5 | 4″, 404 | 0″, 036 | 262°, 54 | 0°, 34 | 263°, 26 | — 0″, 12 |
| 1827, 28 | 4 | 4, 417 | 0, 040 | 262, 32 | 0, 38 | 262, 38 | — 0, 06 |
| 1828, 30 | 2 | 4, 355 | 0, 057 | 262, 15 | 0, 54 | 261, 50 | + 0, 65 |
| 1829, 29 | 3 | 4, 360 | 0, 046 | 260, 40 | 0, 44 | 260, 66 | — 0, 26 |
| 1831, 31 | 5 | 4, 464 | 0, 036 | 259, 56 | 0, 34 | 258, 94 | + 0, 62 |
| 1832, 35 | 3 | 4, 563 | 0, 046 | 258, 00 | 0, 44 | 257, 91 | + 0, 09 |

Ex quatuor mensuris per tubum quinque pedum Troughtonianum, micrometro Fraunhoferiano instructum, pro 1822,01 acceperam $w = 266°, 81$. Quocum medio collato pro epocha $t$ angulus exprimitur per formulam $w = 260°, 88 - (t - 1829,03)\ 0°, 848$. Cum hac formula tam singulorum dierum angulos, quam media pro quovis anno comparavi.

## 1196. ζ Cancri.

*Stella triplex, A est (5), B vero (6), C inter utramque (5, 6); flavae. A + B certe flavior quam A, et A paulo flavior quam C.*

*A et B.*

| Epocha. | | | Amplificatio. | Distantia = r. | Numerus mensur. | Angulus = w. | Differentiae a medio. dr. | dw. | r·dw. |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 1826. | Mart. | 20* | 600 | 1″, 26 | 2 | 57°, 1 | + 0″, 18 | + 1°, 4 | + 0″, 03 |
| | — | 21* | 480 | 1, 14 | 2 | 57, 1 | + 0, 06 | + 1, 4 | + 0, 03 |
| | — | 22* | 600 | 1, 02 | 4 | 58, 7 | — 0, 06 | + 2, 9 | + 0, 06 |
| 1828. | April. | 23* | 600 | 1, 04 | 3 | 39, 8 | — 0, 04 | — 5, 5 | — 0, 11 |
| 1829. | — | 29* | 600 | 1, 04 | 1 | 38, 1 | — 0, 04 | — 2, 0 | — 0, 04 |
| | Mai | 8* | 600 | 0, 85 | 1 | 38, 6 | — 0, 23 | — 1, 5 | — 0, 03 |
| 1831. | April. | 11* | 600 | 1, 04 | 1 | 28, 6 | — 0, 04 | — 1, 9 | — 0, 04 |
| | — | 12* | 600 | 1, 02 | 1 | 28, 8 | — 0, 06 | — 1, 7 | — 0, 03 |
| | — | 14* | 600 | 1, 13 | 1 | 30, 0 | + 0, 05 | — 0, 4 | — 0, 01 |
| | — | 17* | 600 | 1, 01 | 1 | 30, 9 | — 0, 07 | + 0, 5 | + 0, 01 |
| | — | 18* | 600 | 0, 99 | 1 | 30, 7 | — 0, 09 | + 0, 3 | + 0, 01 |
| | — | 19* | 600 | 1, 10 | 1 | 29, 8 | + 0, 02 | — 0, 6 | — 0, 01 |
| 1832. | — | 10* | 600 | 1, 08 | 2 | 28, 2 | 0, 00 | + 2, 7 | + 0, 05 |
| | — | 12* | 600 | 1, 13 | 2 | 26, 0 | + 0, 05 | + 0, 4 | + 0, 01 |
| | — | 13* | 600 | 1, 15 | 2 | 26, 9 | + 0, 07 | + 1, 4 | + 0, 03 |
| | — | 20* | 600 | 1, 24 | 3 | 29, 0 | + 0, 16 | + 3, 6 | + 0, 07 |
| Medium pro 1830, 15 | | | | 1″, 077 | | 36°, 14 | | | |
| Error probabilis = | | | | 0″, 020 | | 0°, 78 | | | |

## *A* et *C.*

| Epocha. | Amplificatio. | Distantia = *r*. | Numerus mensur. | Angulus = *w*. | Differentiae a medio. | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | | | | | *dr.* | *dw.* | *r·dw.* |
| 1826. Mart. 20* | 600 | 5″, 32 | 1 | 155°,65 | — 0″, 08 | + 2°, 92 | + 0″, 27 |
| — 21* | 480 | 5, 28 | 2 | 154,65 | — 0, 12 | + 1, 93 | + 0, 18 |
| — 22* | 600 | | | 153,75 | | + 1, 02 | + 0, 10 |
| 1828. April. 23* | 600 | 5, 34 | 3 | 152,45 | — 0, 06 | + 1, 05 | + 0, 09 |
| 1829. — 29* | 600 | 5, 32 | 1 | 150, 0 | — 0, 08 | — 0, 76 | — 0, 07 |
| Mai 8* | 600 | 5, 28 | 3 | 151, 7 | — 0, 12 | + 0, 95 | + 0, 09 |
| 1831. April. 11* | 600 | 5, 43 | 1 | 147, 7 | + 0, 03 | — 1, 84 | — 0, 17 |
| — 12* | 600 | 5, 42 | 1 | 147, 9 | + 0, 02 | — 1, 64 | — 0, 15 |
| — 14* | 600 | 5, 48 | 1 | 150, 4 | + 0, 08 | + 0, 87 | + 0, 08 |
| — 17* | 600 | 5, 25 | 2 | 147, 6 | — 0, 15 | — 1, 93 | — 0, 18 |
| — 18* | 600 | 5, 32 | 1 | 149, 6 | — 0, 08 | + 0, 07 | + 0, 01 |
| — 19* | 600 | 5, 51 | 1 | 148, 2 | + 0, 11 | — 1, 33 | — 0, 12 |
| 1832. — 10* | 600 | 5, 56 | 2 | 148, 2 | + 0, 16 | — 0, 71 | — 0, 06 |
| — 12* | 600 | 5, 42 | 2 | 149, 5 | + 0, 02 | + 0, 59 | + 0, 06 |
| — 13* | 600 | 5, 59 | 2 | 149, 0 | + 0, 19 | + 0, 09 | + 0, 01 |
| — 20* | 600 | 5, 51 | 1 | 147, 7 | + 0, 11 | — 1, 21 | — 0, 11 |
| Medium pro 1830, 15 | | 5″,396 | | 150°,25 | | | |
| Error probabilis = | | 0″,020 | | 0°,16 | | | |

Systema hoc inter omnes stellas compositas maxime memorabile. Jam ex Southii observationibus Herschelius II motum gyratorium in *A* et *B* demonstravit, sed tum temporis in motus directione erravit. Nam ex valoribus anguli pro 1781, 89 qui erat *w* = 3°, 53 et pro 1826, 22, *w* = 57°, 63 et pro 1832, 27, *w* = 27°, 52 comparatis elucet in 50, 38 annis motum aequasse 336°, 01; unde deducimus tempus revolutionis non multum 54 annos esse excessurum. Idem etiam clarissimum Herschelium II anno 1830 animadvertisse, ex Hardingii ephemeridibus pro 1833 pag. 105 video. Pro *A* et *C* angulus anno 1780, 26 erat *w* = 181°, 73 (angulus a Herschelio datus pro medio inter *A* et *B* atque *C*; sed cum eo tempore *A*, *B* et *C* essent proxime in linea recta, idem *w* pro *A* et *C* obtinet). Quo cum *w* = 150°, 25 pro 1830, 15 collato, motus apparet in 49, 89 annis = 31°, 48 in eadem directione qua *C* procedit. Pro epocha ad 1830 vicina angulus exprimitur per formulam *w* = 150°, 25 — (*t* − 1830, 15) 0°, 631, ad quam comparatio singulorum angulorum est instituta.

*

Sumtis ex diebus vicinis mediis sequentes proveniunt relationes:

| Epocha. | Numerus durum | Distantia = r pro A et B. | Error prob. in r. | Angulus = w pro A et B. | Error prob. in w. | Distantia = r pro A et C. | Error prob. in r. | Angulus = w pro A et C. | Error probab. in A et C. |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 1826, 22 | 3 | 1″,140 | 0″,046 | 57°,63 | 1°,72 | 5″,300 | 0″,046 | 154°,68 | 0°,37 |
| 1828, 99 | 3 | 0, 977 | 0, 046 | 38, 83 | 2, 00 | 5, 313 | 0, 046 | 151, 38 | 0, 37 |
| 1831, 29 | 6 | 1, 032 | 0, 032 | 29, 80 | 1, 34 | 5, 402 | 0, 032 | 148, 57 | 0, 26 |
| 1832, 27 | 4 | 1, 150 | 0, 040 | 27, 52 | 1, 47 | 5, 520 | 0, 040 | 148, 60 | 0, 31 |

Ex postremis angulis foret pro *A* et *B* motus in 6,05 annis = — 30°,15. Singulorum dierum augulos comparavi ideo cum formula pro epocha = *t* angulum exhibente $w = 36°,14 - (t - 1830,15) \cdot 4°,983$.

### 1223. $\varphi^2$ Cancri.

*Major* (6) *alba subflava*, *minor* (6,7) *alba.*

| Epocha. | | Amplificatio | Distantia = r. | Numerus mensur. | Angulus = w. | Differentiae a medio. dr | dw. | r·dw. |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 1826. April. | 22* | 600 | 4″,66 | 1 | 209°,7 | + 0″,10 | — 2°,34 | 0″,18 |
| — | 24* | 600 | 4, 53 | 1 | 210, 3 | — 0, 03 | — 1, 74 | — 0, 14 |
| 1828. — | 23* | 600 | 4, 62 | 2 | 212, 5 | + 0, 06 | + 0, 46 | + 0, 04 |
| 1831. — | 22* | 480 | 4, 45 | 2 | 213, 3 | — 0, 11 | + 1, 26 | + 0, 10 |
| — | 25* | 480 | 4, 56 | 3 | 213, 1 | 0, 00 | + 1, 06 | + 0, 08 |
| — | 27* | 600 | 4, 56 | 2 | 213, 2 | 0, 00 | + 1, 16 | + 0, 09 |
| — | 28* | 600 | 4, 56 | 2 | 212, 2 | 0, 00 | + 0, 16 | + 0, 01 |

Medium pro 1829, 46   4″, 563   212°,04
Error probabilis = 0″, 030   0°, 28

### 7224. $v'$ Cancri.

*Major* (6), *subflava*, *minor* (7) *flavior.*

| Epocha. | | Amplificatio. | Distantia = r. | Numerus mensur. | Angulus = w. | Differentiae a medio dr | dw | r·dw |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 1826. April. | 22* | 600 | 5″,90 | 1 | 34°,2 | + 0″,07 | — 2°,64 | — 0″,27 |
| — | 24 | 480 | 5, 66 | 1 | 36, 0 | — 0, 17 | — 0, 84 | — 0, 08 |
| 1828. — | 23* | 600 | 5, 89 | 2 | 37, 0 | + 0, 06 | + 0, 16 | + 0, 02 |
| 1831. — | 22* | 480 | 5, 71 | 2 | 36, 9 | — 0, 12 | + 0, 06 | + 0, 01 |
| — | 25* | 480 | 5, 98 | 2 | 37, 2 | + 0, 15 | + 0, 36 | + 0, 04 |
| — | 27* | 480 | 5, 78 | 3 | 38, 3 | — 0, 05 | + 1, 46 | + 0, 15 |
| — | 28* | 480 | 5. 86 | 2 | 38. 3 | + 0, 03 | + 1, 46 | + 0. 15 |

Medium pro 1829, 46   5″, 826   36°,84
Error probabilis = 0″, 030   0°, 22

## 1424. γ Leonis.

*Major* (3) *aurea*, *minor* (4) *viridis.*

| Epocha. | Amplificatio. | Distantia = r. | Numerus mensur. | Angulus = w. | Differentiae a medio. dr. | dw. | r·dw. |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 1826. Mart. 15 | 480 | 2",40 | 2 | 97°, 5 | — 0",08 | — 5°, 3 | — 0",23 |
| 1827. April. 12 | 600 | 2, 80 | 1 | 102, 9 | + 0, 32 | + 0, 1 | 0, 00 |
| 1828. — 17 | 600 | 2, 40 | 1 | 103, 5 | — 0, 08 | + 0, 6 | + 0, 03 |
| Mai 10* | 600 | 2, 52 | 4 | 101, 0 | + 0, 04 | — 1, 8 | — 0, 08 |
| 1829. — 4 | 480 | 2, 33 | 4 | 103, 4 | — 0, 15 | + 0, 6 | + 0, 03 |
| — 12* | 600 | 2, 30 | 4 | 104, 2 | — 0, 18 | + 1, 4 | + 0, 06 |
| 1831. Mart. 25 | 600 | 2, 54 | 3 | 102, 3 | + 0, 06 | — 0, 5 | — 0, 02 |
| Mai 4* | 480 | 2, 56 | 3 | 102, 1 | + 0, 08 | — 0, 7 | — 0, 03 |
| — 17* | 600 | 2, 41 | 3 | 104, 2 | — 0, 07 | + 1, 4 | + 0, 06 |
| — 18* | 600 | 2, 50 | 3 | 103, 8 | + 0, 02 | + 1, 0 | + 0, 04 |
| — 21* | 600 | 2, 41 | 3 | 103, 9 | — 0, 07 | + 1, 1 | + 0, 05 |
| 1832. April. 23* | 600 | 2, 66 | 5 | 103, 2 | + 0, 18 | + 0, 4 | + 0, 02 |
| Mai 7* | 600 | 2, 46 | 3 | 102, 8 | — 0, 02 | 0, 0 | 0, 00 |
| — 28* | 600 | 2, 42 | 2 | 104, 4 | — 0, 06 | + 1, 6 | + 0, 07 |
| Medium pro 1830,18 | | 2",479 | | 102°, 80 | | | |
| Error probabilis = | | 0",021 | | 0°, 46 | | | |

## 1523. ξ Ursae majoris.

*Major* (4) *subflava*, *minor* (5) *flavocinerea.*

| Epocha. | Amplificatio. | Distantia = r. | Numerus mensur. | Angulus = w. | Differentiae a medio. dr. | dw. | r·dw. |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 1826. Mart. 7 | 600 | 1",73 | 2 | | + 0",01 | | |
| — 15 | 600 | 1, 68 | 2 | 238°, 0 | — 0, 04 | + 1°, 3 | + 0", 04 |
| — 20 | 600 | 1, 83 | 3 | 239, 5 | + 0, 11 | + 2, 8 | + 0, 08 |
| 1827. April. 7* | 600 | 1, 82 | 1 | 229, 5 | + 0, 10 | — 0, 6 | — 0, 02 |
| — 9* | 600 | 1, 67 | 1 | 228, 1 | — 0, 05 | — 1, 9 | — 0, 06 |
| — 12 | 480 | 1, 84 | 1 | 226, 6 | + 0, 12 | — 3, 4 | — 0, 10 |
| — 18* | 600 | 1, 53 | 2 | 228, 9 | — 0, 19 | — 1, 1 | — 0, 03 |
| 1828. Mart. 25 | 600 | 1, 89 | 1 | 220, 8 | + 0, 17 | — 2, 7 | — 0, 08 |
| 1829. April. 20 | 480 | 1, 93 | 1 | 212, 6 | + 0, 21 | — 3, 5 | — 0, 10 |
| Mai 24* | 600 | 1, 72 | 4 | 211, 5 | 0, 00 | — 4, 0 | — 0, 12 |
| — 27* | 600 | 1, 56 | 5 | 213, 7 | — 0, 16 | — 1, 8 | — 0, 05 |
| Jun. 7* | 600 | 1, 50 | 5 | 211, 6 | — 0, 22 | — 3, 7 | — 0, 11 |

| Epocha. | | Amplificatio. | Distantia $= r$. | Numerus mensur. | Angulus $= w$. | Differentiae a medio. | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | | | | | | $dr$. | $dw$. | $r \cdot dw$. |
| 1829. Jun. | 7* | 600 | 1″,54 | 3 | 213°,1 | — 0″,18 | — 2°,1 | — 0″,06 |
| 1830. April. | 10 | 600 | 1, 56 | 2 | 211, 8 | — 0, 16 | + 2, 3 | + 0, 07 |
| 1831. Jun. | 1* | 600 | 1, 66 | 3 | 203, 6 | — 0, 06 | + 2, 0 | + 0, 06 |
| — | 2* | 600 | 1, 73 | 4 | 203, 6 | + 0, 01 | + 2, 0 | + 0, 06 |
| — | 15* | 600 | 1, 67 | 4 | 204, 6 | — 0, 05 | + 3, 6 | + 0, 11 |
| — | 17* | 600 | 1, 73 | 3 | 202, 9 | + 0, 01 | + 1, 6 | + 0, 05 |
| — | 18* | 600 | 1, 74 | 3 | 205, 0 | + 0, 02 | + 3, 7 | + 0, 11 |
| 1832. April. | 11* | 600 | 1, 68 | 3 | 193, 6 | — 0, 04 | — 2, 0 | — 0, 06 |
| Jun. | 1* | 600 | 1, 84 | 3 | 197, 0 | + 0, 12 | + 2, 3 | + 0, 07 |
| — | 6* | 600 | 1, 74 | 2 | 197, 5 | + 0, 02 | + 3, 0 | + 0, 09 |
| — | 14* | 600 | 1, 73 | 3 | 196, 0 | + 0, 01 | + 1, 6 | + 0, 05 |
| — | 16* | 600 | 1, 76 | 3 | 195, 6 | + 0, 04 | + 1, 4 | + 0, 04 |
| Medium pro 1829, 69 | | | 1″,720 | | 213°, 43 | | | |
| Error probabilis = | | | 0″,016 | | 0°, 41 | | | |

Sumtis mediis ex observationibus vicinis, accepimus haec:

| Epocha. | Numerus dierum | Distantia $= r$. | Error prob. in $r$. | Angulus $= w$. | Error prob. in $w$. |
|---|---|---|---|---|---|
| 1826, 20 | 3 | 1″,747 | 0″,046 | 238°,75 | 1°,14 |
| 1827, 28 | 4 | 1, 715 | 0, 040 | 228, 27 | 1, 00 |
| 1829, 35 | 7 | 1, 671 | 0, 030 | 213, 59 | 0, 74 |
| 1831, 45 | 5 | 1, 706 | 0, 036 | 203, 82 | 0, 88 |
| 1832, 41 | 5 | 1, 750 | 0, 036 | 195, 94 | 0, 88 |

Ex postremis deducitur motus angularis in 6,21 annis = — 42°, 81, seu annuus = − 6°,894, qui proxime pro toto spatio obtinebitur, cumin distantia exiguae tantum appareant vicissitudines. Singulos itaque angulos comparavi cum formula $w = 213°,43 - (t - 1829,69)\ 6°,894$.

## 1670. γ Virginis.

*Utraque (3) subflava; prior est paululo minor.*

| Epocha. | | | Amplificatio. | Distantia = r. | Numerus mensur. | Angulus = w. | Differentiae a medio. | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | | | | | | | dr. | dw. | r·dw. |
| 1828. | Mai | 19* | 480 | 2″,07 | 3 | 271°,5 | | | |
| 1829. | — | 18* | 480 | 1, 86 | 1 | 268, 8 | + 0″,08 | + 0°, 5 | + 0″,02 |
| | — | 19* | 600 | 1, 75 | 3 | 268, 1 | — 0, 03 | — 0, 2 | — 0, 01 |
| | — | 22* | 600 | 1, 78 | 3 | 268, 7 | 0, 00 | + 0, 4 | + 0, 01 |
| | — | 23* | 600 | 1, 76 | 3 | 268, 0 | — 0, 02 | — 0, 3 | — 0, 01 |
| | — | 24* | 600 | 1, 76 | 2 | 267, 7 | — 0, 02 | — 0, 5 | — 0, 02 |
| 1831. | Mart. | 25 | 600 | 1, 55 | 1 | 261, 9 | + 0, 04 | + 0, 4 | + 0, 01 |
| | Mai | 18* | 600 | 1, 43 | 3 | 260, 6 | — 0, 06 | — 0, 1 | 0, 00 |
| | — | 19* | 600 | 1, 53 | 3 | 259, 9 | + 0, 04 | — 0, 8 | — 0, 02 |
| | — | 21* | 600 | 1, 56 | 3 | 261, 2 | + 0, 07 | + 0, 1 | 0, 00 |
| | Jun. | 1* | 600 | 1, 39 | 3 | 261, 0 | — 0, 08 | + 0, 3 | + 0, 02 |
| 1832. | Mai | 20* | 600 | 1, 29 | 4 | 253, 7 | + 0, 01 | — 0, 5 | — 0, 01 |
| | — | 25* | 600 | 1, 29 | 4 | 254, 5 | + 0, 01 | + 0, 4 | + 0, 01 |
| | — | 28* | 600 | 1, 25 | 3 | 254, 3 | — 0, 03 | + 0, 2 | 0, 00 |
| | Novbr. | 25 | 800 | 1, 22 | 4 | 251, 5 | + 0, 02 | — 0, 1 | 0, 00 |

Etiam in his stellis, tam ob anguli quam ob distantiae mutationem, vicinas solum observationes componere licet, quarum sunt media haec, quibus in fronte addidi positionem pro 1825, 33 relativam, nixam observationibus, quae in descriptione tubi Fraunhoferiani exstant.

| Epocha. | Numerus dierum | Distantia = r. | Error prob. in r. | Angulus = w. | Error prob. in w. |
|---|---|---|---|---|---|
| 1825, 33 | 6 | 2″,380 | 0″,033 | 277°,92 | 0°,92 |
| 1828, 37 | 1 | 2, 070 | 0, 080 | 271, 50 | 1, 64 |
| 1829, 39 | 5 | 1, 782 | 0, 036 | 268, 26 | 0, 85 |
| 1831, 36 | 5 | 1, 492 | 0, 036 | 260, 92 | 1, 02 |
| 1832, 52 | 4 | 1, 262 | 0, 040 | 253, 50 | 1, 34 |

Singulas trium annorum observationes cum medio annuo comparavi respecta mutatione, qualis ex proximis utrimque annis sequitur.

### 1744. ζ Ursae majoris.

*Major (2), minor (4), albae subvirides.*

| Epocha. | | | Amplificatio. | Distantia = r. | Numerus mensur. | Angulus = w. | Differentiae a medio. | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | | | | | | | dr. | dw. | r·dw. |
| 1826. | Nov. | 22* | 480 | 14″,29 | 1 | 147°, 15 | — 0″,08 | — 0°,45 | — 0″,11 |
| 1829. | Oct. | 24* | 480 | 14, 25 | 3 | 147, 3 | — 0, 12 | — 0, 30 | — 0, 07 |
| 1831. | Aug. | 5* | 480 | 14, 45 | 2 | 147, 7 | + 0, 08 | + 0, 10 | + 0, 02 |
| | — | 11* | 320 | 14, 44 | 2 | 148, 15 | + 0, 07 | + 0, 55 | + 0, 14 |
| | — | 12* | 480 | 14, 35 | 2 | 147, 6 | — 0, 02 | 0, 00 | 0, 00 |
| 1832. | April. | 18* | 480 | 14, 43 | 2 | 147, 7 | + 0, 06 | + 0, 10 | + 0, 02 |

Medium pro 1830, 64 14″,368 147°,60
Error probabilis = 0″,033 0°,10

### 1864. π Bootis.

*Major (5), minor (6), albae.*

| Epocha. | | | Amplificatio. | Distantia = r. | Numerus mensur. | Angulus = w. | Differentiae a medio. | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | | | | | | | dr. | dw. | r·dw. |
| 1827. | April. | 11 | 600 | 6″,08 | 1 | 98°, 7 | + 0″,25 | — 0°,50 | — 0″,05 |
| 1829. | — | 20 | 480 | 6, 00 | 1 | 99, 3 | + 0, 17 | + 0, 10 | + 0, 01 |
| | Mai | 7 | 480 | 5, 99 | 3 | 99, 5 | + 0, 16 | + 0, 30 | + 0, 03 |
| | Jun. | 7* | 480 | 5, 82 | 2 | 99, 2 | — 0, 01 | 0, 00 | 0, 00 |
| 1831. | — | 16* | 480 | 5, 72 | 3 | 99, 1 | — 0, 11 | — 0, 10 | — 0, 01 |
| | — | 18* | 480 | 5, 74 | 2 | 99, 5 | — 0, 09 | + 0, 30 | + 0, 03 |
| | — | 27* | 480 | 5, 61 | 3 | 99, 3 | — 0, 22 | + 0, 10 | + 0, 01 |
| | — | 30* | 480 | 5, 83 | 2 | 98, 8 | 0, 00 | — 0, 40 | — 0, 04 |
| | Aug. | 16* | 480 | 5, 71 | 3 | 99, 4 | — 0, 12 | + 0, 20 | + 0, 02 |

Medium pro 1830, 32 5″, 833 99°, 20
Error probabilis = 0″, 027 0°, 19

## 1865. ζ Bootis.

*Major (3,4), minor (4), egregie albae. Splendor in altera variabilis; nam mox ne minimum inter ipsas discrimen apparet, alias vero tale ut majorem (3) minorem (4) ponas:*

| Epocha. | | | Amplificatio. | Distantia = r. | Numerus mensur. | Angulus = w. | Differentiae a medio. dr. | dw. | r·dw. |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 1827. | April. | 11 | 600 | 1″,33 | 1 | 313°,7 | + 0″,14 | + 4°,8 | + 0″,10 |
| 1828. | Sept. | 16* | 600 | 1, 18 | 4 | 312, 1 | — 0, 01 | + 3, 2 | + 0, 06 |
| 1829. | Mai. | 7* | 600 | 1, 00 | 1 | 309, 0 | — 0, 19 | + 0, 1 | 0, 00 |
| | Jun. | 7* | 600 | 1, 08 | 1 | 309, 1 | — 0, 11 | + 0, 2 | 0, 00 |
| | Jul. | 14* | 600 | 1, 13 | 2 | 308, 8 | — 0, 06 | — 0, 1 | 0, 00 |
| 1831. | Jun. | 16* | 600 | 1, 23 | 3 | 306, 2 | + 0, 04 | — 2, 7 | — 0, 05 |
| | — | 18* | 600 | 1, 25 | 2 | 309, 1 | + 0, 06 | + 0, 4 | + 0, 01 |
| | — | 27* | 600 | 1, 28 | 2 | 306, 7 | + 0, 09 | — 2, 2 | — 0, 04 |
| | — | 30* | 600 | 1, 18 | 3 | 306, 5 | — 0, 01 | — 2, 4 | — 0, 05 |
| | Aug. | 16* | 600 | 1, 26 | 3 | 307, 5 | + 0, 07 | — 1, 4 | — 0, 03 |

Medium pro 1830, 19  1″, 190  308°, 87
Error probabilis = 0″, 025  0°, 90

## 1877. ε Bootis.

*Major (3) egregie flava, minor (6) egregie caerulea.*

| Epocha. | | | Amplificatio. | Distantia = r. | Numerus mensur. | Angulus = w. | Differentiae a medio. dr. | dw. | r·dw. |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 1826. | Octbr. | 16* | 600 | 2″,73 | 2 | 317°,5 | + 0″,08 | — 3°,4 | — 0″,16 |
| | — | 17* | 600 | 2, 66 | 2 | 318, 4 | + 0, 01 | — 2, 5 | — 0, 11 |
| 1827. | April. | 11 | 600 | 2, 55 | 1 | 323, 5 | — 0, 10 | + 2, 6 | + 0, 12 |
| 1828. | Mart. | 15 | 480 | 2, 76 | 1 | 321, 3 | + 0, 11 | + 0, 4 | + 0, 02 |
| | April. | 20 | 600 | 2, 68 | 1 | 323, 5 | + 0, 03 | + 2, 6 | + 0, 12 |
| | — | 29 | 480 | 2, 76 | 1 | 324, 7 | + 0, 11 | + 3, 8 | + 0, 18 |
| | Aug. | 28 | 600 | 2, 61 | 3 | 319, 5 | — 0, 04 | — 1, 4 | — 0, 06 |
| | — | 30 | 600 | 2, 64 | 3 | 319, 4 | — 0, 01 | — 1, 5 | — 0, 07 |
| | Sept. | 16* | 600 | 2, 74 | 3 | 323, 5 | + 0, 09 | + 2, 6 | + 0, 12 |
| | — | 19* | 600 | 2, 80 | 2 | 318, 5 | + 0, 15 | — 2, 4 | — 0, 11 |
| | Octbr. | 2* | 480 | 2, 55 | 1 | 322, 2 | — 0, 10 | + 1, 3 | + 0, 06 |
| | — | 4* | 600 | 2, 57 | 3 | 320, 5 | — 0, 08 | — 0, 4 | — 0, 02 |
| 1829. | Jul. | 31* | 600 | 2, 61 | 1 | 321, 2 | — 0, 04 | + 0, 3 | + 0, 01 |
| 1831. | — | 14* | 600 | 2, 57 | 3 | 320, 7 | — 0, 08 | — 0, 2 | — 0, 01 |
| | — | 18* | 600 | 2, 65 | 3 | 320, 2 | 0, 00 | — 0, 7 | — 0, 03 |
| | Aug. | 16* | 600 | 2, 56 | 3 | 319, 3 | — 0, 09 | — 1, 6 | — 0, 07 |

Medium pro 1828, 89  2″,652  320°,88
Error probabilis = 0″,020  0°,32

### 1965. ζ Coronae.

*Major (4) alba subviridis, minor (5) viridicaerulea.*

| Epocha. | Amplificatio. | Distantia = r. | Numerus mensur. | Angulus = w. | Differentiae a medio. dr. | dw. | r·dw. |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 1826. Octbr. 17* | 480 | 6″,17 | 1 | 300°,40 | + 0″, 17 | — 0°, 45 | — 0″, 05 |
| 1828. Septbr. 4 | 480 | 5, 97 | 4 | 300, 47 | — 0, 03 | — 0, 38 | — 0, 04 |
| 1829. — 22* | 600 | 5, 93 | 1 | 301, 60 | — 0, 07 | + 0, 75 | + 0, 08 |
| 1831. — 1* | 600 | 5, 89 | 4 | 301, 25 | — 0, 11 | + 0, 40 | + 0, 04 |
| — 6* | 600 | 6, 05 | 2 | 300, 55 | + 0, 05 | — 0, 30 | — 0, 03 |
| Medium pro 1829, 71 | | 6″, 002 | | 300°, 85 | | | |
| Error probabilis = | | 0″, 036 | | 0°, 25 | | | |

### 2140. α Herculis.

*Major (3) aurea, minor (5) caerulea. Minorem esse variabilem suspicor.*

| Epocha. | Amplificatio. | Distantia = r. | Numerus mensur. | Angulus = w. | Differentiae a medio. dr. | dw. | r·dw. |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 1826. Novbr. 7* | 600 | 4″, 76 | 1 | 118°,63 | + 0″, 11 | + 0°, 15 | + 0″, 01 |
| 1828. Sept. 16* | 600 | 4, 55 | 2 | 116,20 | — 0, 10 | — 2, 28 | — 0, 18 |
| — 19* | 600 | 4, 69 | 3 | 118,05 | + 0, 04 | — 0, 43 | — 0, 03 |
| Octbr. 5* | 600 | 4, 57 | 3 | 119,15 | — 0, 08 | + 0, 67 | + 0, 05 |
| 1829. Mai. 19 | 480 | 4, 49 | 1 | 118,10 | — 0, 16 | — 0, 38 | — 0, 03 |
| Jul. 14* | 600 | 4, 87 | 1 | 118,97 | + 0, 22 | + 0, 49 | + 0, 04 |
| Aug. 8* | 480 | 4, 70 | 1 | 118,90 | + 0, 05 | + 0, 42 | + 0, 03 |
| — 10* | 600 | 4, 72 | 3 | 119,50 | + 0, 07 | + 1, 02 | + 0, 08 |
| — 14* | 600 | 4, 68 | 3 | 118,70 | + 0, 03 | + 0, 22 | + 0, 02 |
| 1831. — 5* | 480 | 4, 59 | 3 | 118,60 | — 0, 06 | + 0, 12 | + 0, 01 |
| — 14* | 480 | 4, 53 | 2 | 118,75 | — 0, 12 | + 0, 27 | + 0, 02 |
| — 19* | 480 | 4, 62 | 4 | 118,20 | — 0, 03 | — 0, 28 | — 0, 02 |
| Medium pro 1829, 64 | | 4″, 648 | | 118°, 48 | | | |
| Error probabilis = | | 0″, 023 | | 0°, 21 | | | |

2272. 70 *p* Ophiuchi.

*Major* (4) *flava*, *minor* (6) *purpurea.*

| Epocha. | | | Amplificatio. | Distantia = r. | Numerus mensur. | Angulus = w. | Differentiae a medio. dr. | dw. | r·dw. |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 1825. | Jun. | 4 | | 3″,89 | 2 | 150°10 | — 0″,07 | + 1°,76 | + 0″,12 |
| | — | 6 | | 4, 05 | 2 | 146,97 | + 0, 09 | — 1, 47 | — 0, 10 |
| | — | 11 | | 3, 94 | 2 | 149,05 | — 0, 02 | + 0, 71 | + 0, 05 |
| | — | 25 | | 4, 05 | 2 | 148,80 | + 0, 13 | + 0, 46 | + 0, 03 |
| | Jul. | 3 | | 4, 21 | 2 | 146,45 | + 0, 25 | — 1, 79 | — 0, 12 |
| | Aug. | 8* | 600 | 3, 91 | 2 | 148,10 | — 0, 09 | + 0, 08 | + 0, 01 |
| | — | 9* | 480 | 3, 85 | 2 | 149,50 | — 0, 15 | + 1, 48 | + 0, 10 |
| | — | 13* | 320 | 4, 05 | 1 | 149,33 | + 0, 05 | + 1, 31 | + 0, 09 |
| | — | 16* | 480 | 3, 92 | 2 | 146,77 | — 0, 08 | — 1, 25 | — 0, 09 |
| | — | 20* | 480 | 3, 89 | 2 | 147,27 | — 0, 11 | — 0, 71 | — 0, 05 |
| | — | 21* | 480 | 3, 99 | 2 | 148,38 | — 0, 01 | + 0, 40 | + 0, 03 |
| | — | 24* | 480 | 4, 01 | 2 | 146,95 | + 0, 01 | — 0, 83 | — 0, 06 |
| | — | 29* | 480 | 4, 01 | 2 | 148,55 | + 0, 01 | + 0, 57 | + 0, 04 |
| | Sept. | 16* | 600 | 4, 02 | 2 | 147,83 | 0, 00 | + 0, 01 | 0, 00 |
| 1826. | Octbr. | 4* | 600 | 4, 24 | 2 | 146,40 | — 0, 08 | + 0, 75 | + 0, 05 |
| 1827. | April. | 13 | 600 | 4, 51 | 2 | 143,90 | + 0, 08 | — 0, 75 | — 0, 05 |
| 1828. | Aug. | 30* | 600 | 4, 74 | 3 | 140,15 | — 0, 03 | — 0, 16 | — 0, 01 |
| | Sept. | 16* | 600 | 4, 85 | 3 | 140,40 | + 0, 07 | + 0, 19 | + 0, 02 |
| | — | 18* | 600 | 4, 78 | 2 | 140,50 | 0, 00 | + 0, 29 | + 0, 02 |
| | Octbr. | 4* | 600 | 4, 76 | 3 | 139,80 | — 0, 03 | — 0, 31 | — 0, 03 |
| 1829. | Mai. | 19 | 480 | 5, 09 | 2 | 138,45 | + 0, 03 | — 0, 02 | 0, 00 |
| | Aug. | 8 | 480 | 4, 98 | 1 | 139,20 | — 0, 10 | + 1, 13 | + 0, 10 |
| | — | 14* | 600 | 5, 11 | 3 | 137,90 | + 0, 02 | — 0, 11 | — 0, 01 |
| | — | 23 | 600 | 5, 17 | 3 | 138,00 | + 0, 08 | + 0, 03 | 0, 00 |
| | — | 25* | 600 | 5, 07 | 3 | 136,10 | — 0, 02 | — 1, 85 | — 0, 16 |
| | Sept. | 1* | 600 | 5, 10 | 1 | 138,80 | 0, 00 | + 0, 89 | + 0, 08 |
| 1830. | Octbr. | 28* | 600 | 5, 37 | 3 | 135,50 | + 0, 09 | — 0, 31 | — 0, 03 |
| | Novbr. | 10* | 600 | 5, 25 | 4 | 136,00 | — 0, 09 | + 0, 31 | + 0, 03 |
| 1831. | Aug. | 16* | 600 | 5, 40 | 1 | 135,95 | 0, 00 | + 1, 14 | + 0, 11 |
| | — | 19* | 600 | 5, 33 | 3 | 135,20 | — 0, 07 | + 0, 39 | + 0, 04 |
| | Sept. | 6* | 600 | 5, 46 | 4 | 133,20 | + 0, 05 | — 1, 51 | — 0, 14 |
| | — | 7* | 600 | 5, 41 | 3 | 134,20 | 0, 00 | — 0, 49 | — 0, 05 |
| | Oct. | 9* | 600 | 5, 45 | 3 | 135,00 | + 0, 03 | + 0, 47 | + 0, 04 |
| 1832. | — | 3* | 800 | 5, 58 | 3 | 134,00 | + 0, 01 | + 0, 23 | + 0, 02 |
| | — | 3* | 480 | 5, 45 | 3 | 134,10 | — 0, 12 | + 0, 33 | + 0, 03 |
| | — | 4* | 800 | 5, 63 | 3 | 133,50 | + 0, 06 | — 0, 27 | — 0, 02 |

*

Media ex observationibus inter se proximis sunt haec:

| Epocha. | Numerus dierum | Distantia = r. | Error prob. in r. | Angulus = w. | Error prob. in w. |
|---|---|---|---|---|---|
| 1825, 56 | 14 | 3″, 985 | 0″, 021 | 148°, 14 | 0°, 23 |
| 1827, 02 | 2 | 4, 375 | 0, 057 | 145, 15 | 0, 55 |
| 1828, 71 | 4 | 4, 782 | 0, 040 | 140, 21 | 0, 73 |
| 1829, 59 | 6 | 5, 087 | 0, 033 | 133, 07 | 0, 27 |
| 1830, 35 | 2 | 5, 310 | 0, 057 | 135, 75 | 0, 45 |
| 1831, 68 | 5 | 5, 410 | 0, 036 | 134, 71 | 0, 28 |
| 1832, 76 | 2 | 5, 572 | 0, 046 | 133, 77 | 0, 35 |

Ex comparatis positionibus extremis, motus est in $r$ annuus = + 0″, 218, in $w$ vero = − 1°,98. Quibus usus sum quantitatibus ad singulorum dierum observationes cum 7 mediis comparandas.

## 2280. 100 HERCULIS.

*Utraque* (6), *alba subviridis. Aequales. Australis fortasse paululo minor.*

| Epocha. | | | Amplificatio. | Distantia = r. | Numerus mensur. | Angulus = w. | Differentiae a medio. | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | | | | | | | dr | dw | r·dw |
| 1830. | Octbr. | 28 | 600 | 13″, 86 | 2 | 183°, 00 | + 0″, 01 | + 0°, 12 | + 0″, 03 |
| | Nov. | 10* | 480 | 13, 78 | 1 | 183, 05 | — 0, 07 | + 0, 17 | + 0, 04 |
| 1831. | Sept. | 7* | 480 | 13, 90 | 2 | 183, 25 | + 0, 05 | + 0, 37 | + 0, 09 |
| | Nov. | 28* | 480 | 13, 78 | 2 | 183, 35 | — 0, 07 | + 0, 47 | + 0, 11 |
| 1832. | Jul. | 9* | 480 | 13, 78 | 2 | 181, 95 | — 0, 07 | — 0, 93 | — 0, 22 |
| | — | 11* | 480 | 13, 98 | 2 | 182, 67 | + 0, 13 | — 0, 21 | — 0, 05 |

Medium pro 1831,72 13″,847 182°, 88
Error probabilis = 0″,033 0°, 10

## 2382. ε LYRAE.

*Major* (4, 5) *alba subviridis, minor* (6, 7) *caerulea.*

| Epocha. | | | Amplificatio. | Distantia = r. | Numerus mensur. | Angulus = w. | Differentiae a medio. | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | | | | | | | dr. | dw. | r·dw. |
| 1828. | Sept. | 21 | 480 | 2″, 95 | 1 | 24°, 2 | — 0″, 08 | — 1°, 86 | — 0″, 10 |
| 1830. | Nov. | 30 | 480 | 3, 12 | 2 | 27, 5 | + 0, 09 | + 1, 44 | + 0, 08 |
| | Dec. | 26 | 600 | 3, 14 | 3 | 27, 0 | + 0, 11 | + 0, 44 | + 0, 05 |
| 1831. | — | 19 | 600 | 3, 09 | 3 | 25, 5 | + 0, 06 | — 0, 56 | — 0, 03 |
| 1832. | Jun. | 30* | 600 | 3, 00 | 3 | 25, 7 | — 0, 03 | — 0, 36 | — 0, 02 |
| | Jul. | 3* | 600 | 2, 99 | 2 | 26, 3 | — 0, 04 | + 0, 24 | + 0, 01 |
| | — | 9* | 600 | 2, 95 | 2 | 26, 2 | — 0, 08 | + 0, 14 | + 0, 01 |

Medium pro 1831, 45 3″, 034 26°, 06
Error probabilis = 0″, 030 0°, 42

## 2383. 5 Lyrae.

*Major* (5), *minor* (5, 6), *egregie albae.*

| Epocha. | | | Amplificatio | Distantia $= r$. | Numerus mensur. | Angulus $= w$. | Differentiae a medio. $dr$. | $dw$. | $r \cdot dw$. |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 1828. | Sept. | 21 | 480 | 2″, 50 | 1 | 159°, 6 | — 0″, 07 | + 3°, 43 | + 0″, 16 |
| 1830. | Nov. | 30 | 480 | 2, 66 | 1 | 153, 2 | + 0, 09 | — 2, 15 | — 0, 10 |
| | Dec. | 26 | 600 | 2, 70 | 3 | 155, 1 | + 0, 13 | — 0, 25 | — 0, 01 |
| 1831. | — | 19 | 600 | 2, 69 | 3 | 156, 3 | + 0, 12 | + 1, 31 | + 0, 06 |
| 1832. | Jun. | 30* | 600 | 2, 46 | 4 | 154, 8 | — 0, 11 | — 0, 02 | 0, 00 |
| | Jul. | 3* | 600 | 2, 50 | 3 | 154,15 | — 0, 07 | — 0, 63 | — 0, 03 |
| | — | 9* | 600 | 2, 48 | 2 | 153,05 | — 0, 09 | — 1, 73 | — 0, 08 |
| Medium pro 1831, 45 | | | | 2″, 570 | | 155°, 17 | | | |
| Error probabilis | | | | = 0″, 030 | | 0°, 50 | | | |

Ex comparatione observationis Herschelianae motus angularis in 51, 62 annis reperitur — 18°,30 seu quotannis — 0°, 354. Singulos angulos ideo contuli cum formula $w = 155°, 17 - (t - 1831, 45)\ 0, 354$. Suspicor et distantiam diminui.

## 2417. ϑ Serpentis.

*Major* (4) *subflava*, *minor* (4, 5) *flavior.*

| Epocha. | | | Amplificatio. | Distantia $= r$. | Numerus mensur. | Angulus $= w$. | Differentiae a medio. $dr$. | $dw$. | $r \cdot dw$. |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 1825. | Oct. | 3* | 320 | 21″, 73 | 3 | 103°,83 | + 0″, 08 | — 0°, 02 | — 0″, 01 |
| | — | 24 | 480 | 21, 64 | 2 | 103,73 | — 0, 01 | — 0, 12 | — 0, 04 |
| 1828. | — | 29* | 320 | 21, 50 | 5 | 103,90 | — 0, 15 | + 0, 05 | + 0, 02 |
| 1829. | — | 25* | 480 | 21, 82 | 1 | 104,20 | + 0, 17 | + 0, 35 | + 0, 12 |
| 1831. | — | 18* | 320 | 21, 25 | 2 | 103,60 | — 0, 40 | — 0, 25 | — 0, 09 |
| 1832. | — | 4 | 480 | 21, 70 | 3 | 103,80 | + 0, 05 | — 0, 05 | — 0, 02 |
| | — | 15 | 480 | 21, 86 | 2 | 103,80 | + 0, 21 | — 0, 05 | — 0, 02 |
| | — | 24* | 480 | 21, 68 | 3 | 103,90 | + 0, 03 | + 0, 05 | + 0, 02 |
| Medium pro 1830, 05 | | | | 21″, 647 | | 103°,85 | | | |
| Error probabilis | | | | = 0″, 028 | | 0°,06 | | | |

### β Cygni.

*Major (3) flava, minor (5, 6) caerulea.*

| Epocha | | | Amplificatio. | Distantia = r. | Numerus mensur. | Angulus = w. | Differentiae a medio. dr. | dw. | r·dw. |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 1831. | Aug. | 11* | 480 | 34″, 36 | 3 | 55°, 90 | + 0″, 07 | + 0°, 15 | + 0″, 09 |
| | Sept. | 8* | 320 | 34, 32 | 1 | 55, 63 | + 0, 03 | — 0, 12 | — 0, 07 |
| | — | 23* | 320 | 34, 25 | 2 | 55, 71 | — 0, 04 | — 0, 04 | — 0, 02 |
| 1832. | Oct. | 7* | 320 | 34, 29 | 3 | 55, 65 | 0, 00 | — 0, 10 | — 0, 06 |
| | — | 15* | 320 | 34, 24 | 2 | 55, 85 | — 0, 05 | + 0, 10 | + 0, 06 |

Medium pro 1832, 12 34″, 292 55°, 75
Error probabilis = 0″, 036 0°, 04

### 2583. π Aquilae.

*Major (6), minor (7); subflavae.*

| Epocha. | | | Amplificatio. | Distantia = r. | Numerus mensur. | Angulus = w. | Differentiae a medio. dr. | dw. | r·dw. |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 1825. | Sept. | 17 | 600 | 1″, 64 | 2 | 120°, 7 | + 0″, 14 | — 0°, 1 | 0″, 00 |
| | Oct. | 6 | 600 | 1, 45 | 2 | 123, 0 | — 0, 05 | + 2, 2 | + 0, 06 |
| 1830. | Nov. | 10 | 600 | 1, 37 | 3 | 121, 3 | — 0, 13 | + 0, 5 | + 0, 01 |
| 1831. | — | 28* | 600 | 1, 53 | 4 | 119, 4 | + 0, 03 | — 1, 4 | — 0, 04 |
| 1832. | Oct. | 3 | 800 | 1, 56 | 3 | 118, 7 | + 0, 06 | — 2, 1 | — 0, 05 |
| | — | 20 | 800 | 1, 46 | 2 | 121, 4 | — 0, 04 | + 0, 7 | + 0, 02 |

Medium pro 1829, 97 1″, 502 120°, 75
Error probabilis = 0″, 033 0°, 92

### 2727. γ Delphini.

*Major (4) aurea, minor (5) viridicaerulea.*

| Epocha | | | Amplificatio | Distantia = r. | Numerus mensur. | Angulus = w. | Differentiae a medio. dr | dw | r·dw. |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 1828. | Sept. | 26 | 320 | 11″, 76 | 1 | 273°, 9 | — 0″, 14 | + 0°, 14 | + 0″, 03 |
| 1830. | Nov. | 10 | 480 | 11, 96 | 5 | 274, 0 | + 0, 06 | + 0, 24 | + 0, 05 |
| | Dec. | 4* | 480 | 12, 09 | 4 | 273, 3 | + 0, 19 | — 0, 46 | — 0, 09 |
| 1831. | Nov. | 28 | 600 | 11, 90 | 2 | 273, 6 | 0, 00 | — 0, 16 | — 0, 03 |
| 1832. | Jan. | 7 | 320 | 11, 81 | 2 | 274, 0 | — 0, 09 | + 0, 24 | + 0, 05 |

Medium pro 1830, 89 11″, 904 273°, 76
Error probabilis = 0″, 036 0°, 13

## 2758. 61 Cygni.

*Major* (5, 6) *flava, minor* (6) *certo flavior.*

| Epocha. | | | Amplificatio. | Distantia = *r*. | Numerus mensur. | Angulus = *w*. | Differentiae a medio. | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | | | | | | | *dr.* | *dw.* | *r·dw.* |
| 1828. | Sept. | 22 | 480 | 15″, 31 | 1 | 89°, 40 | — 0″, 14 | + 0°, 13 | + 0″, 04 |
| 1831. | Aug. | 14 | 480 | 15, 50 | 4 | 91, 10 | — 0, 12 | — 0, 09 | — 0, 03 |
| | Sept. | 8 | 320 | 15, 61 | 2 | 91, 18 | — 0, 01 | — 0, 06 | — 0, 02 |
| | — | 23* | 480 | 15, 76 | 3 | 91, 08 | + 0, 14 | — 0, 18 | — 0, 05 |
| | Oct. | 10* | 480 | 15, 66 | 2 | 91, 30 | + 0, 03 | — 0, 01 | 0, 00 |
| 1832. | — | 7* | 480 | 15, 79 | 2 | 92, 20 | + 0, 10 | + 0, 25 | + 0, 07 |
| Medium pro 1831, 38 | | | | 15″, 605 | | 91°, 04 | | | |
| Error probabilis = | | | | 0″, 033 | | 0°, 10 | | | |

Observationes aliae his priores nobis etiam duas relationes inter has stellas offerunt. Ex 16 culminationibus tum per tubum Dollondinum octipedem tum per tubum circuli meridiani Reichenbachiani institutis inveneram pro 1820, 51 epocha differentiam in $AR = + 1'', 268$, unde per angulum quem 1819, 92 inveneram per micrometrum filare $w = 83°, 0$, distantia $r = 15'', 11$ sequitur. Altera mensura est per tubum 5 pedum filari micrometro instructum Fraunhoferiano. Quae composita ita se habent.

| | Epocha. | Distantia = *r*. | Angulus = *w*. |
|---|---|---|---|
| | 1819, 92 | | 83°, 0 |
| | 1820, 51 | 15″, 11 | |
| | 1822, 72 | 14, 93 | 85, 8 |
| Medium pro | 1821, 61 | 15″, 02 | 84°, 69 |

Hac relatione collata cum superiore motus fit in 9,77 annis $\Delta r = + 0'', 585$ et $dw = + 6°, 35$. Singulas mensuras contuli cum formulis:

$$r = 15'', 605 + (t - 1831, 38)\ 0'', 060$$
$$w = 91°,\ 04 + (t - 1831, 38)\ 0°, 650.$$

## 2806. β Cephei.

*Major* (3) *albasubviridis*, *minor* (8) *caerulea.*

| Epocha. | Amplificatio | Distantia = r. | Numerus mensur. | Angulus = w. | Differentiae a medio. dr. | dw. | r·dw. |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 1831. Dec. 22 | 320 | 13″, 36 | 2 | 250°, 8 | — 0″, 21 | + 0°, 77 | + 0″, 18 |
| 1832. Febr. 22 | 480 | 13, 34 | 2 | 249, 6 | — 0, 23 | — 0, 43 | — 0, 10 |
| April. 10 | 320 | 13, 90 | 4 | 250, 7 | + 0, 33 | + 0, 67 | + 0, 16 |
| — 14 | 480 | 13, 58 | 5 | 250, 2 | + 0, 01 | + 0, 17 | + 0, 04 |
| — 17 | 480 | 13, 75 | 3 | 249,95 | + 0, 18 | — 0, 08 | — 0, 02 |
| Jun. 4* | 320 | 13, 57 | 2 | 249, 6 | 0, 00 | — 0, 43 | — 0, 10 |
| — 6* | 320 | 13, 52 | 3 | 249,35 | — 0, 05 | — 0, 68 | — 0, 17 |
| Medium pro 1832, 26 | | 13″, 574 | | 250°, 03 | | | |
| Error probabilis | | = 0″, 030 | | 0°, 09 | | | |

## 2909. ζ Aquarii.

*Utraque* (4). *Albae subviridcs. Borealis paululo minor.*

| Epocha. | Amplificatio. | Distantia = r. | Numerus mensur. | Angulus = w. | Differentiae a medio. dr. | dw. | r·dw. |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 1825. Sept. 16 | 480 | 3″, 67 | 3 | 359°, 75 | + 0″, 17 | + 0°, 93 | + 0″, 06 |
| Oct. 5 | 480 | 3, 53 | 2 | 359, 95 | + 0, 03 | + 1, 16 | + 0, 07 |
| 1832. — 15 | 600 | 3, 35 | 3 | 356, 0 | — 0, 15 | + 0, 29 | + 0, 02 |
| — 20 | 480 | 3, 48 | 4 | 355, 5 | — 0, 02 | — 0, 21 | — 0, 01 |
| — 25 | 480 | 3, 56 | 3 | 354, 9 | + 0, 06 | — 0, 80 | — 0, 05 |
| — 26 | 480 | 3, 47 | 3 | 355, 25 | — 0, 03 | — 0, 55 | — 0, 03 |
| Nov. 7 | 600 | 3, 43 | 3 | 354, 8 | — 0, 07 | — 0, 89 | — 0, 05 |
| Medium pro 1830, 79 | | 3″, 499 | | 356°, 59 | | | |
| Error probabilis | | 0″, 030 | | 0°, 37 | | | |

Distantiam diminui probabile est. Singulos angulos contuli cum formula $w = 356°, 59 - (t - 1830{,}79)\, 0°, 438$, motu angulari ex prima observatione Herschelii I deducto.

# MÉMOIRE

SUR

# L'INTÉGRATION DES FRACTIONS RATIONELLES;

PAR

M. OSTROGRADSKY.

---

(Lu le 22 Mars 1833.)

I. Soient $x$ et $y$ deux quantités variables, liées entr'elles par l'équation

(1) $$o = y^n + A_1 y^{n-1} + A_2 y^{n-2} + \cdots\cdots + A_{n-1} y + A_n\,;$$

dans laquelle $n$ est un nombre entier donné, et $A_1$, $A_2 \cdots A_{n-1}$, $A_n$ des fonctions entières de la variable $x$.

Désignons par $\mathrm{f}(x,y)$ et $F(x,y)$ deux fonctions entières de $x$ et de $y$, et examinons dans quel cas l'intégrale

$$z = \int \frac{\mathrm{f}(x,y)}{F(x,y)}\, dx$$

peut être exprimée par une fonction algébrique de $x$.

L'intégrale $z$ étant une fonction algébrique de $x$, elle sera donnée, dans le cas le plus général, par une équation algébrique

$$o = X z^m + X_1 z^{m-1} + \cdots\cdots + X_{m-1} z + X_m,$$

dans laquelle $m$ est un nombre entier, $X, X_1 \cdots X_{m-1}$, $X_m$ sont des fonctions entières de $x$, et qu'on peut supposer indécomposables en facteurs rationels d'un degré inférieur à $m$. En différentiant cette équation, on trouvera après avoir mis $\frac{\mathrm{f}(x,y)}{F(x,y)}$ pour $\frac{dz}{dx}$,

$$o = \frac{dX}{dx} F(x,y) z^m + \left[\frac{dX_1}{dx} F(x,y) + mX\mathrm{f}(x,y)\right] z^{m-1} + \cdots\cdots$$

$$+ \left[\frac{dX_{m-1}}{dx} F(x,y) + 2X_{m-2}\,\mathrm{f}(x,y)\right] z + \frac{dX_m}{dx} F(x,y) + X_{m-1}\,\mathrm{f}(x,y);$$

en sorte que $z$ satisfera à la fois à deux équations différentes du degré $m$, équations qui ne peuvent pas avoir des facteurs communs; par conséquent on pourra, comme on le sait par la théorie des équations, exprimer la quantité $z$ par une fonction rationelle des coëfficiens des deux équations auxquelles elle satisfait. C'est-à-dire, par une fonction rationelle de $x$ et de $y$; donc, si l'intégrale

$$\int \frac{\mathrm{f}(x,y)}{F(x,y)}\,dx$$

est algébrique, elle ne peut être qu'une fonction rationelle des variables $x$ et $y$.

Désignons par $\varphi(x,y)$ et $\Phi(x,y)$ deux fonctions entières de $x$ et de $y$, et considérons la fraction rationelle $\frac{\varphi(x,y)}{\Phi(x,y)}$; $y$ est une des racines de l'équation (1); représentons per $y_1$, $y_2 \cdots\cdots y_{n-1}$ les autres racines de la même équation, et donnons à la fraction $\frac{\varphi(x,y)}{\Phi(x,y)}$ la forme suivante:

$$\frac{\varphi(x,y)\;\Phi(x,y_1)\;\Phi(x,y_2)\cdots\cdots\Phi(x,y_{n-1})}{\Phi(x,y)\;\Phi(x,y_1)\;\Phi(x,y_2)\cdots\cdots\Phi(x,y_{n-1})}$$

laquelle forme revient à multiplier haut et bas de $\frac{\varphi(x,y)}{\Phi(x,y)}$ par $\Phi(x,y_1)\;\Phi(x,y_2)\cdots$ $\Phi(x,y_{n-1})$. Il est évident que le dénominateur de la fraction

$$\frac{\varphi(x,y)\;\Phi(x,y_1)\;\Phi(x,y_2)\cdots\cdots\Phi(x,y_{n-1})}{\Phi(x,y)\;\Phi(x,y_1)\;\Phi(x,y_2)\cdots\cdots\Phi(x,y_{n-1})}$$

est une fonction entière invariable des racines de l'équation (1). On peut le considérer comme une fonction entière des coëfficiens de l'équation (1), ou bien, comme une fonction entière de la variable $x$. Quant au numérateur $\varphi(x,y)\;\Phi(x,y_1)\;\Phi(x,y_2)$ $\cdots\cdots\Phi(x,y_{n-1})$, on y remarquera d'abord que le produit $\Phi(x,y_1)\;\Phi(x,y_2)\cdots\cdots$ $\Phi(x,y_{n-1})$ est une fonction entière invariable des racines $y_1$, $y_2 \cdots\cdots y_{n-1}$, qu'on peut, par les procédés connus, exprimer par une fonction entière $\Theta(x,y)$ de $x$ et de $y$; on en éliminera ensuite au moyen de l'équation (1) les puissances de $y$ su-

périeures à $n-1$, en sorte que le numérateur deviendra une fonction entière de $x$ et de $y$ du degré $n-1$ par rapport à la dernière veriable; il s'en suivra qu'une fraction rationelle $\frac{\varphi(x,y)}{\Phi(x,y)}$ est toujours réductible à la forme

$$\frac{X_1 y^{n-1}+X_2 y^{n-2}+\cdots+X_n}{Y},$$

$X_1, X_2 \cdots X_n, Y$ étant des fonctions entières de $x$.

Remplaçons en vertu de ce qui précède, la fraction $\frac{\mathfrak{f}(x,y)}{F(x,y)}$ par le quotient $\frac{F(x,y)}{M}$ de deux fonctions entières $F(x,y)$ et $M$, dont la première renferme la variable $x$ et les puissances de la variable $y$ jusqu'à la $(n-1)^{\text{me}}$ inclusivement, et dont la seconde ne renferme que $x$ seul *). Nous aurons à considérer l'intégrale $\int \frac{F(x,y)}{M} dx$, au lieu de $\int \frac{F(x,y)}{F(x,y)} dx$. La quantité $M$ et les coëfficients des puissances de $y$ dans $F(x,y)$ sont connus.

En supposant que la fonction $z=\int \frac{F(x,y)}{M} dx$ est algébrique, nous pouvons la représenter par

$$\frac{X_1 y^{n-1}+X_2 y^{n-2}+\cdots\cdots+X_n}{Y}$$

$X_1, X_2 \cdots X_n, Y$ étant des fonctions entières de $x$, en sorte que, si nous faisons pour abréger $X_1 y^{n-1}+X_2 y^{n-2}+\cdots\cdots+X_n=\varphi(x,y)$, nous aurons

$$\text{(2)} \qquad \frac{\varphi(x,y)}{Y}=\int \frac{F(x,y)}{M} dx;$$

de là, en différentiant

$$\text{(3)} \qquad \frac{Y\left[\varphi'(x)+\frac{dy}{dx}\varphi'(y)\right]-\frac{dY}{dx}\varphi(x,y)}{Y^2}=\frac{F(x,y)}{M}.$$

Or l'équation (1), que nous représenterons pour plus de simplicité par

$$\text{(1 bis)} \cdots\cdots o=f(x,y)$$

*) On aurait pu mettre simplement $y$ pour $\frac{\mathfrak{f}(x,y)}{F(x,y)}$, mais l'équation (1) en serait changée.

donne

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{f'(x)}{f'(y)};$$

mettant cette valeur dans la formule (3), nous obtiendrons l'équation

$$(4) \quad \frac{Y[f'(y)\,\varphi'(x) - f'(x)\,\varphi'(y)] - \frac{dY}{dx}\,f'(y)\,\varphi(x,y)}{Y^2} = \frac{F(x,y)\,f'(y)}{M},$$

qui servira à déterminer la fonction $Y$ et les coëfficiens $X_1$, $X_2 \ldots\ldots X_n$ des puissances de $y$ dans la fonction

$$\varphi(x,y) = X_1 y^{n-1} + X_2 y^{n-2} + \ldots\ldots + X_n.$$

Pour résoudre l'équation (4) il faut éliminer d'abord de son premier et second membres les puissances de $y$ supérieures à $n-1$. L'élimination se fera en effectuant la division de chaque membre, relativement à la quantité $y$, par $f(x,y)$, et en égalant les deux restes des divisions, on obtiendra une équation qui ne renfermera dans chaque membre que les puissances de $y$, inférieures à $n$. Ensuite, on égalera entr'eux les coëfficiens des mêmes puissances de $y$, et l'on cherchera à satisfaire aux équations ainsi obtenues au moyen de l'inconnue $Y$ et des coëfficiens $X_1$, $X_2 \ldots\ldots X_n$.

II. Supposons d'abord que la quantité $y$ soit donnée par une équation du premier degré, la fonction $F(x,y)$ deviendra fonction entière de $x$, en sorte qu'en faisant $F(x,y) = L$, nous aurons à intégrer la fraction rationelle

$$\int \frac{L}{M}\,dx.$$

Or, d'après ce qui précède, si l'intégrale $\int \frac{L}{M}\,dx$ est une fonction algébrique de $x$, hypothèse que nous allons examiner, cette fonction ne peut être qu'une fraction rationelle; donc, en désignant par $Q$, $X$, $Y$ trois fonctions entières de $x$, on peut supposer

$$(5) \qquad \int \frac{L}{M}\,dx = Q + \frac{X}{Y};$$

en même temps, on peut admettre que les fonctions $X$ et $Y$ n'ont point de diviseur commun, et que le degré de la fonction $X$ est inférieur à celui de la fonction $Y$.

En différentiant la dernière équation, on trouve

$$\frac{L}{M} = \frac{dQ}{dx} + \frac{Y\frac{dX}{dx} - X\frac{dY}{dx}}{Y^2}.$$

Extrayons, s'il y a lieu, la partie entière de la fraction $\frac{L}{M}$; soit

$$\frac{L}{M} = K + \frac{N}{M}$$

$K$ et $N$ étant respectivement le quotient et le reste de la division de $L$ par $M$; nous aurons

$$\frac{dQ}{dx} + \frac{Y\frac{dX}{dx} - X\frac{dY}{dx}}{Y^2} = K + \frac{N}{M}.$$

En égalant, comme on le doit, les parties entières et les fractions, on trouve

$$\frac{dQ}{dx} = K$$

(6) $$\frac{Y\frac{dX}{dx} - X\frac{dY}{dx}}{Y^2} = \frac{N}{M};$$

la première de ces deux équations donne sur le champ la valeur de $Q = \int K dx$, ensorte que l'équation (5) deviendra

(7) $$\int \frac{L}{M}\, dx = \int K dx + \frac{X}{Y},$$

les fonctions $X$ et $Y$ doivent être déterminées, s'il est possible, au moyen de l'équation (6). Nous allons nous occuper de cette détermination.

Nous remarquerons d'abord que dans le premier membre de l'équation (6) le degré du numérateur est au moins de deux unités inférieur à celui du dénominateur; donc, si le degré de la fonction $N$ est inférieur à celui de la fonction $M$ seulement d'une unité, toute recherche ultérieure est inutile, l'équation (6) est impossible, et l'intégrale $\int \frac{N}{M}\, dx$ n'est pas une fonction algébrique de $x$. Ainsi l'intégrale $z = \int \frac{dx}{x}$ ne peut être exprimée par aucune fonction algébrique de $x$, c'est-à-dire, il est impossible que $z$ puisse être racine d'aucune équation algébrique, dont les coëfficiens soient fonctions algébriques de $x$.

Nous admettrons ensuite que les fonctions $N$ et $M$ n'ont point de diviseur commun, car si elles en avaient un, il serait facile de le trouver, et de réduire, en le supprimant, la fraction $\frac{N}{M}$ à sa plus simple expression. Admettons que cette opération, si on en avait besoin, est déjà faite, et que la fraction $\frac{N}{M}$ est irréductible. Voyons si l'on peut réduire la fraction

$$\frac{Y\frac{dX}{dx} - X\frac{dY}{dx}}{Y^2} = \frac{1}{Y}\left(\frac{dX}{dx} - \frac{X\frac{dY}{dx}}{Y}\right).$$

Il est évident que la fraction $\frac{X\frac{dY}{dx}}{Y}$ ne se réduit que dans le cas où $Y$ et $\frac{dY}{dx}$ auraient un facteur commun $Y_1$; ce cas comprenant d'ailleurs celui de $Y$ et $\frac{dY}{dx}$ premiers entr'eux, nous ferons:

$$Y = SY_1$$
$$\frac{dY}{dx} = TY_1,$$

$S$ et $T$ sont fonctions de $x$, n'ayant point de facteurs communs; nous aurons

$$\frac{dX}{dx} - \frac{X\frac{dY}{dx}}{Y} = \frac{dX}{dx} - \frac{TX}{S};$$

la fraction $\frac{TX}{S}$ étant irréductible, celle-ci $\frac{S\frac{dX}{dx} - TX}{S}$ le sera évidemment, en sorte que la fonction $S\frac{dX}{dx} - TX$ n'aura point de facteurs communs avec $S$; elle n'en aura donc pas non plus avec $\varrho Y$, par conséquent la fraction

$$\frac{S\frac{dX}{dx} - TX}{SY}$$

est irréductible.

Substituons dans (6) pour $\frac{Y\frac{dX}{dx} - X\frac{dY}{dx}}{Y^2}$ sa valeur $\frac{S\frac{dX}{dx} - TX,}{SY}$ nous obtiendrons l'équation

$$\frac{S\frac{dX}{dx} - TX}{SY} = \frac{N}{M},$$

dont les deux membres sont des fonctions irréductibles; par cette raison nous pouvons poser, à un facteur constant près, facteur qu'on peut aussi se dispenser de considérer

$$(8) \qquad \left\{ \begin{array}{l} S\frac{dX}{dx} - TX = N \\ SY = M \end{array} \right.$$

il est visible, par la dernière des équations (8) que $Y$ est le plus grand commun diviseur de $M$ et de $\frac{dM}{dx}$; ainsi, pour déterminer le dénominateur $Y$ de l'intégrale $\frac{X}{Y}$, il n'y a qu'à chercher le plus grand commun diviseur entre $M$ et $\frac{dM}{dx}$; s'il arrivait que $M$ et $\frac{dM}{dx}$ n'eussent point de facteurs communs, on en concluerait avec certitude que l'intégrale $\int \frac{N}{M} dx$ est impossible algébriquement. Il est certain, par exemple, que l'intégrale $\int \frac{dx}{1+x^2}$ n'est pas une fonction algébrique de $x$, car le dénominateur $1+x^2$ et sa dérivée $2x$ n'ont point de facteurs communs.

Ayant trouvé le plus grand commun diviseur $Y$ entre $M$ et $\frac{dM}{dx}$, on divisera $M$ par $Y$, et l'on trouvera la fonction $S$; en divisant $Y$ par $S$, et il faut que la division puisse se faire, sans quoi l'intégrale $\int \frac{N}{M} dx$ n'est pas algébrique, on trouvera $Y_1$; en divisant enfin $\frac{dY}{dx}$ par $Y_1$, on trouvera $T$; au reste cette dernière fonction peut être déterminée de la manière suivante: ayant trouvé $Y$, qu'on divise $M$ et $\frac{dM}{dx}$ par cette fonction $Y$, on trouvera les quotiens $S$ et $U$ tels que

$$M = SY$$
$$\frac{dM}{dx} = UY;$$

la première de ces équations donne

$$\frac{dM}{dx} = \frac{dS}{dx} Y + S \frac{dY}{dx};$$

or

$$S \frac{dY}{dx} = TY$$

donc

$$\frac{dM}{dx} = \left(\frac{dS}{dx} + T\right) Y = UY$$

par conséquent

$$T = U - \frac{dS}{dx}.$$

III. Les fonctions $Y$, $S$ et $T$ étant connues, procédons à la détermination de la fonction $X$ au moyen de l'équation

(8 bis) $$S \frac{dX}{dx} - TX = N,$$

dans laquelle $S$ n'a point de facteurs communs avec $T$ ni avec $N$.

Désignons par $n$ le degré de la fonction $Y$, par $m$ celui de la fonction $S$ et par $k$ celui de la fonction $N$; le degré de la fonction $T$ sera $m - 1$. Soit $n'$ celui de l'inconnue $X$; $n'$ ne peut pas être plus grand que $n-1$, ni plus petit que $k-m+1$.

Le degré de la fonction $Y \frac{dX}{dx} - \frac{dY}{dx} X = \left(S \frac{dX}{dx} - TX\right) Y_1$ sera toujours, comme il est facile de le voir, $n + n' - 1$, jamais plus petit; or le degré de la fonction $Y_1$ étant $n - m$, celui de $S \frac{dX}{dx} - TX = N$ doit être $n' + m - 1$, jamais plus petit; donc $n' + m - 1 = k$, d'où $n' = k - m + 1$. S'il arrive que $k - m + 1$ est une quantité négative, on doit en conclure que l'intégrale $\int \frac{N}{M} dx$ n'est pas une fonction algébrique de $x$.

Connaissant le degré $n'$ de la fonction $X$, on peut la déterminer par la méthode des coëfficiens indéterminés; mais cette méthode exigerait, pour peu que le degré $n'$ soit élevé, de longs calculs qu'on peut éviter en employant le procédé que nous allons développer.

Supposons

$$X = SX_1 + r_1$$
$$\frac{dX}{dx} = T\lambda + \varrho_1;$$

$X_1$ et $r_1$ sont le quotient et le reste de la division de $X$ par $S$, $\lambda$ et $\varrho_1$ sont le quotient et le reste de la division de $\frac{dX}{dx}$ par $T$; l'équation (8 bis) deviendra

$$ST(\lambda - X_1) + S\varrho_1 - Tr_1 = N.$$

Désignons par $K_1$ et $R_1$ le quotient et le reste de la division de $N$ par $ST$, ensorte que

$$N = K_1 ST + R_1;$$

nous aurons évidemment

$$\lambda = K_1 + X_1$$
$$S\varrho_1 - Tr_1 = R_1$$

par conséquent

$$(9) \qquad \left\{ \begin{aligned} X &= SX_1 + r_1 \\ \frac{dX}{dx} &= TX_1 + TK_1 + \varrho_1. \end{aligned} \right.$$

La détermination de la fonction $X$ se réduit à la détermination des fonctions $r_1$ et $X_1$, lesquelles lui sont inférieures en degré. Or, pour trouver $X_1$, il est nécessaire de connaître $\varrho_1$, c'est pourquoi nous allons procéder à la détermination de $r_1$ et de $\varrho_1$ d'après l'équation

$$(10) \qquad S\varrho_1 - Tr_1 = R_1.$$

Convertissons en fraction continue le quotient $\frac{S}{T}$; soient

$$\mu_1 S = q_1 T + z_1$$
$$\mu_2 T = q_2 z_1 + z_2$$
$$\mu_3 z_1 = q_3 z_2 + z_3$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$
$$\mu_{i-1} z_{i-3} = q_{i-1} z_{i-2} + z_{i-1}$$
$$\mu_i z_{i-2} = q_i z_{i-1}$$

$\mu_1$, $\mu_2 \cdots \mu_i$ sont les facteurs numériques qu'il faut employer pour opérer, sans fractions, la division. Nous aurons

$$\frac{\mu_1 S}{T} = q_1 + \cfrac{\mu_2}{q_2 + \cfrac{\mu_3}{q_3 + \cdots + \cfrac{\mu_{i-1}}{q_{i-1} + \cfrac{\mu_i}{q_i}}}}.$$

Faisons pour un moment

$$\frac{S_i}{T_i} = q_1 + \cfrac{\mu_2}{q_2 + \cfrac{\mu_3}{q_3 + \cdots + \cfrac{\mu_{i-1}}{q_{i-1} + \cfrac{\mu_i}{q_i}}}},$$

$$\frac{S_{i-1}}{T_{i-1}} = q_1 + \cfrac{\mu_2}{q_2 + \cfrac{\mu_3}{q_3 + \cdots + \cfrac{\mu_{i-1}}{q_{i-1}}}}$$

et supposons qu'en convertissant la dernière fraction continue en fraction ordinaire l'on trouve

$$(a) \qquad \frac{S_{i-1}}{T_{i-1}} = \frac{P_{i-1}\, q_{i-1} + P'_{i-1}}{Q_{i-1}\, q_{i-1} + Q'_{i-1}},$$

en sorte que

$$S_{i-1} = P_{i-1}\, q_{i-1} + P'_{i-1}$$
$$T_{i-1} = Q_{i-1}\, q_{i-1} + Q'_{i-1},$$

$P_{i-1}$, $P'_{i-1}$, $Q_{i-1}$, $Q'_{i-1}$ sont des quantités qui ne renferment pas $q_{i-1}$.

En changeant $i$ en $i+1$, on aura

$$S_i = P_i q_i + P'_i$$
$$T_i = Q_i q_i + Q'_i;$$

d'un autre côté, si l'on remplace dans l'équation $(a)$ $q_{i-1}$ par $q_{i-1} + \frac{\mu_i}{q_i}$, on trouvera

$$\frac{S_i}{T_i} = \frac{(P_{i-1}\, q_{i-1} + P'_{i-1})\, q_i + P_{i-1}\, \mu_i}{(Q_{i-1}\, q_{i-1} + Q'_{i-1})\, q_i + Q_{i-1}\, \mu_i},$$

donc

$$S_i = (P_{i-1}\, q_{i-1} + P'_{i-1})\, q_i + P_{i-1}\, \mu_i$$
$$T_i = (Q_{i-1}\, q_{i-1} + Q'_{i-1})\, q_i + Q_{i-1}\, \mu_i.$$

La comparaison de ces dernières expressions des quantités $S_i$ et $T_i$ avec leurs valeurs précédentes, donnera

$$P_i = P_{i-1}\, q_{i-1} + P'_{i-1} = S_{i-1},\quad P'_i = P_{i-1}\, \mu_i = S_{i-2}\, \mu_i$$
$$Q_i = Q_{i-1}\, q_{i-1} + Q'_{i-1} = T_{i-1},\quad Q'_i = Q_{i-1}\, \mu_i = T_{i-2}\, \mu_i:$$

donc

$$S_i = S_{i-1}\, q_i + S_{i-2}\, \mu_i$$
$$T_i = T_{i-1}\, q_i + T_{i-2}\, \mu_i.$$

En éliminant $q_i$ de ces deux équations, on trouve

$$S_i T_{i-1} - T_i S_{i-1} = -(S_{i-1}\, T_{i-2} - T_{i-1}\, S_{i-2})\, \mu_i.$$

Soit, pour abréger,

$$S_i\, T_{i-1} - T_i\, S_{i-1} = y_i,$$

nous aurons

$$y_i = -y_{i-1}\, \mu_i$$

en changeant $i$ en $i-1$, $i-2$, $i-3$, et ainsi de suite, on trouve

$$y_i \quad = -y_{i-1}\, \mu_i$$
$$y_{i-1} = -y_{i-2}\, \mu_{i-1}$$
$$y_{i-2} = -y_{i-3}\, \mu_{i-2}$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots$$
$$y_3 = -y_2\, \mu_3$$

de là

$$y_i = (-1)^i y_2\, \mu_3\, \mu_4 \cdots \mu_i;$$

or,

$$y_2 = S_2 T_1 - T_2 S_1, \quad S_2 = q_1 q_2 + \mu_2, \quad T_2 = q_2$$

$$S_1 = q_1, \quad T_1 = 1 \quad \text{donc } y_2 = \mu_2, \quad \text{et par suite}$$

$$S_i T_{i-1} - T_i S_{i-1} = (-1)^i \mu_2 \mu_3 \cdots \mu_i,$$

ou bien, en mettant pour $S_i$ sa valeur $\mu_1 S$ et pour $T_i$ la quantité $T$

$$S\mu_1 T_{i-1} - T S_{i-1} = (-1)^i \mu_2 \mu_3 \cdots \mu_i;$$

multipliant par $\frac{(-1)^i R_1}{\mu_2 \mu_3 \cdots \mu_i}$, on trouve

$$S \frac{(-1)^i \mu_1 R_1 T_{i-1}}{\mu_2 \mu_3 \cdots \mu_i} - T \frac{(-1)^i R_1 S_{i-1}}{\mu_2 \mu_3 \cdots \mu_i} = R_1,$$

en sorte, qu'en substituant dans l'équation (10) pour $\rho_1$ et $r_1$ respectivement $\frac{(-1)^i \mu_1 R_1 T_{i-1}}{\mu_2 \mu_3 \cdots \mu_i}$ et $\frac{(-1)^i R_1 S_{i-1}}{\mu_2 \mu_3 \cdots \mu_i}$, on satisfera à cette équation. On y satisfera évidemment encore en mettant pour $\rho_1$ le reste de la division de $\frac{(-1)^i \mu_1 R_1 T_{i-1}}{\mu_2 \mu_3 \cdots \mu_i}$, par $T$, et pour $r_1$ le reste de la division de $\frac{(-1)^i R_1 S_{i-1}}{\mu_2 \mu_3 \cdots \mu_i}$ par $S$. Ces deux restes sont respectivement les véritables valeurs de $\rho_1$ et $r_1$.

Nous remarquerons que le reste de la division de $\frac{(-1)^i R_1 S_{i-1}}{\mu_2 \mu_3 \cdots \mu_i}$ par $S$ représenterait la valeur de la fonction $X$, si le degré $n'$ de cette fonction était inférieur à $m$, et comme l'on trouverait en même temps $\frac{dX}{dx} = \rho_1$, il s'en suivrait l'équation de condition

$$\rho_1 = \frac{dr_1}{dx},$$

sans laquelle l'intégrale $\int \frac{N}{M} dx$ ne serait pas possible algébriquement.

IV. Ayant trouvé les quantités $r_1$ et $\rho_1$, cherchons la valeur du quotient $X_1$ de la division de $X$ par $S$; le degré de ce quotient est inférieur de $m$ unités à celui de $X$.

Éliminons $X$ des équations (9); nous aurons

$$(11) \qquad S \frac{dX_1}{dx} - \left(T - \frac{dS}{dx}\right) X_1 = TK_1 + \rho_1 - \frac{dr_1}{dx}.$$

Cette équation est semblable à celle qu'on a eue pour $X$; seulement on n'est pas assuré que $S$ et $T - \frac{dS}{dx}$ n'ont pas de facteurs communs. Il faut, avant tout, chercher le plus grand commun diviseur entre $S$ et $T - \frac{dS}{dx}$; s'il en existe un, il faudra le supprimer dans l'équation (11), ce qui exige que la fonction $TK_1 + \varrho_1 - \frac{dr_1}{dx}$ soit divisible par ce diviseur, sans quoi l'équation (11) est impossible, et par suite l'intégrale $\int \frac{N}{M}\,dx$ n'est pas algébrique.

Admettons qu'on ait trouvé un diviseur $U$ commun à $S$ et $T - \frac{dS}{dx}$ et qui divise aussi $TK_1 + \varrho_1 - \frac{dr_1}{dx}$, et supposons qu'en supprimant ce diviseur, qui serait l'unité si $S$ et $T - \frac{dS}{dx}$ sont premiers entr'eux, de l'équation (11) on trouve

$$(12) \qquad S_1 \frac{dX_1}{dx} - T_1 X_1 = N_1.$$

Faisons

$$X_1 = S_1 X_2 + r_2$$
$$\frac{dX_1}{dx} = T_1 \lambda + \varrho_2$$
$$N_1 = S_1 T_1 K_2 + R_2$$

nous obtiendrons

$$\lambda = K_2 + X_2$$
$$S_1 \varrho_2 - T_1 r_2 = R_2$$

et par suite

$$(13) \qquad \left\{ \begin{array}{l} X_1 = S_1 X_2 + r_2 \\ \frac{dX_1}{dx} = T_1 X_2 + T_1 K_2 + \varrho_2; \end{array} \right.$$

on déterminera $r_2$ et $\varrho_2$ d'après l'équation

$$(14) \qquad S_1 \varrho_2 - T_1 r_2 = R_2,$$

comme on a déterminé $\varrho_1$ et $r_1$ au moyen de l'équation (10). On convertira en fraction continue le quotient $\frac{S_1}{T_1}$; pour cela on profitera du calcul qu'on a fait

pour trouver le plus grand commun diviseur entre $S$ et $T - \frac{dS}{dx}$. La conversion faite, on trouvera comme précédemment deux quantités $p$ et $q$ telles que

$$S_1 q - T_1 p = 1\,;$$

on fera ensuite $r_2 =$ au reste de la division de $pR_2$ par $S_1$, $\varrho_2 =$ au reste de la division de $qR_2$ par $T_1$. Ayant trouvé $r_1$ et $\varrho_1$, on éliminera $X_1$ des équations (13), et l'on obtiendra pour déterminer $X_2$ l'équation

$$(15) \qquad S_1 \frac{dX_2}{dx} - \left(T - \frac{dS_1}{dx}\right) X_2 = T_1 K_2 + \varrho_2 - \frac{dr_2}{dx}$$

que l'on traitera, comme on a traité l'équation (11), savoir, on cherchera le plus grand commun diviseur entre $S_1$ et $T_1 - \frac{dS_1}{dx}$. Désignons par $U$ ce diviseur; $U$ sera $= 1$, si $S_1$ et $T_1 - \frac{dS_1}{dx}$ sont premiers entr'eux; on divisera l'équation (15) par $U$; il faut que son second membre $T_1 K_2 + \varrho_2 - \frac{dr_2}{dx}$ soit, comme le premier, divisible par $U$, sans quoi l'équation est impossible. Supposons

$$\frac{S_1}{U} = S_2, \quad \frac{T_1 - \frac{dS_2}{dx}}{U} = T_2, \quad \frac{T_1 K_2 + \varrho_2 - \frac{dr_2}{dx}}{U} = N_2,$$

nous aurons

$$S_2 \frac{dX_2}{dx} - T_2 X_2 = N_2\,;$$

le degré de la fonction $X_2$ est inférieur à celui de la fonction $X_1$; on déterminera le reste $r_3$ de la division de $X_2$ par $S_2$, le quotient $X_3$ de cette division sera évidemment d'un degré moins élevé que $X_2$; l'on aura, comme tout à l'heure, pour déterminer $X_3$ l'équation

$$S_3 \frac{dX_3}{dx} - T_3 X_3 = N_3.$$

En continuant la même marche, on finira par arriver à l'équation

$$S_\nu \frac{dX_\nu}{dx} - T_\nu X_\nu = N_\nu,$$

dans laquelle le degré de $X_\nu$ est inférieur à celui de $S_\nu$, le degré de $N_\nu$ inférieur à celui du produit $S_\nu T_\nu$, et qu'on peut facilement résoudre.

En effet, il est facile de trouver, par la conversion en fraction continue du quotient $\frac{S_\nu}{T_\nu}$ ou autrement, deux quantités $p$ et $q$ telles, que

$$S_\nu q - T_\nu p = 1;$$

pour faciliter la réduction de $\frac{S_\nu}{T_\nu}$ en fraction continue, on profitera de l'opération qu'on a faite pour trouver le plus grand commun diviseur entre $S_{\nu-1}$ et $T_{\nu-1} - \frac{dS_{\nu-1}}{dx}$; après avoir trouvé $p$ et $q$, on fera

$$X_\nu = \text{au reste de la division de } pN_\nu \text{ par } S_\nu$$

$$\frac{dX_\nu}{dx} = \text{au reste de la division de } qN_\nu \text{ par } T_\nu;$$

il en résultera une équation de condition, savoir: la dérivée par rapport à $x$ du premier reste égale au second reste, laquelle équation doit être satisfaite, sans quoi l'intégrale $\int \frac{N}{M} dx$ ne sera pas une fonction algébrique de $x$.

Connaissant la valeur de $X_\nu$, il est facile de remonter à celle de $X$ au moyen des formules:

$$\begin{aligned} X_{\nu-1} &= S_{\nu-1} X_\nu + r_\nu \\ X_{\nu-2} &= S_{\nu-2} X_{\nu-1} + r_{\nu-1} \\ &\cdots\cdots\cdots\cdots \\ X_2 &= S_2 X_3 + r_3 \\ X_1 &= S_1 X_2 + r_2 \\ X &= S X_1 + r_1, \end{aligned}$$

qui donneront sur le champ

$$(17) \qquad \begin{aligned} X = {} & r_1 + Sr_2 + SS_1 r_3 + SS_1 S_2 r_4 + \cdots\cdots \\ & + SS_1 S_2 \cdots\cdots S_{\nu-2} r_\nu + SS_1 S_2 \cdots S_{\nu-1} X_\nu. \end{aligned}$$

V. Reprenons les équations:

$$Y = SY_1$$

$$\frac{dY}{dx} = TY_1;$$

l'élimination de $Y$ donne :

$$S\frac{dY_1}{dx} - \left(T - \frac{dS}{dx}\right)Y_1 = o.$$

En divisant cette équation par le plus grand commun diviseur entre $S$ et $T - \frac{dS}{dx}$, on trouve

$$(18) \qquad S_1\frac{dY_1}{dx} - T_1 Y_1 = o$$

d'où

$$(19) \qquad \begin{cases} Y_1 = S_1 Y_2 \\ \frac{dY_1}{dx} = T_1 Y_2. \end{cases}$$

Les équations (19) montrent que $S_1$ et $T_1$ sont respectivement les quotiens de la division de $Y_1$ et de $\frac{dY_1}{dx}$ par leur plus grand commun diviseur $Y_2$. L'élimination de $Y_1$ entre les équations (19), donne

$$S_1\frac{dY_2}{dx} - \left(T_1 - \frac{dS_1}{dx}\right)Y_2 = o,$$

ou bien, en divisant par le plus grand commun diviseur de $S_1$ et de $T_1 - \frac{dS_1}{dx}$,

$$(20) \qquad S_2\frac{dY_2}{dx} - T_2 Y_2 = o$$

de là

$$(21) \qquad \begin{cases} Y_2 = S_2 Y_3 \\ \frac{dY_2}{dx} = T_2 Y_3 \end{cases}$$

$Y_3$ étant le plus grand commun diviseur entre $Y_2$ et $\frac{dY_2}{dx}$.

En continuant de la même manière, on trouvera

$$Y_\nu = S_\nu Y_{\nu+1}$$
$$\frac{dY_\nu}{dx} = T_\nu Y_{\nu+1},$$

d'où l'on voit que la quantité $Y$ peut seule fournir les valeurs des fonctions $S_1$, $S_2$ ..... $S_\nu$ et celles des fonctions $T_1$, $T_2$ ..... $T_\nu$. Il est possible que $Y_{\nu+1}$ et $\frac{dY_{\nu+1}}{dx}$ aient aussi des facteurs communs, mais il est inutile de les chercher.

La décomposition de la quantité $Y$ en facteurs $S$, $S_1$, $S_2$, ..... $S_\nu$, $Y_{\nu+1}$ montre que l'on parviendra toujours à l'équation

$$S_\nu \frac{dX_\nu}{dx} - T_\nu X_\nu = N_\nu\,,$$

dans laquelle le degré de la fonction $X_\nu$ est inférieur à celui de $S_\nu$, car, comme la fonction $Y$ est supérieure en degré à la fonction $X$, on pourra toujours continuer la décomposition de $Y$ en facteurs $S$, $S_1$, $S_2$, $S_3$ .... jusqu'à ce que la somme des puissances de ces facteurs surpasse le degré de la fonction $X$.

Nous avons trouvé

$$(22)\qquad \left\{\begin{array}{ll} Y = S\,Y_1 & \frac{dY}{dx} = T\,Y_1 \\ Y_1 = S_1\,Y_2 & \frac{dY_1}{dx} = T_1\,Y_2 \\ Y_2 = S_2\,Y_3 & \frac{dY_2}{dx} = T_2\,Y_3 \\ \dots\dots\dots\dots & \dots\dots\dots\dots \\ Y_\nu = S_\nu\,Y_{\nu+1} & \frac{dY_\nu}{dx} = T_\nu\,Y_{\nu+1}\,; \end{array}\right.$$

il en résultera pour l'intégrale $\int \frac{N}{M}\,dx$ l'expression suivante:

$$(23)\qquad \int \frac{N}{M}\,dx = \frac{r_1}{Y} + \frac{r_2}{Y_1} + \frac{r_3}{Y_2} + \dots\dots + \frac{r_\nu}{Y_{\nu-1}} + \frac{X_\nu}{Y_\nu}\,,$$

les quantités $r_1$, $r_2$, $r_3$ .... $r_\nu$, $X_\nu$ sont les fonctions de $x$ les moins élevées en degré qui puissent satisfaire aux équations

$$\begin{array}{l} S\varrho_1 - Tr_1 = R_1 \\ S_1\varrho_2 - T_1 r_2 = R_2 \\ S_{\nu-1}\,\varrho_\nu - T_{\nu-1} r_\nu = R_\nu \\ \dots\dots\dots\dots\dots \\ S_\nu \frac{dX_\nu}{dx} - T_\nu X_\nu = N_\nu\,, \end{array}$$

dans lesquelles $R_1$, $R_2$ .... $R_\nu$ sont respectivement les restes des divisions de $N$ par $ST$, de $N_1$ par $S_1 T_1$ .... de $N_{\nu-1}$ par $S_{\nu-1}\,T_{\nu-1}$.

Pour trouver les fonctions $r_1$, $r_2 \cdots\cdots r_\nu$, $X_\nu$, on procèdera comme il suit.

On divisera $N$ par $ST$, $R_1$ sera le reste de la division, $K_1$ en sera le quotient; on cherchera au moyen des fractions continues deux quantités $p$ et $q$ telles que

$$Sq - Tp = 1,$$

et l'on fera $r_1 =$ au reste de la division de $R_1 p$ par $S$; on trouvera aussi le reste $\varrho_1$ de la division de $R_1 q$ par $T$. On cherchera le plus grand commun diviseur $U$ entre $S$ et $T - \frac{dS}{dx}$, et l'on fera

$$N_1 = \frac{K_1 T + \varrho_1 - \frac{dr_1}{dx}}{U}, \quad S_1 = \frac{S}{U}, \quad T_1 = \frac{T - \frac{dS}{dx}}{U};$$

on trouvera, par la conversion en fraction continue du quotient $\frac{S_1}{T_1}$, les quantités $p_1$ et $q_1$, telles que

$$S_1 q_1 - T_1 p_1 = 1;$$

on divisera $N_1$ par $S_1 T_1$; soient $K_2$ le quotient, et $R_2$ le reste de la division; l'on fera $r_1 =$ au reste de la division de $R_2 p_1$ par $S_1$; on trouvera aussi le reste $\varrho_2$ de la division de $R_2 q_1$ par $T_1$.

En continuant cette marche on trouvera successivement toutes les quantités $r_1$, $r_2 \cdots r_\nu$. Pour trouver $X_\nu$, on déterminera deux quantités $p_\nu$ et $q_\nu$, telles que

$$S_\nu q_\nu - T_\nu p_\nu = 1,$$

et l'on fera $X_\nu =$ au reste de la division de $N_\nu p_\nu$ par $S_\nu$.

On peut, en changeant un peu l'analyse précédente, la rendre plus facile à exécuter; il suffit, pour trouver $r_1$, de diviser $N$ par $S$; soient $\Theta$ le quotient et $P$ le reste de la division, et chercher les fonctions $p$ et $q$ satisfaisant à l'équation

$$Sq - Tp = 1;$$

on aura ensuite $r_1 =$ au reste de la division de $Pp$ par $S$; nous aurons besoin aussi du reste $\varrho_1$ de la division de $Pq$ par $T$; $\varrho_1$ n'est pas le même que le précédent.

Pour trouver $r_2$ on cherchera le plus grand commun diviseur $U$ entre $S$ et $T-\frac{dS}{dx}$; on fera

$$N_1 = \frac{\Theta+\rho_1-\frac{dr_1}{dx}}{U}, \quad S_1 = \frac{S}{U}, \quad T_1 = \frac{T-\frac{dS}{dx}}{U};$$

on cherchera, par la conversion en fraction continue, de $\frac{S_1}{T_1}$, les quantités $p_1$ et $q_1$, telles que

$$S_1 q_1 - T_1 p_1 = 1;$$

on divisera $N_1$ par $S_1$; soient $\Theta_1$ le quotient et $P_1$ le reste de la division; on aura $r_2 =$ au reste de $\frac{P_1 p_1}{S_1}$; on trouvera aussi le reste $\rho_2$ de $\frac{P_1 q_1}{T_1}$, reste dont on aura besoin; $\rho_2$ ne sera pas le même que le précédent.

Pour déterminer $r_3$ on cherchera le plus grand commun diviseur $U_1$ entre $S_1$ et $T_1-\frac{dS_1}{dx}$; on posera

$$N_2 = \frac{\Theta_1+\rho_2-\frac{dr_2}{dx}}{U_1}, \quad S_2 = \frac{S_1}{U_1}, \quad T_2 = \frac{T_1-\frac{dS_1}{dx}}{U_1},$$

on convertira $\frac{S_2}{T_2}$ en fraction continue, et on trouvera deux quantités $p_2$, $q_2$, telles que

$$S_2 q_2 - T_2 p_2 = 1;$$

on divisera $N_2$ par $S_2$, et l'on trouvera le reste $P_2$ et le quotient $\Theta_2$ de la division; on fera $r_3 =$ au reste de $\frac{P_2 p_2}{S_2}$; il faudra aussi trouver le reste $\rho_3$ de la division de $P_2 q_2$ par $T_2$; en continuant de la même manière, on finira par trouver toutes les quantités $r_1$, $r_2 \cdots\cdots r_\nu$ ainsi que la quantité $X_\nu$.

Les conditions de la possibilité du problème sont, outre celle qui est relative au dénominateur $Y$,

*

1°. Que toutes les fonctions

$$N_1 = \frac{\Theta + \varrho_1 - \frac{dr_1}{dx}}{U}$$

$$N_2 = \frac{\Theta_1 + \varrho_2 - \frac{dr_2}{dx}}{U_1}$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$N_\nu = \frac{\Theta_{\nu-1} + \varrho_\nu - \frac{dr_\nu}{dx}}{U_{\nu-1}}$$

soient entières.

2°. Que les valeurs de $X_\nu$ et $\frac{dX_\nu}{dx}$ données par l'équation

$$S_\nu \frac{dX_\nu}{dx} - T_\nu X_\nu = N_\nu$$

soient compatibles entr'elles.

VI. Ayant trouvé l'intégrale $\frac{X}{Y}$, on aura celle de la fonction proposée $\frac{L}{M}dx$ au moyen de l'équation (7), qui deviendra

$$(24)\quad \int \frac{L}{M}dx = \int Kdx + \frac{r_1}{Y} + \frac{r_2}{Y_1} + \frac{r_3}{Y_2} + \cdots\cdots + \frac{r_\nu}{Y_{\nu-1}} + \frac{X_\nu}{Y_\nu};$$

$K$ est le quotient de la division de $L$ par $M$, de sorte que

$$L = KM + N.$$

Si $K$ est nul, l'intégrale $\int Kdx$ se réduira à une constante arbitraire.

Dans la recherche de l'intégrale $\int \frac{N}{M}dx = \frac{X}{Y}$, nous avons supposé que le degré de la fonction $X$ est inférieur à celui de la fonction $Y$; on aurait pu admettre l'égalité entre les degrés de ces fonctions, l'opération s'effectuerait comme précédemment, à cette différence près, qu'au lieu d'arriver à l'équation

$$S_\nu \frac{dX_\nu}{dx} - T_\nu X_\nu = N_\nu$$

dans laquelle $X_\nu$ est inférieur en degré à $S_\nu$, on parviendrait à une équation semblable, mais dans laquelle $X_\nu$ serait égal en degré à $S_\nu$. La quantité $S_\nu$ serait le

dernier facteur de $Y$, en sorte qu'on aurait $Y_{\nu+1} = 1$, ce qui donnerait, en vertu des équations (22) $Y_\nu = S_\nu$, $\frac{dY_\nu}{dx} = T_\nu$, par conséquent $T_\nu = \frac{dS_\nu}{dx}$. Ainsi $X_\nu$ serait donné au moyen de l'équation

$$S_\nu \frac{dX_\nu}{dx} - \frac{dS_\nu}{dx} X_\nu = N_\nu.$$

Faisant

$$X_\nu = CS_\nu + r_{\nu+1}$$
$$\frac{dX_\nu}{dx} = \lambda \frac{dS_\nu}{dx} + \varrho_{\nu+1}$$

$C$ étant une constante, nous aurons

$$S_\nu T_\nu (\lambda - C) + S_\nu r_{\nu+1} - \frac{dS_\nu}{dx} \varrho_{\nu+1} = N_\nu,$$

$N_\nu$ étant inférieur en degré à $S_\nu T_\nu$, on trouverait $\lambda = C$; donc

$$X_\nu = CS_\nu + r_{\nu+1}$$
$$\frac{dX_\nu}{dx} = C \frac{dS_\nu}{dx} + \varrho_{\nu+1}$$
$$S_\nu r_{\nu+1} - \frac{dS_\nu}{dx} \varrho_{\nu+1} = N_\nu,$$

il en résulterait l'équation de condition $\frac{dr_{\nu+1}}{dx} = \varrho_{\nu+1}$, la constante $C$ resterait indéterminée; l'équation (23) deviendrait:

$$(25) \qquad \int \frac{N}{M} dx = \frac{r_1}{Y} + \frac{r_2}{Y_1} + \frac{r_3}{Y_2} + \cdots\cdots \frac{r_\nu}{Y_{\nu-1}} + \frac{r_{\nu+1}}{Y_\nu} + C.$$

On peut toujours dans la recherche de l'intégrale $\int \frac{N}{M} dx = \frac{X}{Y}$ supposer que le degré de $X$ est égal à celui de $Y$, car on peut toujours ajouter une constante $C$ à la fraction $\frac{X}{Y}$, ce qui réduirait cette fraction à $\frac{X + CY}{Y}$, et ferait, que le degré du numérateur serait égal à celui du dénominateur.

Quant à la fraction $\frac{L}{M}$, dans laquelle $L$ est supérieur en degré à $M$, ce qui serait le plus simple pour en trouver l'intégrale $\int \frac{L}{M} dx$, c'est d'en extraire la partie entière $K$ et de la réduire à la fraction $\frac{N}{M}$ que nous avons considérée; on aura d'abord l'avantage d'exclure les cas, dont l'impossibilité se présente

d'elle même. Car, dès que le reste $N$ est seulement d'une unité inférieur en degré à $M$, les recherches ultérieures sont inutiles; ensuite, le calcul sera plus simple et plus expéditif.

Cependant on peut aussi considérer directement la fraction $\frac{L}{M}$, en la traitant comme la fraction $\frac{N}{M}$, on finira par tomber sur l'équation

$$S_\nu \frac{dX_\nu}{dx} - \frac{dS_\nu}{dx} X_\nu = L_\nu,$$

dans laquelle le degré de $X_\nu$ est supérieur à celui de $S_\nu$, et le degré de $L_\nu$ supérieur à celui de $S_\nu \frac{dS_\nu}{dx}$.

Supposons

$$X_\nu = S_\nu X_{\nu+1} + r_{\nu+1}$$

$$\frac{dX_\nu}{dx} = \frac{dS_\nu}{dx} \lambda + \varrho_{\nu+1},$$

nous aurons

$$S_\nu \frac{dS_\nu}{dx} (\lambda + X_{\nu+1}) + S_\nu \varrho_{\nu+1} - \frac{dS_\nu}{dx} r_{\nu+1} = L_\nu.$$

Soient $K_{\nu+1}$, $R_{\nu+1}$ respectivement le quotient et le reste de la division de $L_\nu$ par $S_\nu \frac{dS_\nu}{dx}$, nous aurons

$$\lambda = X_{\nu+1} + K_{\nu+1}$$

$$S_\nu \varrho_{\nu+1} - \frac{dS_\nu}{dx} r_{\nu+1} = R_{\nu+1}$$

donc

$$X_\nu = S_\nu X_{\nu+1} + r_{\nu+1}$$

$$\frac{dX_\nu}{dx} = \frac{dS_\nu}{dx} X_{\nu+1} + K_{\nu+1} \frac{dS_\nu}{dx} + \varrho_{\nu+1},$$

en éliminant $X_\nu$, on trouve

$$(26) \qquad S_\nu \frac{dX_{\nu+1}}{dx} = K_{\nu+1} \frac{dS_\nu}{dx} + \varrho_{\nu+1} \frac{dr_{\nu+1}}{dx}.$$

On peut trouver une autre expression pour le second membre de la dernière équation. Pour cela faisons

$$L_\nu = \Theta_\nu S_\nu + P_\nu$$
$$\Theta_\nu = K_{\nu+1} \frac{dS_\nu}{dx} + Q,$$

nous aurons $R_{\nu+1} = QS_\nu + P_\nu$; donc l'équation $S_\nu \varrho_{\nu+1} - \frac{dS_\nu}{dx} r_{\nu+1} = R_{\nu+1}$ deviendra $S_\nu(\varrho_{\nu+1} - Q) - \frac{dS_\nu}{dx} r_{\nu+1} = P_\nu$; donc, en posant

$$S_\nu q_\nu - \frac{dS_\nu}{dx} p_\nu = 1,$$

on aura $r_{\nu+1} =$ au reste de $\frac{P_\nu p_\nu}{S_\nu}$; $\varrho_{\nu+1} = Q +$ le reste de $\frac{P_\nu q_\nu}{\frac{dS_\nu}{dx}}$, donc

$$K_{\nu+1} \frac{dS_\nu}{dx} + \varrho_{\nu+1} = K_{\nu+1} \frac{dS_\nu}{dx} + Q + \text{le reste de } \frac{P_\nu q_\nu}{\frac{dS_\nu}{dx}} =$$
$$= \Theta_\nu + \text{le reste de } \frac{P_\nu q_\nu}{\frac{dS_\nu}{dx}} = \Theta + \varrho_{\nu+1};$$

$\varrho_{\nu+1} =$ au reste de $\frac{P_\nu q_\nu}{\frac{dS_\nu}{dx}}$ n'est pas le même que précédemment; mettant dans l'équation (26) $\Theta + \varrho_{\nu+1}$ pour $K_{\nu+1} \frac{dS_\nu}{dx} + \varrho_{\nu+1}$, nous aurons

$$S_\nu \frac{dX_{\nu+1}}{dx} = \Theta_\nu + \varrho_{\nu+1} - \frac{dr_{\nu+1}}{dx},$$

de là

$$\frac{dX_{\nu+1}}{dx} = \frac{\Theta_\nu + \varrho_{\nu+1} \frac{dr_{\nu+1}}{dx}}{S_\nu};$$

il faut que le second membre de la dernière équation soit une fonction entière; si cela a lieu, l'intégration donnera $X_{\nu+1}$, et par suite on trouvera

$$\int \frac{L}{M} dx = \frac{r_1}{Y} + \frac{r_2}{Y_1} + \frac{r_3}{Y_2} + \ldots + \frac{r_{\nu+1}}{Y_\nu} + X_{\nu+1},$$

la quantité $X_{\nu+1}$ renfermera une constante arbitraire.

VII. Nous allons maintenant appliquer les recherches précédentes à quelques exemples; proposons nous de trouver l'intégrale $\int \frac{N}{R^n} dx$, en admettant que les fonctions $N$ et $R$ n'ont point de facteurs communs, et que l'équation $R = o$ n'a

pas de racines égales. Nous aurons $M = R^n$, $\frac{dM}{dx} = nR^{n-1}\frac{dR}{dx}$; donc $Y = R^{n-1}$, $S = R$, $Y_1 = R^{n-2}$, $\frac{dY}{dx} = (n-1)R^{n-2}\frac{dR}{dx}$, $T = (n-1)\frac{dR}{dx}$. Par conséquent, nous aurons, pour déterminer $X$, l'équation

$$R\frac{dX}{dx} - (n-1)\frac{dR}{dx}X = N.$$

Pour que cette équation soit possible, il faut avant tout que le degré de la fonction $N$ soit pour le moins égal à celui de $R$ diminué de l'unité, et si le degré de $N$ est égal à celui de $R$ moins un, alors la quantité $X$ sera nécessairement constante, et par conséquent on aura

$$-(n-1)X\frac{dR}{dx} = N,$$

c'est-à-dire, la fonction $N$ sera proportionelle à $\frac{dR}{dx}$: or en effet l'intégrale $\int\frac{dR}{R^n}$ est algébrique.

Supposons $n = 10$, $R = x^5 + 1$, $N = x^2 + 15x^4 - 14x^7$, nous aurons

$$(x^5+1)\frac{dX}{dx} - 45x^4X = x^2 + 15x^4 - 14x^7$$

le degré de $X$ est $= 7 - 5 + 1 = 3$. Ainsi $X$ est immédiatement trouvable; en effet, il est facile de former les quantités $p$ et $q$, telles que

$$(x^5+1)q - 45x^4p = 1,$$

il n'y a qu'à prendre $q = 1$, $p = \frac{x}{45}$, donc

$$X = \text{au reste de } \frac{x^3 - 15x^5 - 14x^8}{45(x^5-1)} = \frac{x^3-1}{3};$$

$$\frac{dX}{dx} = \text{au reste de } \frac{x^2 + 15x^4 - 14x^7}{45x^4} = x^2$$

donc

$$\int\frac{(x^2 + 15x^4 - 14x^7)\,dx}{(1+x^5)^{10}} = \frac{x^3-1}{3(x^5+1)^9}$$

Supposons encore $n = 11$, $R = x^5 + x + 1$, $N = 30 + 150x^4 + 17x^{16} + 7x^{17} - 33x^{21}$; nous aurons

$$(x^5+x+1)\frac{dX}{dx}-10(5x^4+1)X=30+150x^4+17x^{16}+7x^{17}-33x^{21},$$

le degré de $X$ est $=21-5+1=17$.

Supposons $X=Ax^{17}+X'$; nous anrons

$$A(17x^{16}+7x^{17}-33x^{21})+(x^5+x+1)\frac{dX'}{dx}-10(5x^4+1)X'$$
$$=30+150x^4+17x^{16}+7x^{17}-33x^{21}.$$

En faisant $A=1$, on trouve

$$X=x^{17}+X',$$

$$(x^5+x+1)\frac{dX'}{dx}-10(5x^4+1)X'=30+150x^4.$$

Le degré de $X'=4-5+1=0$; donc $X'$ est une constante; donc $\frac{dX'}{dx}=0$, et par suite

$$-10X'(5x^4+1)=30(1+5x^4)$$

d'où

$$X'=-3.$$

Ainsi

$$X=x^{17}-3,$$

en sorte que

$$\int\frac{30+150x^4+17x^{16}+7x^{17}-33x^{21}}{(x^5+x+1)^{11}}=\frac{x^{17}-3}{(x^5+x+1)^{10}}.$$

# EXPÉRIENCES
## DE
# FORTE COMPRESSION
## SUR DIVERS CORPS;

PAR

M. PARROT,

CONJOINTEMENT AVEC M. L'ACADÉMICIEN EXTRAORDINAIRE LENZ POUR LES OBSERVATIONS.

---

*Avec deux planches.*

---

(Lu le 23 Mai 1832.)

Les expériences qui font l'objet de ce mémoire exigeaient nécessairement deux observateurs. Mon collègue, M. Lenz, a eu la bonté de se prêter à ce travail qui s'est prolongé plus long-tems que nous n'avions espéré, par les difficultés d'exécution que l'appareil a offertes. Je lui en témoigne ma reconnaissance avec d'autant plus de satisfaction, que l'affaiblissement de ma vue et de tout mon physique pendant cet hiver m'a forcé de lui abondonner les observations les plus délicates et les plus fatigantes. C'est une jouissance douce pour la vieillesse d'avoir formé de jeunes savans qui nous remplacent et nous assistent avec l'aménité et la complaisance dont M. Lenz m'a déjà donné plus d'une preuve.

---

Le but de ces expériences est d'observer l'effet de fortes compressions sur divers corps. Je n'ai pas poussé les compressions à plus de 100 atmosphères, parce qu'ayant besoin d'un volume considérable de compression et d'un piston

de grand diamètre, j'eusse rencontré des difficultés insurmontables si j'avais voulu dépasser de beaucoup cette limite. M. Perkins, à la vérité, a poussé les compressions jusqu'à 6000 pressions atmosphériques; mais ce célèbre expérimentateur n'avait qu'un très petit volume de matière à comprimer, proportionné au petit diamètre de son piston, tandis que je devais exercer la pression sur un grand volume d'eau, et avec un piston de $2\frac{1}{2}$ pouces de diamètre. Si j'avais voulu me ménager cette grande ouverture à part, et employer un petit corps de pompe, la compressibilité de l'eau, l'air que l'on ne peut jamais éliminer totalement du vaisseau et l'élasticité du métal eussent jeté une incertitude complète dans les résultats, et exigé un corps de pompe de plusieurs pieds ou même de plusieurs toises de longueur, chose impraticable.

L'appareil dont je me suis servi, est fondé sur le même principe que celui que j'avais fait faire à Dorpat il-y-a 9 à 10 ans pour d'autres expériences; et comme je n'ai pas encore décrit cet appareil, je vais décrire celui que j'ai fait faire pour le cabinet de Physique de l'Académie, qui n'en diffère que par quelques accessoires. Le principe sur lequel il est fondé, est d'exercer la pression immédiatement sur une masse d'eau qui la communique à l'objet que l'on y plonge pour le comprimer; ce qui procure l'avantage d'une pression égale en tout sens.

Les figures I et III représentent les principales parties de l'appareil en face et de côté. La fig. IV en offre le plan. C'est le vaisseau en laiton dans lequel l'eau est comprimée. Son diamètre extérieur *cc* ou *ee* est de 6 pouces de Paris. Sa hauteur *ce* est également de 6 p. L'épaisseur du métal est de 6 lignes. Il contient environ $8\frac{1}{2}$ ℔ d'eau, et est bombé en tous sens pour mieux résister. Il est renforcé à sa surface inférieure par une calotte *ff* de 6‴ d'épaisseur à son milieu et usée à l'émerie sur le fond du vase. Cette calotte a pour but d'aider à ce fond à supporter la pression verticale qui se porte entièrement sur le point *B*. A cette calotte sont soudés un tuyau de laiton qui enveloppe la proéminence *B*, afin d'empêcher que le vaisseau *C* ne puisse se tourner sur son axe.

Le vaisseau *C* est surmonté d'un *corps de pompe* *D D*, muni d'un piston *E* de $2\frac{1}{4}$ pouces de Paris, qui doit effectuer la pression et qui est surmonté lui-même d'un trépied *a a*, dans la partie horizontale duquel se trouve un trou qui laisse passer le bout de la grande vis-ouvrière *F F F*, qui passe au travers du collet *I I* de la monture, collet qui contient l'écrou *H H H H* en laiton, dont la surface latérale est un peu conique. La tête de la vis-ouvrière est carrée pour recevoir la grande clé *X Y* au moyen de laquelle on applique la force. Ce long bras de levier a le double avantage de fournir un grand moment de force, dont on a très besoin pour produire une pression de 100 atmosphères, et la possibilité de ne faire avancer la vis que d'une très petite quantité lorsque cela est nécessaire. Le bout inférieur de la vis a sous la couronne un trou, pour recevoir un petit boulon de fer qui sert à retirer le piston.

Au bout du tuyau *n n'* se trouve une continuation *o o* qui sert à vider le vaisseau, et se ferme par une simple vis munie d'une virole de plomb et d'étain comme celle du thermomètre.

La monture, tout en fer, s'applique sur une *base carrée* *M M* de bois de frêne, ou autre bois dur, composée de deux planches collées l'une sur l'autre à angles droits des fibres, portée sur 4 petits pieds également en bois et fixée sur le plancher par quatre vis *d*, *d*, *d*, *d*, fig. IV.

*La monture* se trouve dessinée dans les figures I, III et IV, de face, de côté et de plan. Le collet *I I* (fig. I) est forgé d'une seule pièce avec les deux barres ou montans *I K*, *I K*, qui se terminent en bas par une forte plaque *L L*, fixée par les vis *b*, *b* à la forte barre *A A*. Le troisième montant *N N* (fig. III), terminé de même et fixé à vis au collet, est immédiatement fixé à la base par une forte vis à écrou.

La barre *A A* (fig. I et IV) est la partie la plus forte de la monture, et est forgée d'une seule pièce avec les deux autres barres *O O* (fig. III et IV), fixées immédiatement par des vis *g g*, *g g* à la base.

*G G* (Fig. I.) est une plaque ronde de deux pièces, dont chacune est munie de deux plaques *g*, *g* à ses bords pour être fixée à vis aux montans *I K*, *I K*. La fig. II. représente cette plaque, qui doit assujettir le corps de pompe à ces deux montans. *D D* est la coupe du corps de pompe, *g g* les plaques latérales.

Lorsqu'on veut retirer le piston, l'on fixe au moyen d'un coin une barre *S* de fer ou de laiton sur le bord du corps de pompe et sous le collet *I I* pour empêcher le vaisseau de monter avec le piston.

### ACCESSOIRES.

1) Le thermomètre *Q Q*, dont la boule plonge à nu dans l'eau du vaisseau, et dont l'échelle est visible au dehors. Le tube est fortement luté dans une virole de laiton qui à l'inférieur porte une bonne vis qui entre dans un écrou percé dans l'enveloppe du vaisseau et surmonté d'une tête hexagone. Entre cette tête et la surface du vaisseau se place une rondelle de plomb et d'étain à portions égales pour donner au mélange la dureté nécessaire que n'a pas le plomb seul. On enduit les deux surfaces de cette rondelle avec une graisse forte composée de 6 parties de cire, 3 de suif et 1 de térébenthine. Elle s'ammollit à peine sous les doigts assez pour être frottée. La vis doit être serrée très fortement.

2) Un tube *R*, vissé avec les mêmes précautions à la surface du vaisseau, est destiné à contenir un peu d'eau et la partie inférieure d'un autre thermomètre, dont l'échelle est visible. Ce thermomètre doit indiquer la température de l'eau pendant les expériences, sans être affecté de la pression. Le tube *R* ayant un petit diamètre et étant bien cylindrique, une épaisseur de métal de $\frac{1}{8}'''$ suffit pour résister à la pression de l'eau du dedans au dehors.

3) L'élatéromètre à air *P P* (Fig. III) est composé d'un fort tube de verre solidement luté à une virole qui s'adapte avec 6 vis à une plaque inférieure qui borde l'espace cylindrique *n* qui communique par le tuyau *n n'* avec l'intérieur du vaisseau *C*, de sorte que l'eau peut monter librement dans le tube pour y comprimer l'air qu'il contient. Pour protéger l'observateur au cas que le tube

se cassât, il était recouvert d'une corbeille cylindrique de fil de laiton à large voie.

Pour placer le tube, on verse auparavant de l'eau dans le vaisseau jusqu'à ce qu'elle s'écoule par l'orifice horizontal du tuyau *n n'*. Avant de visser le tube sur cet orifice, l'on fait entrer dans le tube un cylindre de métal qui en remplit la capacité jusqu'au commencement de l'échelle au-dessus de la virole de laiton; on plonge l'orifice du tube dans un gobelet plein d'eau, et y laisse tomber le petit cylindre qui se trouve sur le champ remplacé par un volume égal d'eau qui y reste quand on enlève le tube pour le visser à sa place.

L'espace plein d'air qui reste dans le tube doit être divisé d'abord en 100 parties égales; ce qui se fait avec la plus grande sûreté et facilité au moyen de l'instrument particulier que j'ai décrit en 1812 dans les annales de Physique et de Chimie de Gilbert T. XLI, p. 62. Ensuite on calcule le nombre de ces parties qui vont à 2, 3, 4, 5, etc. jusqu'à 100 atmosphères, et l'on en trace les divisions à côté de l'échelle précédente. Voici cette division, qui en épargnera le calcul à d'autres physiciens qui voudront répéter ces expériences ou en faire de semblables.

| parties | atmosph. | parties | atmosph. | parties | atmosph. | parties | atmosph. |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 1,000 . . . | 100 | 4,166 . . . | 24 | 7,692 . . . | 13 | 50,000 . . . | 2 |
| 1,111 . . . | 90 | 4,348 . . . | 23 | 8,333 . . . | 12 | 52,632 . . . | 1,9 |
| 1,250 . . . | 80 | 4,545 . . . | 22 | 9,090 . . . | 11 | 55,555 . . . | 1,8 |
| 1,429 . . . | 70 | 4,762 . . . | 21 | 10,000 . . . | 10 | 58,823 . . . | 1,7 |
| 1,666 . . . | 60 | 5,000 . . . | 20 | 11,111 . . . | 9 | 62,500 . . . | 1,6 |
| 2,000 . . . | 50 | 5,263 . . . | 19 | 12,500 . . . | 8 | 66,666 . . . | 1,5 |
| 2,222 . . . | 45 | 5,555 . . . | 18 | 14,286 . . . | 7 | 71,428 . . . | 1,4 |
| 2,500 . . . | 40 | 5,882 . . . | 17 | 16,666 . . . | 6 | 76,923 . . . | 1,3 |
| 2,857 . . . | 35 | 6,250 . . . | 16 | 20,000 . . . | 5 | 83,333 . . . | 1,2 |
| 3,333 . . . | 30 | 6,666 . . . | 15 | 25,000 . . . | 4 | 90,909 . . . | 1,1 |
| 4,000 . . . | 25 | 7,143 . . . | 14 | 33,333 . . . | 3 | 100,000 . . . | 1,0 |

Mais cet élatéromètre n'indiquera pas réellement des pressions de 1, 2, 3, 4 atmosphères, puisque l'on sait depuis long-tems que l'air en contact avec l'eau

est absorbé en proportions croissantes avec les pressions. Le physicien anglais Henry a prouvé par ses expériences jusqu'à une double pression atmosphérique que, sous une température constante, l'air est absorbé en proportion des pressions. Par cette raison nous nommerons les indications de notre élatéromètre *pressions atmosphériques apparentes.*

4) Mesure de pressions immédiatement par des poids. Au flanc du vaisseau est un tuyau soudé *L K I*, dont la partie verticale bien polie est un petit corps de pompe, dans lequel entre un piston d'acier à frottement dur. Son diamètre, mesuré bien exactement avec un microscope micrométrique, est de 1,2932 lignes de Paris, et par conséquent la coupe horizontale de 1,3135 lignes carrées. La pression atmosphérique moyenne étant, d'après Brisson et d'autres, égale à 21,18 livres poids médicinal de Nüremberg sur un pouce carré de Paris, le poids qui répondra à 100 atmosphères pour notre piston sera 19,7633 livres, ou 19 livr. 4397 grains. Ce poids est partagé en deux parties inégales, dont la moindre *F F* (fig. V. se) trouve au-dessus du piston *I*, et la plus pesante *N* au-dessous, suspendue par un étrier *M M M* (fig. VI.), fixé de chaque côté par deux vis au poids supérieur, en sorte que le centre de gravité se trouve notablement plus bas que le piston *I*. La branche du piston est fixée à charnière en *H* au bas du poids *F F*, pour pouvoir introduire et retirer le piston de son corps de pompe, sans en plier la branche. Pour obtenir un frottement doux, l'on enfonce dans le petit corps de pompe un peu de graisse de porc fondue avec un peu d'huile d'olives, de sorte qu'à la température de l'air, lors des expériences, elle se figeait à peine. Lorsque la pression avait lieu, cette graisse s'appuyait sur le piston et fermait l'espace insensible entre lui et le corps de pompe. Sous ces circonstances le frottement du piston fut déterminé par plusieurs expériences à un poids moyen de 1 livr. 4730 grains, poids med. de Nuremberg.

Le poids supérieur était suspendu librement à un bras de balance *A C*; l'autre bras *C B*, d'égale longueur, portait un bassin *O*, dans lequel on mettait les

contrepoids nécessaires pour obtenir en *A* une pression égale à tel nombre d'atmosphères que je voulais.

5) Instrument pour mesurer l'effet de la pression sur des corps solides, sans les mettre en contact avec l'eau. Lorsque les corps peuvent ou doivent être mis en contact avec l'eau, il suffit de les suspendre au crochet du grand piston; mais s'ils doivent être hors de contact avec l'eau, il faut qu'ils plongent dans un volume d'air qui, comprimé jusqu'à $\frac{1}{100}$ et diminué en sus par l'absorption, soit encore assez grand pour tenir le corps en question hors de l'eau. La figure VII représente l'appareil qui remplit ces conditions. *a b e f* est un vase cylindrique de fer-blanc surmonté d'un appendice creux *b c* communiquant avec le grand vase. *h* est un anneau ou crochet pour suspendre l'instrument au grand piston. *i k* est un écrou dans lequel se visse la plaque *e f* de laiton assez lourde pour que le vase plein d'air s'enfonce de lui-même dans l'eau; *m* et *m* sont deux trous percés dans la plaque pour permettre à l'eau d'entrer dans le vase en suite de la compression. *l n* est une tige de laiton qui porte le petit vase *o*, dans lequel on place le corps qui doit être soumis à l'expérience. Ce petit vase a à son fond une excavation conique pour recevoir le petit crochet qui sert à suspendre d'ailleurs les corps qu'on veut y placer. On aurait pu diminuer considérablement les dimensions du grand vase en prolongeant vers l'intérieur les parois de l'appendice pour éloigner l'eau du petit vase *o*; mais on eût perdu par là la majeure partie de l'air renfermé qui pourrait devenir nécessaire pour des essais d'oxidation ou d'inflammation.

Le premier objet que je me proposai d'examiner était l'effet de la pression sur la boule du thermomètre, me servant d'abord, pour mesure, des pressions atmosphériques apparentes. Lorsque je fis mes premières observations, il-y-a 9 ou 10 ans, avec l'appareil indiqué plus haut, je m'étais aperçu que le thermomètre, exposé à une pression de 30 ou 40 atmosphères, dans le dessein d'observer les températures de l'eau sous divers degrés de pression, montait à des hauteurs qui ne me paraissaient guère être dues à l'élévatoin de la température de l'eau par ces

pressions. Mais comme mon appareil n'avait pas de thermomètre soustrait lui-même à la pression, je ne pouvais m'éclairer là-dessus, et, chargé alors de tant d'autres travaux hétérogènes, je perdis cet objet de vue.

Nous commençâmes, M. Lenz et moi, les expériences au moyen de l'élatéromètre à air, observant ses indications sans nous soucier de l'absorption, celle du thermomètre dans l'eau exposée à la pression, du thermomètre dans l'eau non exposée à la pression et celles d'un thermomètre à l'air placé proche de l'appareil. Comme l'eau non comprimée, dans laquelle le second thermomètre plongeait, était enfermée par un bouchon de métal bien alaisé, et qui par conséquent, empêchait toute évaporation, nous pouvions considérer les indications de ce thermomètre comme celles de la température de l'eau dans le vaisseau, à une petite retardation près, que l'on peut au reste estimer tout-à-fait insensible, ce thermomètre n'ayant jamais haussé, lorsqu'après une expérience nous laissions subsister la pression pendant une ou deux minutes.

| Température de l'air. | État du thermomètre dans l'eau. | | Elasticités. | Différences des therm. A et B | Différences calculées sur 20°,5 pour 100 pressions. | Erreurs. |
|---|---|---|---|---|---|---|
| | A, comprimé. | B, non comprimé. | | | | |
| R. | R. | R. | | | | |
| 15°,28 | 11,80 | 11,80 | 1,0 | 0,00 | 0,0000 | |
| | 11,83 | 11,80 | 1,1 | 0,03 | 0,0205 | + 0,0095 |
| | 11,86 | 11,80 | 1,2 | 0,06 | 0,0410 | + 0,0190 |
| | 11,87 | 11,80 | 1,3 | 0,07 | 0,0615 | + 0,0085 |
| | 11,89 | 11,80 | 1,4 | 0,09 | 0,0820 | + 0,0080 |
| | 11,92 | 11,85 | 1,5 | 0,07 | 0,1025 | — 0,0325 |
| | 11,95 | 11,85 | 1,6 | 0,10 | 0,1230 | — 0,0230 |
| | 11,98 | 11,90 | 1,7 | 0,08 | 0,1435 | — 0,0635 |
| | 12,00 | 11,90 | 1,8 | 0,10 | 0,1640 | — 0,0640 |
| | 12,10 | 11,92 | 1,9 | 0,18 | 0,1845 | — 0,0045 |
| | 12,13 | 11,95 | 2,0 | 0,18 | 0,2050 | — 0,0250 |
| | 11,91 | 11,95 | 1,0 | — 0,05 | | |
| | 12,13 | 11,95 | 2,0 | 0,18 | | |
| | 12,38 | 12,00 | 3,0 | 0,38 | 0,410 | — 0,030 |
| | 12,60 | 12,05 | 4,0 | 0,55 | 0,615 | — 0,065 |
| | 12,80 | 12,10 | 5,0 | 0,70 | 0,820 | — 0,120 |

| Température de l'air. | État du thermomètre dans l'eau. | | Elasticités. | Différences des therm. A et B. | Différences calculées sur 20°,5 pour 100 pressions. | Erreurs. |
|---|---|---|---|---|---|---|
| | A, comprimé. | B, non comprimé. | | | | |
| R. | R. | R. | | | | |
| | 12,10 | 12,20 | 1,0 | — 0,10 | | |
| | 13,00 | 12,20 | 5,1 | 0,80 | | |
| 15,60 | 13,20 | 12,25 | 6,0 | 0,95 | 1,025 | — 0,075 |
| | 13,45 | 12,25 | 7,0 | 1,20 | 1,230 | — 0,030 |
| | 13,70 | 12,30 | 8,0 | 1,40 | 1,435 | — 0,035 |
| | 13,95 | 12,33 | 9,0 | 1,62 | 1,640 | — 0,020 |
| | 14,18 | 12,33 | 10,0 | 1,85 | 1,845 | + 0,005 |
| 15,60 | 12,40 | 12,50 | 1,0 | — 0,10 | | |
| | 14,40 | 12,50 | 10,0 | 1,90 | | |
| | 14,55 | 12,55 | 11,0 | 2,00 | 2,050 | — 0,050 |
| | 14,80 | 12,55 | 12,0 | 2,25 | 2,255 | — 0,005 |
| | 15,00 | 12,60 | 13,0 | 2,40 | 2,460 | — 0,060 |
| | 15,15 | 12,60 | 14,0 | 2,55 | 2,665 | — 0,115 |
| | 15,33 | 12,60 | 15,0 | 2,73 | 2,870 | — 0,140 |
| 15,84 | 12,50 | 12,60 | 1,0 | — 0,10 | | |
| | 15,55 | 12,60 | 15,0 | 2,75 | | |
| | 15,80 | 12,80 | 16,0 | 3,00 | 3,075 | — 0,075 |
| | 16,00 | 12,80 | 17,0 | 3,20 | 3,280 | — 0,080 |
| | 16,20 | 12,80 | 18,0 | 3,40 | 3,485 | — 0,085 |
| | 16,42 | 12,80 | 19,0 | 3,62 | 3,690 | — 0,070 |
| | 16,60 | 12,85 | 20,0 | 3,75 | 3,895 | — 0,145 |
| 16,00 | 12,75 | 12,85 | 1,0 | — 0,10 | | |
| | 16,70 | 12,85 | 20,0 | 3,85 | | |
| | 17,80 | 12,90 | 25,0 | 4,90 | 4,920 | — 0,020 |
| | 18,95 | 12,90 | 30,0 | 6,05 | 5,925 | + 0,125 |
| | 20,05 | 12,90 | 35,0 | 7,15 | 6,940 | + 0,210 |
| | 21,15 | 12,95 | 40,0 | 8,20 | 7,965 | + 0,235 |
| | 22,00 | 12,95 | 45,0 | 9,05 | 8,990 | + 0,060 |
| | 23,00 | 12,95 | 50,0 | 10,05 | 10,015 | + 0,035 |
| 16,04 | 25,07 | 12,95 | 60,0 | 12,12 | 12,065 | + 0,055 |
| | 27,20 | 13,00 | 70,0 | 14,20 | 14,115 | + 0,085 |

Pendant que nous poussions la compression jusqu'à 80, l'élatéromètre éclata et termina ainsi la série de ces expériences. Mais nous avions auparavant expé-

rimenté avec un tube d'épreuve, sur lequel nous n'avions noté que $\frac{1}{100}$ de son volume intérieur parce qu'il était d'ailleurs trop inégal. Ce tube résista à 100 pressions atmosphériques apparentes, et les thermomètres *A* et *B* indiquèrent une différence de 20,5 degrés. Si l'on continue par le calcul notre liste d'observations, en prenant les deux dernières pour mesure, c'est-à-dire 2°,08 comme différence des deux derniers termes de la 5^e^ colonne pour 10 pressions, nous obtenons 20,44 pour 100 pressions. Si l'on prend la moyenne des quatre dernières observations de 10 en 10 atmosphères, qui est 2,07, pour base du calcul, l'on a 20,75, résultat également assez approché de 20,5. Enfin si l'on prend la moyenne arithmétique de toutes les observations dans la cinquième colonne, qui est 2,03, l'on a 20,36. La moyenne de ces deux dernières valeurs est 20,55; ce qui semble prouver que la vraie élévation du thermomètre comprimé pour 10 atmosphères apparentes est réellement 2,05, fournie par l'observation immédiate sur 100 atmosphères.

Pour l'intelligence de cette table, il faut observer que de tems en tems nous faisions revenir l'élasticité à 1, c'est-à-dire à la pression naturelle de l'atmosphère; puis nous la faisions remonter jusqu'à la dernière observation faite, que nous répétions avant d'aller plus loin. Ce sont les expériences enclavées.

Cette première série d'expériences fournit déjà d'importants résultats.

Les différences de température de l'air sont de 0°,76 R., celles du thermomètre dans l'eau non comprimée vont à 1°,15, pendant les deux heures que dura l'expérience. Donc l'eau du vase a réellement gagné 0°,39 pendant ces deux heures. Mais la température de l'air était au commencement de l'expérience de 3°,48 au dessus de celle de l'eau non comprimée, et a augmenté jusques vers la fin de 0°,76, de sorte que la température moyenne de l'air pendant les deux heures doit être évaluée à 3°,86 au-dessus de celle de l'eau. Or ce surplus doit nécessairement avoir influé sur la température de l'eau, et doit avoir produit dans l'eau une augmentation de température qu'on peut hardiment supposer égale à 0°,39, d'autant plus que cette influence était secondée par la chaleur du

corps des deux observateurs et de l'ouvrier qui tournait la vis. En effet, dans les expériences suivantes, où nous avions employé de l'eau de même température que l'air, M. Lenz et moi n'avons pas observé d'augmentation sensible de température dans l'eau non comprimée.

Les observations enclavées nous disent la même chose, surtout la dernière, où la pression va jusqu'à 20 atmosphères, les températures étant exactement les mêmes à la pression naturelle de l'atmosphère et à la haute pression. *)

*Il suit de ces expériences que la pression de l'eau par* 100 *atmosphères apparentes n'augmente point la température de l'eau d'une quantité sensible.*

Si nous considérons que de tous les liquides l'eau est celui qui contient le plus de calorique latent **), nous nous étonnerons que ce liquide n'en perde rien ou presque rien par de fortes compressions. Mais si nous comparons sa compressibilité, qui est si petite, avec la grande compressibilité des gas, accompagnée de si grands développemens de chaleur, nous en tirerons la conclusion que *ce n'est pas la compression par elle-même qui produit l'expulsion du calorique latent, mais uniquement la diminution de volume produite par la pression*, et que le calorique est une substance qui ne quitte les corps que lorsqu'on diminue l'espace qu'il oc-

---

*) Nous aurions dû répéter ces observations à de plus hautes pressions; mais comme ces retours à une seule pression nous prenaient beaucoup de tems pour la manipulation, nous voulions nous contenter d'en faire encore une à 100 pressions atmosphériques, qui eut été la plus décisive. Nous l'avons remplacée par les expériences où la température de l'eau et de l'air étaient les mêmes.

**) Je distingue le calorique libre, le calorique latent et le calorique combiné. Le calorique libre est le calorique rayonnant qui traverse spontanément les gaz, peut-être aussi les liquides. Le calorique latent est celui qui se décèle par les mélanges de substances hétérogènes sans décomposition, comme par exemple ceux de l'eau avec du mercure, des sels, des acides, du verre, des métaux qui ne se décomposent pas par l'eau, etc. Le calorique combiné est celui qui se dégage par le mélange des substances qui se décomposent par une action chimique, telle que l'oxidation. C'est toujours le même calorique, mais dans différents états. (V. mon *Grundriss der theoretischen Physik*, T. II.) Peut-être qu'enfin cette distinction, fondée sur la distinction entre l'affinité physique et l'affinité chimique, que je crois avoir établie de droit dans le même ouvrage, sera généralement admise. Nous avons tant de phénomènes inexplicables sans elle.

cupait, ou bien lorsqu'on lui offre une substance pour laquelle il a une affinité physique ou chimique.

La thèse précédente nous fournit immédiatement la conséquence importante que *dans un espace qui a partout la même température et où la pression, soit intérieure soit extérieure, ne change pas, il n'y a aucune raison que le calorique latent se dégage de l'un des corps contenus dans cet espace pour passer aux autres, ou se dégage de ceux-ci pour passer dans celui-là.* D'où il suit que l'hypothèse d'auteurs célèbres qui ont admis un rayonnement mutuel et continuel du calorique dans un espace dont tous les points sont à la même température, de même que les théories fondées sur cette hypothèse, sont erronées. *)

Passons à présent aux résultats de cette série d'observations qui concernent les indications du thermomètre exposé à la compression. Nous avons déjà dit qu'avant de faire la suite de ces expériences nous avions fait l'essai sur un tube d'élatéromètre dans lequel nous n'avions marqué que $\frac{1}{100}$ de volume entier pour en essayer la force et voir si tous les joints de l'appareil résisteraient à la pression de 100 atmosphères. Le thermomètre monta de 20°, 5 R. au-dessus de ce qu'il était précédemment, et le tube résista quelques instans, mais se cassa bientôt après **). Cette donnée quoique isolée, nous prouve d'abord que la boule du thermomètre est considérablement influencée par la pression, et les résultats de la table précedente en ont fourni 37 confirmations. Cette diminution de volume de la boule du

---

*) J'avais déja indiqué cette erreur (V. mon *Grundriss der theoretischen Physik*, Vol. II.) par la simple considération qu'une sphère creuse devrait nécessairement faire monter un thermomètre dont la boule serait au centre de cette sphère; ce que l'expérience dément, et prouve de nouveau, en passant, qu'en Physique il ne suffit pas du calcul seulement pour arriver a la vérité, mais qu'il faut des expériences et de la logique.

**) Cette rupture, singulière parce qu'elle n'a pas eu lieu à l'instant de la plus forte compression, m'en rappelle une autre de ce genre qui m'arriva à Dorpat. J'avais dans une de mes leçons comprimé de l'air jusqu'a 8 atmosphères, et plusieurs minutes après, continuant ma leçon j'entendis la cloche de verre éclater avec un grand bruit, sans que personne y ait touché. Ces ruptures n'auraient-elles pas quelque rapport avec les ruptures spontanées des tubes de verre non recuit?

thermomètre ne peut avoir lieu que dans la supposition que la matière de la boule, le verre, s'est comprimée. Ainsi *le verre est compressible*, et nos expériences prouvent que cette compressibilité peut être rendue décidément sensible déjà lorsque la pression n'est égale qu'à une demi atmosphère. Ce qui met hors de doute que le verre est non seulement pliant, comme on le voit dans les fils et dans les tubes de verre, mais qu'il devient plus dense par la compression. Avant cette expérience il me semble que le raisonnement d'après lequel on jugeait de la compressibilité de ce corps par son élasticité, était purement hypothétique, l'élasticité pouvant s'expliquer tout aussi aisément en supposant que le verre n'est pas compressible, mais seulement dilatable. Cette expérience, en démontrant la compressibilité du verre, justifie l'hypothèse que la compressibilité au moins est un des élémens de son élasticité. J'ignore s'il existe des expériences qui prouvent sa dilatabilité lorsqu'on prend le verre dans son état naturel. Nos expériences la prouvent lorsqu'il a été comprimé; car dès que la pression cesse, la boule du thermomètre revient à son volume primitif.

Si l'on considère notre table, l'on voit monter le mercure du thermomètre avec les pressions et, à quelques anomalies près dans la même progression arithmétique des pressions atmosphériques apparentes. Le lecteur s'en étonnera sûrement comme M. Lenz et moi, qui nous attendions à une loi beaucoup plus compliquée, soit à cause de l'inégale épaisseur du verre de la boule thermométrique, soit à cause de l'absorption de l'air par l'eau dans le tube aréométrique. Pour vérifier la série de nos expériences, nous avons noté dans la 5^e^ colonne les différences des deux thermomètres dans l'eau comprimée et non comprimée, qui livrent le vrai effet de la compression, et ensuite calculé dans la 6^e^ colonne ces différences sur la donnée de 20°, 5 R. pour 100 atmosphères apparentes. Enfin nous avons livré dans la 7^e^ colonne les différences des résultats observés et calculés, ce qui constitue les erreurs des expériences. Elles sont si petites qu'il est évident qu'elles proviennent des erreurs d'observation, des petites inégalités de la marche des thermomètres et surtout des erreurs inévitables dans la division du tube de

l'élatéromètre; car nous voyons ces erreurs augmenter avec les pressions: ce qui provient de l'impossibilité de déterminer avec justesse les fractions de centième et de millième de l'unité de l'échelle. Même les dixièmes ne sont pas exactement justes, parce qu'ils ont une grandeur variable selon la place où ils se trouvent dans l'espace pris pour l'unité.

Ainsi, malgré ces petites erreurs, nous devons poser en thèse que *le volume de la boule du thermomètre comprimée diminue en proportion arithmétique comme le volume de l'air contenu dans le tube*, jusqu'à 70 pressions *atmosphériques apparentes.* Nous verrons par les expériences subséquentes que cette loi s'étend jusqu'à 90 pressions atmosphériques vraies. Considérons cette diminution du volume de la boule thermométrique relativement à la compressibilité du verre.

Selon M. Biot, la dilatation vraie du mercure par la chaleur entre les points fixes du thermomètre est $\frac{1}{63}$ du volume du mercure à la température 0 : ce qui fait $\frac{1}{5040}$ pour 1° R. Or comme nous avons trouvé que la diminution du volume de la boule de notre thermomètre pour 100 pressions atmosphériques apparentes est égale à la dilatation causée par une augmentation de température de 20°,5 R. il s'en suit que le volume de la boule du thermomètre a diminué de 0,005674 par 100 de ces pressions, ce qui fait 0,00005674 par une pression. Mais nous pouvons regarder ces petites fractions comme applicables à la formule connue que l'augmentation ou la diminution du volume est trois fois celle du diamètre et nous trouverons la diminution du diamètre de notre boule de thermomètre égale à 0,001891 pour 100 pressions et 0,00001891 = $\frac{1}{52882}$ pour une pression.

Naturellement ces valeurs sont variables, en raison des épaisseurs. Mais on se tromperait fort, si l'on s'imaginait qu'il suffirait d'une pression atmosphérique pour raccourcir de $\frac{1}{59200}$ une lame de verre de l'épaisseur de celui de la boule. Il ne faut pas oublier que l'enveloppe de la boule doit être considérée comme un assemblage de pyramides tronquées qui se touchent de tous côtés (à l'intervalle près qui se trouve entre deux molécules) et qui font ici la fonction de coins pressés tous également à leur tête dans la direction de leur axe par la force donnée; ce qui procure

à cette force un avantage énorme; car, en supposant par exemple qu'il n'y allât que 1000 molécules sur la longueur du rayon de la boule thermométrique, le moment de la force sera 2000 fois plus grand que la force, et la force d'une atmosphère ne raccourcirait la longueur d'un parallélépipède de verre que de $\frac{1}{118 \cdot 4000000}$, si cette force était appliquée à la manière ordinaire sur chaque molécule de la base *).

Les observations enclavées indiquent que lorsqu'on ramenait la compression à la seule pression naturelle de l'atmosphère, le thermomètre dans l'eau comprimée restait d'environ $\frac{1}{10}$ de degré en arrière du thermomètre dans l'eau non comprimée. L'on pourrait en conclure que le verre avait perdu de son élasticité par ces compressions. Mais quoique cela paraisse s'accorder avec l'observation d'autres physiciens qui prétendent que des tubes de verre, portés sur leurs bouts, prennent petit à petit une courbure qu'ils ne perdent plus, cependant il me paraît au moins hazardé d'adopter cette conclusion; car il ne serait pas concevable qu'une seule pression fît à cet égard autant d'effet que vingt. La différence observée peut avoir d'autres causes; elle peut être vraiment thermométrique en ce que le thermomètre non comprimé se trouvait dans un étui de laiton qui transmet la chaleur plus parfaitement que l'eau. La température supérieure de l'air devait donc pénétrer au moyen de cet étui plus facilement dans l'intérieur du vaisseau et échauffer la petite portion d'eau dans laquelle le thermomètre était plongé un peu plus que la grande du vaisseau.

Nous ne possédons encore aucune méthode de mesurer la compressibilité des métaux et autres substances solides et imperméables à l'eau. Nos expériences peuvent en fournir une, qui consisterait à faire des espèces de thermomètres dont la boule serait un métal ou autre substance que l'on veut soumettre à l'épreuve. Toutes ces boules auraient le même diamètre intérieur et extérieur, auxquelles on adapterait un tube gradué de verre et que l'on remplirait d'eau. Ces thermomètres placés tour à tour dans notre appareil de compression indiqueraient à l'échelle la diminution du volume de la boule. Cette méthode ne fournirait à la vérité pas les

---

*) L'on peut imaginer pour de pareils calculs d'autres hypothèses dépendantes de la figure que l'on veut donner aux molécules. Celle que je viens d'énoncer me paraît au moins la plus simple.

compressibilités absolues, mais les compressibilités relatives ou spécifiques, pour l'unité desquelles on pourrait prendre celles de l'or qu'il est facile d'obtenir de la plus grande pureté et par conséquent de même nature. On pourrait de même soumettre des alliages à de pareilles expériences.

Il suit de ce qui a été dit sur la compressibilité des boules de thermomètre que *les thermométrographes de Sixt, employés à mesurer la température de la mer à de grandes profondeurs n'ont fourni que de fausses indications*, puisqu'ils étaient soumis à la compression de toute la colonne d'eau de mer qui était au dessus d'eux. Prenons pour exemple les expériences de M. Lenz dans son voyage autour du monde. Il a atteint une profondeur verticale de plus de 900 toises. Si nous supposons que 30 pieds d'eau de mer fassent équilibre à une pression atmosphérique, la pression de l'eau peut être evaluée à 180 de ces pressions. Si donc il avait employé un thermométrographe dont la boule eut été de même diamètre et de même épaisseur que celle de notre thermomètre, l'index serait descendu de plus de 40 degrés R. (parce qu'ici il s'agit de pressions atmosphériques vraies) ou 50° C. par l'effet de la pression. Or comme M. Lenz a trouvé le refroidissement à cette profondeur = à 24° C., il s'en suit que le thermométrographe eut indiqué à cette profondeur une augmentation de température égale à $50-24=26° C.$; ce qui eut été un grand triomphe pour les géologues qui ont juré à l'autel de Pluton. Bien plus: le thermométrographe nous eut indiqué une loi des températures de l'intérieur de la mer absolument contraires à la véritable. Car les expériences de M. Lenz nous ont appris que cette température diminue d'abord assez rapidement, puis très lentement, en sorte qu'elle ne diminue que d'environ 1° dans l'espace des dernières 500 toises. Le thermométrographe au contraire eut indiqué une augmentation de 20°,5 *C.*, et pour les 400 toises précédentes une augmentation d'environ moitié moins rapide que n'est la diminution. Il serait à la vérité possible, mais très difficile, de soumettre le thermométrographe à nos expériences de compression pour former une échelle de correction. Mais outre la difficulté de pousser la compression dans l'appareil jusqu'à 600 atmosphères qui correspondent à 3000 toises de profondeur que

M. Lenz eut sûrement atteintes si les circonstances du voyage le lui eussent permis, ce physicien a si bien développé les défauts des thermométrographes dans sa défense de mon bathomètre contre les objections de M. Horner, qu'il n'est pas à conseiller d'employer désormais ces instrumens pour mesurer la température de la mer à de grandes profondeurs.

Nous avons répété nos expériences avec un nouveau tube élatérométrique, mais qui s'est cassé à 40 pressions. Un troisième tube a eu le même sort vers les 90 pressions. Le résultat de toutes ces expériences a été le même que celui de celles dont nous venons de livrer le détail, c'est-à-dire que la marche du thermomètre comprimé est proportionelle à celle de l'élatéromètre. D'où nons concluons que *le thermomètre peut parfaitement servir d'élatéromètre pour de fortes pressions* et avec plus de facilité, si on lui donne une échelle calquée sur les vraies pressions atmosphériques. C'est ce que j'ai fait et pourquoi j'ai ajouté à l'appareil l'accessoire décrit à cet effet. Malheureusement un accident avait détruit le thermomètre *A* qui avait servi aux expériences précédentes et fut remplacé par un autre. J'avais hésité longtems à faire cet accessoire, craignant que le piston d'un très petit diamètre ne put assez bien fermer sans un frottement trop considérable. Mais l'excellent mécanicien de l'Académie, M. Girgensohn, y a parfaitement réussi.

Le diamètre de ce petit piston, mesuré au micromètre microscopique, est de 1,2932 lignes de Paris. Donc sa coupe horizontale est de 1,3135 lignes carrées. Réduite au poids médicinal de Nüremberg, la pression d'une atmosphère est 21,18 livres sur un pouce carré de Paris; d'où il suit que le poids à placer sur la verge du piston, pour faire équilibre à 100 pressions atmosphériques est de 19,7633 livres, que nous avons partagées en deux parties inégales, comme il a été dit plus haut. La moyenne de quelques épreuves nous a donné pour la valeur du frottement 1 livre et 4730 grains; ce qui fait à peu près $\frac{1}{10}$ de la pression. Pour obtenir des pressions moindres que 100 atmosphères nous avons placé de l'autre côté de la balance les poids nécessaires calculés d'avance. J'ai cru devoir ne pas tenir compte du frottement sur l'axe du fléau, comme se trouvant déja compris dans la valeur

trouvée du frottement du piston, quoique les changemens des contrepoids aient fait varier de quelque chose le frottement à l'axe.

Le levier était ajusté pour les expériences de sorte qu'il se trouvait dans la position horizontale lorsque le piston avait sa position la plus basse et était porté par le renflement de sa verge qui alors appuyait sur le petit corps de pompe, de sorte que les forces verticales agissaient perpendiculairement au levier.

Quelque simple que paraisse l'observation dans ces expériences (car il semble qu'il ne faille qu'observer le moment où le renflement de la verge du piston quittait la surface du corps de pompe) cependant elle se trouva exposée à une difficulté qui nous surprit d'abord. Quelque lentement que nous fissions marcher l'homme qui menait le levier de la vis ouvrière, cependant il arrivait rarement que, lorsque le piston était monté d'un quart ou d'un cinquième de ligne, il ne succédât un haussement de plusieurs lignes en sus; ce que le frottement aurait dû empêcher si la force élastique dans le vaisseau n'avait été précisément qu'égale au poids. Ce surplus de marche du piston, tantôt plus grand, tantôt plus petit, était accompagné d'une marche très sensiblement irrégulière du thermomètre. J'attribue ce second soulèvement, distinct du premier, à ce que l'homme qui menait le levier, ne pouvant pas s'arrêter à l'instant de l'équilibre des forces, le métal du vaisseau se trouvait plus dilaté que ne comportait la pression du poids qui résistait en outre par son inertie. En se rétablissant, le métal devait naturellement faire monter le piston plus haut dès que l'inertie du poids était vaincue. Pour éviter ces irrégularités nous faisions rétrograder la vis d'une très petite quantité, jusqu'à ce que le piston retombait; alors il n'était plus difficile de renouveler la pression de manière à ce que le piston ne se soulevât que d'une quantité à peine visible. Malgré ces précautions je ne puis assurer qu'il ne se soient pas glissé quelques petites erreurs dans l'observation dont mes vieux yeux s'étaient chargés, ceux de M. Lenz étant très nécessaires aux deux thermomètres.

La table suivante, dressée sur 4 séries d'expériences, pour chacune desquelles nous avons pris les moyennes de deux observations, indique la marche du thermomètre octogésimal pour des pressions de 10 en 10 jusqu'à 100 atmosphères.

| Pressions atmosphériques. | Hauteurs du thermom. comprimé. | | | | Moyennes de I à IV. | Vraies ascensions du thermom. | Différences. |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | I. | II. | III. | IV. | | | |
| 0 | 12,00 | 12,00 | 12,00 | 12,00 | 12,00 | 0,00 | |
| 10 | 13,60 | 14,00 | 13,15 | 13,30 | 13,51 | 1,51 | 1,51 |
| 20 | 15,70 | 15,25 | 14,60 | 15,10 | 15,16 | 3,16 | 1,65 |
| 30 | 16,95 | 16,35 | 16,40 | 16,45 | 16,54 | 4,54 | 1,38 |
| 40 | 18,60 | 18,15 | 18,20 | 18,10 | 18,26 | 6,26 | 1,72 |
| 50 | 19,80 | 19,70 | 19,95 | 19,60 | 19,76 | 7,76 | 1,50 |
| 60 | 21,55 | 21,50 | 21,60 | 21,20 | 21,46 | 9,46 | 1,70 |
| 70 | 22,60 | 23,10 | | 22,75 | 22,82 | 10,82 | 1,36 |
| 80 | 23,80 | 24,80 | | 24,25 | 24,28 | 12,28 | 1,46 |
| 90 | 26,10 | 25,95 | | 25,70 | 25,92 | 13,92 | 1,64 |
| 100 | | 27,10 | | 27,10 | 27,10 | 15,10 | 1,18 |

Les indications du thermomètre non comprimé ne sont pas notées dans cette table, parce que les différences étaient si petites et variaient tellement de + à — qu'il était clair que les différences entre elles et celles du thermomètre comprimé n'étaient qu'accidentelles, provenantes apparemment de petits défauts de régularité dans la marche des deux thermomètres et de l'augmentation de la température de l'air. Cependant nous avons réduit toutes les observations à la température 12° R. qui était celle du commencement des expériences.

Soit $x$ l'ascension du thermomètre comprimé; l'on obtient par la 7^e colonne 10 équations qui, traitées par la méthode des moindres carrés, fournissent pour la valeur la plus vraisemblable de $x$, $x = 0°,15385$ R. Soit $N$ le nombre des équations, $a$, $a'$, $a''$ etc. les coëfficients de $x$, $S$ la somme des carrés des erreurs d'observation, la formule de Laplace $\frac{067449 \cdot \sqrt{\frac{S}{N}}}{\sqrt{[\int(a^2)]}}$ nous donne 0°,000458378 ou 0,00305 atmosphères pour l'erreur vraisemblable de $x$.

Ainsi nous nous en tenons à la valeur 0°,154 pour 1 atmosphère ou 15°,4 pour 100 atmosphères au thermomètre que nous avons employé.

Si à présent nous calculons les résultats de nos 10 observations sur 1°,54 pour 10 atmosphères, nous obtenons la table suivante:

| Atmosphères. | Observées. | Calculées. | Erreurs. |
|---|---|---|---|
| 0 | 0 | 0 | 0 |
| 10 | 1,51 | 1,54 | — 0,03 |
| 20 | 3,16 | 3,08 | + 0,08 |
| 30 | 4,54 | 4,62 | — 0,08 |
| 40 | 6,26 | 6,16 | + 0,10 |
| 50 | 7,76 | 7,70 | + 0,06 |
| 60 | 9,46 | 9,24 | + 0,22 |
| 70 | 10,82 | 10,78 | + 0,04 |
| 80 | 12,28 | 12,32 | — 0,04 |
| 90 | 13,92 | 13,86 | + 0,06 |
| 100 | 15,10 | 15,40 | — 0,30 |

Si l'on compare cette table avec celle qui contient les observations faites sur l'élatéromètre, l'on trouvera que les erreurs de part et d'autres sont à peu près égales, à cette différence près qu'une pression atmosphérique équivaut dans les expériences précédentes à 2°,05 et dans celles-ci à 1°,54 et que par conséquent les erreurs dans celles-ci sont réellement plus grandes que dans les dernières *). Ce qui semble prouver que les observations avec les poids sont plus difficiles que celles à l'élatéromètre. Ces erreurs, de même que les précédentes, variant irrégulièrement de + à —, indiquent qu'elles ne tiennent à aucune loi spéciale.

En suite de ces expériences et calculs nous concluons que *la marche du thermomètre suit celle des vraies pressions* de même que celle de l'élatéromètre. D'où nous tirons :

1) Que les condensations du verre sont en raison directe des pressions.

2) Que le thermomètre peut servir de mesure de la pression et que par conséquent on peut se dispenser d'employer un élatéromàtre à poids, lorsque l'on a un thermomètre réglé selon cet élatéromètre; ce qui facilite considérablement les expériences.

---

*) J'avoue ne pas concevoir pourquoi l'erreur a 100 atmosphères est la plus grande et va jusqu'à 0,3, ce qui fait presque 2 atmosphères.

En comparant les résultats des vraies pressions atmosphériques avec ceux que nous avons obtenus au tube aréométrique, qui suivent de part et d'autres la même loi, nous concluons.

1) Que la loi de Mariotte se confirme jusqu'à 70 pressions atmosphériques. L'académie des sciences de Paris l'avait confirmée jusqu'à 27.

2) Que les absorptions de l'air atmosphérique par l'eau sont en raison des compressions, jusqu'à 70 pressions atmosphériques.

Car, soient $a$, $a'$, $a''$ etc. l'effet de condensation sur l'air; $x$, $x'$, $x''$ etc. l'effet d'absorption; $b$ une pression atmosphérique, nous avons les équations $a + x = b$; $a' + x' = 2b$; $a'' + x'' = 3b$ etc. Si donc les $x$ ne suivaient pas la progression arithmétique, il faudrait nécessairement que les $a$ suivissent une progression inverse de celle des $x$, c'est à dire que si $x'$ était plus grand que $2x$, $x''$ plus grand que $3x$ etc., il s'en suivrait que $a'$ serait d'autant plus petit que $2a$, $a''$ d'autant plus petit que $3a$ etc. et vice versâ. Or ni l'un ni l'autre des deux cas n'est admissible. Donc il faut admettre que chacun des deux effets de la pression, la condensation et l'absorption, fait une progression arithmétique à part.

Cette preuve serait au dessus de toute objection, si nous avions pour la loi de Mariotte des expériences où la condensation se fît sans absorption; mais elles nous manquent, le mercure, dont on se sert ordinairement pour produire les compressions ou au moins pour enfermer les gas, absorbant aussi une portion notable de gas comprimé. De pareilles expériences seraient possibles avec un appareil où les degrés de compression fussent immédiatement produits par des poids, comme celui de Perkins pour la compression de l'eau. Mais cet appareil exigerait un petit corps de pompe parfaitement alaisé sur une longueur de plus de 8 pouces, si l'on voulait que $\frac{1}{100}$ de son volume eût encore 1 ligne de hauteur pour être mesurée avec sûreté. Je désespère de la possibilité de l'exécution.

Avant de passer à d'autres expériences, revenons encore pour un moment sur la compressibilité du verre, où il a été prouvé que la diminution de volume de la boule thermométrique est en raison directe des pressions.

Si donc nous nommons $1$ le volume de cette boule lorsqu'elle n'était comprimée que par le poids naturel de l'atmosphère et $\frac{1}{n}$ la diminution de ce volume par chaque pression atmosphérique en sus, nous aurons pour expression des volumes

$$1,\ 1-\frac{1}{n},\ 1-\frac{2}{n},\ 1-\frac{3}{n}\ \cdots\cdots\cdots\cdots\ 1-\frac{100}{n}$$

ou bien $\frac{n}{n},\ \frac{n-1}{n},\ \frac{n-2}{n},\ \frac{n-3}{n}\ \cdots\cdots\cdots\cdots\ \frac{n-100}{n}$

et la série des diamètres diminués sera proportionnelle à la suite:

$$\sqrt[3]{n},\ \sqrt[3]{(n-1)},\ \sqrt[3]{(n-3)}\ \cdots\cdots\cdots\ \sqrt[3]{(n-100)}.$$

Cette dernière suite nous donnerait celle des rapprochemens des molécules du verre, si ces molécules étaient rangées sur un seul cercle l'une près de l'autre. Mais l'ensemble de ces molécules, dont le rapprochement produit les diminutions de volume, est rangé sur une surface sphérique qui est en raison des carrés des diamètres et où les rapprochemens se font en tous sens. Nous avons donc pour les rapprochemens linéaires une série qui se rapporte à

$$\sqrt[6]{n},\ \sqrt[6]{(n-1)},\ \sqrt[6]{(n-2)},\ \sqrt[6]{(n-3)}\ \cdots\cdots\ \sqrt[6]{(n-100)}$$

Ainsi *les rapprochemens linéaires du verre comprimé sont en raison des sixièmes racines des volumes des sphères.* Mais nous avons trouvé plus haut que la diminution de volume produite par une pression atmosphérique est 0,00005674 pour notre premier thermomètre, ce qui revient à $\frac{1}{17624}$, et donne par conséquent 17624 pour la valeur de $n$, et pour la loi des rapprochemens linéaires la suite:

$$\sqrt[6]{17624},\ \sqrt[6]{17623},\ \sqrt[6]{17622}\ \cdots\cdots\cdots\ \sqrt[6]{17525},\ \sqrt[6]{17524}.$$

Or l'on sent que cette série, dans les limites de 1 à 100 pressions atmosphériques, diffère extrêmement peu de la progression arithmétique. Car si l'on calcule les valeurs des deux premiers, 5,101336 et 5,101289, et qu'on prenne leur différence 0,000047, de même celles des deux derniers 5,096550 et 5,096502 avec leur différence 0,000048, enfin si on divise la différence du premier au dernier par 100 pour avoir la moyenne 0,00004834 qui sera l'exposant de la progression arithmétique, nous trouverons que cet exposant ne diffère que de 0,00000134 et de

0,00000034, quantités si petites que l'on est en droit d'admettre que cette progression ne diffère pas sensiblement de la suite des sixièmes racines, dans le cas en question. Ainsi l'on peut admettre que, *dans les limites de* 1 *à* 100 *pressions atmosphériques, les rapprochemens linéaires du verre comprimé sont en raison des pressions*, comme cela a lieu pour les gas *).

Il ne serait pas difficile de tirer de ces expériences des objections contre l'hypothèse admise par La Place et tant d'autres savans illustres, que les attractions des molécules de la matière l'une vers l'autre (l'attraction de surface) suivent la même

---

*) La solution du problème suivant nous fournira la proportion de la condensation du verre sous la pression donnée.

Une sphère creuse est diminuée de volume par la pression, d'une très petite quantité. Le rayon de la sphère avant la compression soit $r$: le rayon de la même sphère dans l'état de compression soit $r-x$; la différence de volume soit $A$. L'on veut savoir de combien les molécules de la substance du verre se sont rapprochées en direction linéaire.

*Solution.* $\frac{4}{3}\pi r^3 - \frac{4}{3}\pi(r-x)^3 = A$. D'où vient, en rejetant les puissances supérieures de $x$, $\frac{4}{3}\pi \cdot 3r^2 x = A$ et $x = \frac{A}{4\pi r^2}$.

Mais la différence des deux surfaces est $4\pi r^2 - 4\pi(r-x)^2 = 8\pi r x$; et en mettant dans cette valeur celle de $x$ l'on a $8\pi r x = \frac{2A}{r}$, expression pour la différence des surfaces des deux sphères.

Mais chacune de ces surfaces peut être considérée comme un cercle dont le rayon est double de celui de la sphère. Soit donc le rayon de la sphère non comprimée $= R$, celui de la même sphère dans l'état de compression $= R-y$, $y$ sera le raccourcissement cherché pour l'étendue linéaire $R$. On a donc $\pi R^2 - \pi(R-y)^2 = 2\pi R y = \frac{2A}{r}$ et $y = \frac{A}{\pi r R}$. Et comme $R = 2r$ l'on a $y = \frac{A}{2\pi r^2}$. Ainsi le raccourcissement linéaire pour la longueur $R$ est égal à la différence de volume divisée par le grand cercle de la sphère pris deux fois.

Soit $a$ la fraction décimale 0,005674, qui a été trouvée comme rapport de la diminution de volume, nous avons $A = \frac{4}{3}\pi r^3 a$; par conséquent $y = \frac{\frac{4}{3}\pi r^3 a}{2\pi r^2} = \frac{2}{3} r a$. Or $R$ étant égal à $2r$, nous aurons $\frac{1}{3} r a$ pour le raccourcissement sur la longueur $r$, c'est à dire qu'une longueur égale au rayon de la sphère subira un raccourcissement égal à $\frac{1}{3} r a$, et si nous mettons dans cette expression la valeur de $a$, nous aurons pour le raccourcissement 0,001891 ou $\frac{1}{528}$, le rayon $r$ de la boule étant pris pour l'unité, dans la supposition d'une pression de 100 atmosphères et 0,00001891 ou $\frac{1}{52800}$ pour la pression d'une atmosphère.

loi que la gravitation des corps célestes. Mais j'abandonne volontiers ces considérations aux grands géomètres eux-mêmes qui ont adopté cette hypothèse. Je me permets seulement d'observer à cet égard que jamais je n'ai pu concevoir ni admettre qu'il existât entre deux molécules de matière une attraction à de petites distances et une répulsion à une plus petite, surtout depuis que M. le professeur Paucker a démontré clairement (dans sa dissertation latine pour le grade de docteur en philosophie à l'université de Dorpat, où il venait de terminer ses études) que les phénomènes de répulsion apparente qu'offre l'élasticité des corps rigides s'expliquent facilement en admettant une simple attraction.

Munis de l'appareil de compression, nous avons fait quelques expériences relativement à l'effet de la compression sur l'affinité chimique, que je vais décrire.

Nous avons d'abord comprimé jusqu'à 100 pressions atmosphériques du gas azote avec du gas hydrogène dans les proportions nécessaires pour composer le gas ammoniacal, dans un instrument *) de verre, où du mercure seul se trouvait en contact avec le gas, pour éviter l'absorption chimique du produit que l'eau eut pu causer. La température était celle de l'eau et de la chambre, $+12,4^{\circ}$ R. Si les deux gas s'étaient complètement changés en gas ammoniacal, leur volume eut été réduit à la moitié. Après avoir retiré l'instrument de l'appareil de compression, nous avons observé à la vérité une diminution de volume, mais beaucoup moindre. Le résidu n'offrit aucune odeur ammoniacale. Quelques gouttes d'eau introduites dans une portion du gas n'ont produit aucune diminution de volume; le papier jaune humecté n'a point du tout obtenu une couleur plus foncée. Dans la seconde portion du gas encore intact, le bâton de verre muni d'une goutte d'acide hydrochlore n'a produit aucune

*) Cet instrument est indiqué à la figure VIII. *A* est un vase cylindrique, fermé à sa partie supérieure et communiquant à son inférieure par le tube avec le vase également cylindrique *B* ouvert par le haut. On introduit dans *A* les gas que l'on veut soumettre à l'expérience et on les enferme par le mercure. Le vase *A* est gradué pour observer les volumes des gas avant et après l'expérience, et la proportion du volume des deux gas est telle que, supposé que tout le gas en *A* disparût, il resterait encore du mercure au fond du vase *B*, de sorte que jamais l'eau ne peut pénétrer en *A*. Une ficelle *cc*, fixée par ses bouts à chaque vase, sert à suspendre l'instrument au crochet du grand piston de l'appareil de compression.

fumée. Ainsi une compression de 100 atmosphères, à la température de + 12,4° R. n'est pas capable de produire la jonction chimique du gas hydrogène et azote. Cette expérience a été répétée trois fois.

Nous avons soumis une portion d'air atmosphérique à la même pression et dans le même instrument, et sous une température moyenne d'environ + 12° R. Mais ni la couleur du résidu gaseux, ni l'odeur, ni une oxidation de la surface du mercure, ni l'introduction de quelques gouttes d'eau, ni un changement de couleur d'un papier bleu humecté d'eau distillée n'ont indiqué une formation d'acide nitreux, quoiqu'il y ait eu une absorption considérable.

Nous avons soumis un mélange de gas oxigène et hydrogène dans les proportions nécessaires pour la formation de l'eau, à 101 pressions atmosphériques sous la température moyenne de 13,5° R. Quoique les gas aient été aussi purs que possible, cependant il ne s'était pas formé d'eau.

La comparaison de ces deux expériences et surtout de la dernière avec le phénomène du briquet à compression nous offre un résultat important. Le briquet à compression produit la chaleur ardente et l'inflammation de ces deux gas, comme M. Biot l'a prouvé le premier dans sa périlleuse expérience. Or ces briquets de compression ont ordinairement un piston d'environ 4 lignes de diamètre, et une pression atmosphérique sur la surface de ce piston correspond à environ 1,84 livre poids méd. de Nuremberg, et 100 pressions atmosphériques à 184 l. Or l'effort que l'on fait dans cette compression, y compris le frottement, peut être évalué au plus au quart de ce poids. En effet le petit espace qu'on laisse ordinairement pour contenir l'amadou fait au moins $\frac{1}{25}$ de l'espace que le piston parcourt dans sa marche, et la compression ne peut donc être évaluée qu'à environ 25 atmosphères.

Si notre appareil et les forces dont nous pouvions disposer nous eussent permis d'amener la pesanteur spécifique des gas à celle de l'eau sans que l'inflammation ait eu lieu, nous serions en état de dire positivement que la condensation des gas n'est pas suffisante pour produire leur combinaison chimique. Mais ce qu'il y a de certain, c'est que ce n'est pas la compression, comme telle qui produit l'inflamma-

*

tion dans l'expérience du briquet à compression mais la chaleur produite par la *condensation subite* qui ne se monte qu'à peu près à 25 pressions atmosphériques. Dans nos expériences il s'est produit certainement la même chaleur et bien d'avantage; mais comme cette production était lente, la chaleur se perdait dans le mercure de l'instrument et par l'instrument dans toute la masse d'eau du vaisseau.

Nous avons placé un brin de phosphore dans le petit vase *O* de l'appareil fig. V. sur du sable qui en remplissait presque toute la cavité, le cylindre entier étant plein d'air atmosphérique. Nous avons employé une pression de 100 atmosphères. Mais nous n'avons pas pu observer la moindre inflammation à la surface de ce phosphore, qui nous parut n'avoir subi aucun changement. Or le phosphore s'allume spontanément dans l'air atmosphérique à + 32° R.; donc la chaleur causée par notre compression lente n'a pas produit les 20 degrés qui manquaient à la température de l'appareil pour arriver à 32 degrés, et l'inflammation n'a pas eu lieu, quoique le gas oxygène ait eu une densité 100 fois plus grande que dans l'atmosphère; ce qui, selon la loi de Berthollet de la masse chimique, aurait dû favoriser puissamment l'inflammation *).

Je crois devoir conclure de ces expériences que le principe posé par Davy, qu'il suffit d'une élévation de température pour enflammer les corps, est généralement vrai et que la compression n'y concourt que comme un moyen de produire de la chaleur.

*) Je crois devoir prévenir ici une objection que l'on pourrait tirer de mes propres principes. J'ai prouvé (lors de mes expériences sur le phosphore il y a nombre d'années) que ce n'est pas le bâton de phosphore en masse qui subit l'inflammation lente à sa surface, mais le phosphore volatilisé; d'où l'on pourrait conclure que, si le phosphore n'a pas brûlé dans mon expérience, c'est que la haute pression a empêché sa volatilisation et par conséquent son inflammation. Mais j'ai prouvé en même tems que le phosphore volatilisé n'est pas une vapeur élastique comme celle de l'eau, de l'esprit de vin et d'autres liquides, mais du phosphore comme substance concrète et si délié qu'il nage dans le gas où il s'est répandu (après avoir été détaché du bâton par le calorique) en vertu de l'adhésion des molécules des gas entre elles, comme les substances colorantes dans les liquides. Aussi ai-je cru devoir statuer cette *forme volatile* comme la quatrième forme sous laquelle la matière nous apparaît, d'autant plus que les corps solides inflammables, tels que le soufre, le charbon, le bois etc. acquièrent tous cette forme avant leur inflammation. Or la volatilisation du phosphore ne produisant pas une substance élastique, la compression ne peut pas s'opposer a sa formation, le volume de la masse du phosphore ne changeant pas.

Dans cette discussion je n'ai point parlé du rapprochement des substances opéré par la compression comme moyen de favoriser les mélanges; car mes anciennes expériences sur la presse extractive de M. Réal m'avaient prouvé, contre l'opinion alors générale, que 4 pressions atmosphériques ne rapprochent pas les molécules des substances (lorsque l'une est liquide), au moins pas de manière à favoriser la combinaison par l'affinité physique (Annales de Gilbert Tom. 75, p. 453) ce qui me fit rejeter ces presses comme au moins inutiles. Ici nous voyons qu'un rapprochement, causé par une compression 25 fois plus grande, ne favorise pas le procès de l'affinité chimique *), même dans les gas.

L'on sait depuis longtems que le marteau, le laminoir, la filière etc., augmentent la densité des métaux. Mais toutes ces opérations n'appliquent la force que partiellement et successivement sur la masse donnée. Je voulais savoir quel effet elle aurait, lorsqu'elle agirait simultanément et également sur tous les points de la surface de la masse. Je fis faire à cet effet des boules de plomb, d'étain, de cuivre, de laiton, d'argent et d'acier non trempé, toutes du diamètre de 6 lignes de Paris, pour les exposer à différentes compressions et examiner à une balance d'une grande exactitude le changement de pesanteur spécifique **).

---

*) L'on sait, ou l'on ne sait pas, que je distingue l'affinité chimique de l'affinité physique, et celle-ci de l'attraction de surface. La première fait disparaître les propriétés caractéristiques des composans et produit des composés qui ont d'autres propriétés. La seconde au contraire conserve aux composés les propriétés des composans. (V. mon *Grundriss der theoretischen Physik*, T. I et II.).

**) Je pense qu'il n'est pas inutile de donner ici une idée de la balance dont nous nous sommes servis pour répéter ces pesées. Je l'ai fait faire à Dorpat par le mécanicien de l'université, M. Brücker, qui a prouvé dans son exécution une grande intelligence et sagacité.

Le fléau a 12 pouces de Paris de longueur et pèse $977\frac{1}{2}$ grains, poids médicinal de Nuremberg. Il était destiné à supporter, outre son propre poids et celui des plats, une charge de 500 grains de chaque côté. L'expérience a prouvé qu'il le supporte en effet sans se courber et que si on élève la charge jusqu'à 600 grains, l'on commence à apercevoir une courbure qui au reste est à peine sensible.

Pour reconnaître l'état d'équilibre avec une parfaite sûreté, j'ai placé, comme je le fais toujours, l'aiguille au dessous du fléau. Derrière cette aiguille et dans la verticale du point d'apui du fléau, est suspendu un pendule aussi parfaitement mobile que le fléau lui-même, et dont le poids est un limbe qui porte 10 degrés de part et d'autre de la verticale, dont on peut estimer en toute sûreté $\frac{1}{10}$. La pointe de l'aiguille rase l'arc intérieur de ce limbe sans le toucher.

Pour nous orienter dans ce genre d'expériences, je choisis d'abord la boule de plomb pour l'exposer à une pression de 100 atmosphères apparentes dans l'eau du

---

Après avoir ajusté le fléau le plus parfaitement que possible, nous avons, M. Lenz et moi, fait les expériences suivantes, pour explorer le degré de justesse et de sensibilité de la balance. Nous avons d'abord chargé le fléau de deux poids, dont chacun, le plat y compris, faisait 200 grains, ce dont nous nous sommes assurés par une double pesée. Ensuite nous replaçames les deux plats chacun à sa place, celui qui est muni d'un petit crochet pour les pesées hydrostatiques à la droite de l'expérimentateur, et l'équilibre parfait fut établi en faisant aller la vis de correction. Lorsqu'ensuite les plats furent enlevés, le balancier indiqua une déviation de $\frac{1}{10}$ degré. Ayant alors suspendu à un bras du balancier $\frac{1}{400}$ de grain, il produisit une déviation de $1{,}05°$. D'où il suit que $0{,}1°$ correspond à un poids de 0,000238 gr. pour le balancier non chargé.

Soit donc $n$ le moment du bras du balancier à droite; $m$ celui du balancier à gauche (celui-ci est le plus court); $\delta$ le poids nécessaire à suspendre au bras gauche pour placer le balancier en équilibre; $a$ la longueur du bras de balancier le plus long; $a-x$ celle du plus court; $P$ le poids qui doit pendre à chaque côté pour que la balance soit en équilibre sans compter le poids $\delta$: nous obtenons:

$$m + \delta a = n$$
$$m + Pa = n + P(a - x)$$

donc $(P - \delta)\, a = P(a - x)$ et $x = \frac{\delta a}{P}$, et en faisant $a = 1$

$$x = \frac{\delta}{P}.$$

Mais nous avons trouvé $\delta = 0{,}000238$ gr., et nous avons pris $P = 200$ gr. Donc

$$x = 0{,}00000119 = \frac{1}{34336}.$$

Ce qui fait sur la longueur 6″ d'un bras de levier $\frac{1}{11671}$ de ligne. Nous avons cru ne pas pouvoir pousser plus loin *la justesse* de la balance.

Cette valeur de $x$ nous instruit que lorsqu'on pèse un poids de 500 grains (le plus grand que comporte cette balance) ce poids est de 0,0006 ou $\frac{1}{1666}$ gr. trop léger; et l'on peut, si on le juge nécessaire, augmenter à chaque pesée le poids trouvé d'un corps d'une grandeur proportionnelle pour obtenir exactement son vrai poids.

Les 200 grains que nous avons pesés comprenaient le poids du plat de balance, qui pesait lui-même 117 grains. Donc le poids, sans la tare du plat, était 83 grains. Lorsque nous mîmes $\frac{1}{200}$ gr. d'un côté, la déviation de l'aiguille fut de $1{,}4°$ et lorsque nous mîmes $\frac{1}{400}$ gr. elle fut de $0{,}75°$. Lorsque nous plaçâmes 500 gr. de chaque côté de la balance, $\frac{1}{200}$ gr. produisit une déviation de $1{,}2°$. D'où il suit que pour de petits poids, $1°$ de déviation correspond à un poids de $\frac{1}{300}$ gr. et pour de grands poids (s'entend à cette balance) à $\frac{1}{240}$ gr. Mais comme l'on peut observer $\frac{1}{10}$ degré en toute sûreté, l'on peut dire que *la sensibilité* de notre balance va pour les petits poids à $\frac{1}{3000}$ gr. et pour les grands à $\frac{1}{2400}$ gr., c'est-à-dire dans le premier cas à $\frac{1}{249000}$ et dans le second à $\frac{1}{1200000}$ du poids. Si l'on se ressouvient que la fameuse balance de Ramsden n'offrait pour sa sensibilité que $\frac{1}{1000000}$ du poids lorsqu'elle était chargée de 10 liv. à chaque bout, et que j'en ai fait faire une pour l'Académie, qui, chargée également de 10 liv. à ses deux bouts, offre une sensibilité de $\frac{1}{5576000}$, quoique le couteau du fléau

vaisseau, en la suspendant au crochet du grand piston. Nous observames les résultats suivants.

*Avant la compression.*

| | | |
|---|---|---|
| Poids de la boule dans l'air . . . . . . . . . . . . | 232, 1333 gr. | |
| Poids du fil de suspension à la balance . . . . . . . . | 0, 007 | |
| Poids de la boule dans l'eau distillée . . . . . . . . . . | 211, 8125 | |
| Température de l'eau au commencement de la pesée | 17,6° C. | moyenne 17,75° C. |
| — — — d'abord après la pesée . . . | 17,9 | |

*Après la compression.*

| | | |
|---|---|---|
| Poids de la boule dans l'air . . . . . . . . . . . . | 232, 1333 gr. | |
| NB. Cette pesée n'a pas été renouvelée; nous avons supposé que le poids n'avait pas changé. | | |
| Poids du fil de suspension . . . . . . . . . . . . | 0, 007 | |
| Poids de la boule dans l'eau distillée . . . . . . . . . . | 211, 715 | |
| Température de l'eau au commencement de la pesée | 18,00° C. | moyenne 18,125° C. |
| — — — d'abord après la pesée . . | 18,25 | |
| Poids de l'eau déplacée par la boule avant la compression . | 20, 3278 gr. | |
| — — — — — — — après — — . . . | 20, 4253 | |
| Différence des températures moyennes . . . . . | 0,375° C. | |

La dilatation de l'eau pour 1° C. de température étant 0,00046601, elle sera pour cette différence sur $20\frac{1}{2}$ gr. = 0,00355 gr., qu'il faut ajouter aux 20,4253, ce qui fait 20,42885 gr. pour le vrai poids de l'eau déplacée par la boule après la compression. D'où il suit que la pression avait *diminué* la pesanteur spécifique de la boule.

Nos pesées ayant été faites avec tout le soin imaginable, ce résultat nous jeta, M. Lenz et moi, dans le plus grand étonnement. Résolus de renouveler l'expé-

ne repose pas sur de l'agathe, mais sur de l'acier, l'on jugera que la confection des balances s'est beaucoup perfectionnée depuis Ramsden.

rience, nous commandames de nouvelles boules de plomb, et ayant appris que la précédente avait été battue au marteau, nous eumes soin que les nouvelles soient simplement fondues, sans aucune application du marteau. L'expérience nous livra les résultats suivans:

*Avant la compression.*

| | |
|---|---|
| Poids de la boule dans l'air . . . . . . . . . . . . | 228,0443 gr. |
| Poids du cheveu pour la pesée . . . . . . . . . . . | 0,0033 |
| Poids de la boule dans l'eau . . . . . . . . . . . . | 207,7450 |
| Température moyenne de l'eau pendant la pesée | 18° C. |

*Après la compression.*

| | |
|---|---|
| Poids de la boule dans l'air . . . . . . . . . . . . | 228,0943 |
| Poids du cheveu pour la pesée . . . . . . . . . . . | 0,0033 |
| Poids de la boule dans l'eau . . . . . . . . . . . . | 207,6200 |
| Température moyenne de l'eau pendant la pesée | 17,9° C. |
| Poids de l'eau déplacée par la boule avant la compression . . | 20,3026 |
| — — — — — — après — — . . . | 20,4776 |

En ajoutant au premier de ces deux poids de l'eau déplacée 0 0009553, gr. pour la différence 0, 1° de température, l'on a 20, 3036 gr., qui soustraits du poids après la compression, donnent 0,1740 pour différence, quantité qui est au-dessus de toute espèce de doute relativement à la justesse de la pesée.

Cette expérience nous fournit deux résultats également inattendus, *a*) que *le poids absolu de la boule augmente par la compression dans l'eau*, *b*) *qu'en même tems la densité du plomb diminue.* Ce double phénomène ne peut s'expliquer autrement qu'en admettant qu'il s'est introduit dans le métal une substance étrangère, de l'eau. Pour nous en assurer nous laissames la boule suspendue à la balance et soustraite à la poussière pour laisser à l'eau le tems de s'évaporer. Au bout de 24 heures son poids se trouva en effet diminué d'une quantité égale à 0,2° au limbe, ce qui fait environ $\frac{1}{1500}$ gr. Nous avons continué cette pesée encore pendant 4 jours consécutifs, sans avoir pu observer la plus petite diminution nouvelle de poids. Or

l'augmentation de poids ayant été de $\frac{1}{20}$ gr., il s'en suit que la majeure partie de l'eau est restée, pendant ces cinq jours au moins, dans le plomb. Et comme, malgré la compression, le volume de la boule a augmenté, nous devons en conclure que l'eau ne s'est pas simplement logée dans les pores du plomb, mais qu'elle en a écarté les molécules l'une de l'autre.

Tout est étonnant dans ce phénomène: d'abord l'introduction de l'eau entre les pores du métal par la même pression qui tend à en rapprocher les molécules, quoique l'adhésion de celles-ci entre elles soit beaucoup plus considérable que celle de l'eau pour le plomb; ce qui offre une nouvelle résistance à cette introduction. Si je n'avais pas prouvé moi-même il y a 21 ans (V. mon *Grundriss*, T. II.) que le plomb ne décompose pas l'eau à une température moyenne et qu'une pression de 4 ou 5 atmosphères en affaiblit considérablement la décomposition par le fer et l'acide sulfurique en s'opposant au dégagement de l'hydrogène, si enfin les expériences que je viens de décrire concernant l'affinité n'avaient pas prouvé qu'une pression de 100 atmosphères ne favorise nullement les combinaisons de l'oxigène, l'on pourrait s'imaginer que l'eau, simplement introduite dans les pores se serait décomposée dans l'intérieur et que ce serait à la dilatation de l'hydrogène que l'on doit l'augmentation de volume du plomb et la permanence de l'eau (décomposée) dans la masse. Mais les raisons alléguées prouvent que cette hypothèse est inadmissible, et que l'eau introduite dans le plomb n'y est pas décomposée. Pour expliquer la dilatation il ne me restait plus que l'hypothèse que le plomb est plus facile à dilater qu'à comprimer, de sorte que la même force appliquée dans un sens pour dilater ce corps surmonte la même force appliquée en sens contraire pour le comprimer, hypothèse qui me parut difficile à admettre.

Pour lever cette incertitude je me décidai à comprimer dans l'air une boule de plomb, fondu et non exposé à l'action du marteau, en employant l'instrument fig. VI, dont le petit vase *a* fut adapté à cet effet.

*Avant la compression.*

| | |
|---|---|
| Poids de la boule dans l'air . . . . . . . . . . . . . | 226,9777 gr. |
| Poids de la boule dans l'eau . . . . . . . . . . . . | 206,8000 |
| Poids du cheveu pour la pesée hydrostatique . . . . . . | 0,0033 |
| Température de l'eau pendant la pesée . . . 18,2° C. | |

*Après la compression.*

| | |
|---|---|
| Poids de la boule dans l'air . . . . . . . . . . . . . | 226,9737 |
| Poids de la boule dans l'eau . . . . . . . . . . . . | 206,8000 |
| Poids du cheveu pour la pesée hydrostatique . . . . . . | 0,0033 |
| Température de l'eau pendant la pesée . . . 18,2° C. | |
| Poids de l'eau déplacée avant la compression . . . . . . | 20,1810 |
| — — — — après — — — . . . . . . | 20,1770 |

Ces pesées nous ont appris que le poids de la boule pesée dans l'air est de 0,004 gr. plus petit après la compression qu'auparavant, ce qui ne peut avoir eu lieu que par accident, la manipulation de la boule lui ayant apparemment fait perdre une partie de l'oxide que le plomb mouillé (exposé à l'eau et à l'air) produit toujours. Cette perte se retrouve exactement dans la pesée dans l'eau, cette pesée ayant été faite avant la pesée dans l'air; ce qui prouve qu'elle a été réelle et non pas une faute d'observation *).

Cette expérience nous fournit le résultat frappant qu'*une pression dans l'air de* 100 *atmospères ne produit pas la moindre compression sur la boule de plomb.*

Cependant, comme la différence de poids absolu, que nous venons de signaler, pourrait faire regarder cette expérience comme impure à cet égard, je me décidai à soumettre une boule d'étain à la même compression de 100 atmosphères dans l'air, ce métal étant beaucoup moins sujet à l'oxidation que le plomb, et la boule par conséquent moins sujette à un accident de ce genre.

---

*) Dans toutes ces pesées nous avons toujours eu soin d'employer les mêmes poids pour les pesées du même corps, ne faisant qu'ajouter ou soustraire les petits poids nécessaires, pour ne point laisser de doute relativement aux petites anomalies qui pouvaient exister dans nos poids.

*Avant la compression.*

| | |
|---|---|
| Poids de la boule dans l'air . . . . . . . . . . . . . . | 148,1233 gr. |
| Poids de la boule dans l'eau . . . . . . . . . . . . . | 127,8600 |
| Poids du cheveu pour la pesée hydrostatique . . . . . . | 0,0033 |
| Température de l'eau pendant la pesée . . . 17,6° C. | |

*Après la compression.*

| | |
|---|---|
| Poids de la boule dans l'air . . . . . . . . . . . . . . | 148,1233 |
| Poids de la boule dans l'eau . . . . . . . . . . . . . | 127,8600 |
| Poids du cheveu pour la pesée hydrostatique . . . . . . | 0,0033 |
| Température de l'eau pendant la pesée . . . 17,6° C. | |
| Poids de l'eau déplacée avant la compression . . . . . . | 20,2666 |
| Poids de l'eau déplacée après la compression . . . . . . . | 20,2666 |

Cette expérience, faite avec tout le soin possible pour éviter les erreurs de tout genre, met hors de doute qu'une pression dans l'air de 100 atmosphères ne condense pas d'une quantité sensible une balle de plomb ou d'étain. Il ne restait plus qu'à savoir si en général une pression de 100 atmosphères peut condenser d'une quantité sensible une masse du même métal, quoiqu'il soit bien connu d'ailleurs que ces métaux soumis à l'action du marteau, du laminoir et de la filière gagnent en densité. On pourrait croire que les forces appliquées de ces trois manières sont plus considérables que celles que nous avons appliquées dans notre appareil, d'autant plus qu'on ne peut pas déterminer la grandeur des surfaces sur lesquelles celles-là agissent immédiatement. Il faut donc une expérience comparative où la force de 100 atmosphères soit *immédiatement* appliquée sur une surface de métal égale à celle qui avait été exposée à *l'action médiate* de la même force dans nos expériences.

Après plusieurs tentatives infructueuses pour exécuter cette expérience dans un espace libre, je me décidai à la méthode suivante: *ab* (Fig. IX.) est un cylindre creux d'acier assujetti par 6 vis à une plaque *de* du même métal. Le diamètre intérieur est de 8,484 lignes, de sorte que sa coupe horizontale est égale à la moitié de la surface de notre boule de plomb. L'objet de la compression est le cylindre de plomb *c* bien alaisé dans le cylindre creux d'acier; sa hauteur est 3 lignes, égale

au rayon de notre boule. Sur ce cylindre de plomb se place le cylindre *f* d'acier également bien alaisé dans le cylindre creux. Cet instrument ainsi préparé se place sur la couronne du grand piston de l'appareil de compression rempli d'eau, et la grande vis ouvrière agit immédiatement sur le cylindre *f* d'acier. La petite pompe chargée de son poids, et le thermomètre, indiquent le moment où la pression est égale à 100 atmosphères.

*Avant la compression.*

Poids du cylindre de plomb dans l'air . . . . . . . . . 312, 725 gr.
— — — — — dans l'eau . . . . . . . . . 283, 700
Température de l'eau pendant la pesée . . . 19,9° C.

*Après la compression.*

Poids du cylindre de plomb dans l'air . . . . . . . . . 312, 527
— — — — — dans l'eau . . . . . . . . . 284, 000
Température de l'eau pendant la pesée . . . 20,2° C.

Dans cette expérience le fil de suspension pour les pesées dans l'eau se trouvait sur la balance pendant les pesées dans l'air.

Pesanteur spécifique avant la compression . . . . . . . 10,77433
— — — après la compression, réduite à la température 19,9° . . . . . . . . . . 10,94972

Donc le plomb, comprimé par 100 atmosphères, a gagné 0,17539 en densité.

Ainsi une pression de 100 atmosphères a augmenté la densité d'un cylindre de plomb d'une quantité très sensible, tandis que la même compression exercée sur une sphère de plomb, dont la masse n'est que $\frac{2}{3}$ de celle du cylindre, n'a opéré aucune condensation sensible.

Nous ne pouvons chercher la cause de cette différence remarquable que dans la manière dont la force était appliquée. Dans le cas de la boule elle agissait sur tous les points de la surface dans la direction du centre et partout avec la même énergie; c'était une pression symmétrique et égale en tout sens, que l'on peut considérer comme agissant sur autant de coins que la surface contient de molécules, qui résistent à la manière des voûtes. Dans le cas du cylindre au contraire la force était appliquée sur tous les points en directions parallèles, qui permettaient aux molécules

de se rapprocher. Au reste il est possible qu'une force beaucoup plus considérable que 100 pressions atmosphériques produirait une condensation sensible dans la sphère de plomb.

Retournons à présent au phénomène de la dilatation du plomb par l'eau introduite dans son intérieur. Nous venons de voir que la compression dans l'air, égale sur tous les points de la surface sphérique, ne produisit aucune condensation; il est donc concevable que l'eau, introduite et comprimée dans l'intérieur, produise par son élasticité une dilatation, puisque cette élasticité, agissant de l'intérieur à l'extérieur, a plus de facilité à faire ressortir les molécules que la pression extérieure à les faire entrer, conformément à la théorie du coin.

Les autres métaux solides, l'or excepté, étant plus durs que le plomb et l'étain, j'ai cru inutile de répéter sur des boules de ces métaux nos expériences de compression, doutant qu'elles pussent mener à aucun résultat nouveau.

Je finis par observer que l'explication que je viens de livrer de ces phénomènes ne doit être considérée que comme un aperçu. Une profonde analyse mathématique doit être réservée aux mathématiciens, si tant est que l'analyse puisse être appliquée à ces phénomènes sans s'appuyer sur des hypothèses non démontrées relativement à la figure et à l'arrangement naturel des molécules.

## RÉSULTATS.

Toute compression, exercée sur la boule d'un thermomètre, en diminue le volume. Cette diminution a été observée jusqu'à une pression de 100 atmosphères et est encore très sensible à $\frac{1}{2}$ atmosphère de pression.

Ces diminutions sont en raison des pressions. D'où il suit que lorsqu'on fait des expériences thermométriques sous la cloche de la pompe pneumatique, il existe toujours une petite erreur d'observation, qui, pour le vide parfait, peut aller à 0,18°R. ou 0,225°C., plus ou moins, selon les dimensions de la boule thermométrique.

Toutes les expériences pour explorer la température de la mer à de grandes profondeurs au moyen du thermométrographe de Sixt ont fourni des résultats très erronnés. Les températures observées sont trop grandes.

La loi de Mariotte est vraie, au moins jusqu'à 100 pressions atmosphériques.

L'absorption de l'air par l'eau sous différentes compressions est en raison des pressions, au moins jusqu'à 100 pressions atmosphériques.

Le thermomètre est un excellent indicateur pour de hautes pressions.

Le verre est compressible. Sa compressibilité a été observée jusqu'à une compression de 100 atmosphères et peut être rendue décidemment sensible à une compression d'une demie atmosphère.

La compressibilité du verre peut être admise comme proportionelle aux pressions, au moins jusqu'à 100 atmosphères.

Une compression de 100 atmosphères, exercée sur une portion d'environ $8\frac{1}{2}$ livres d'eau, n'augmente pas la température de cette eau d'une quantité sensible.

Le rayonnement mutuel et continuel du calorique dans un espace où tous les points sont à la même température et sous la même pression, est une hypothèse erronnée.

La pression, comme telle, ne favorise nullement les combinaisons du gas oxygène avec ses bases, au moins jusqu'à 100 pressions atmosphériques; et quand elle paraît les favoriser, ce n'est qu'au calorique dégagé par la compression que nous devons ces combinaisons.

Une boule de plomb ou d'étain comprimée dans l'air par une force de 100 atmosphères également sur tous les points de sa surface, ne se condense pas de la plus petite quantité sensible, tandis qu'un cylindre de plomb dont la base est égale à la moitié de la surface de la sphère et la hauteur égale au rayon, comprimé dans la direction de son axe par la même force, gagne sensiblement en densité.

Une boule de plomb, comprimée dans l'eau par une pression de 100 atmosphères augmente en même tems de poids absolu et de volume.

---

Avis. Comme je ne partage point l'opinion de l'illustre auteur de ce mémoire au sujet de plusieurs conséquences et assertions qui y sont exposées, je ne crois point superflu de déclarer ici que je me suis fait un plaisir et un devoir d'assister mon respectable maître dans les expériences qui font l'objet de ce mémoire, mais que je n'ai pris aucune part ni à la déduction des résultats, ni à la rédaction du mémoire même. Par cette déclaration formelle je désire prévenir l'erreur dans laquelle le lecteur superficiel peut être induit par l'inspection du titre répété à la tête de chaque page: *Parrot et Lenz — Expériences de forte compression.*

L'Académicien extraordinaire E. Lenz.

# ÜBER DIE
# LEITUNGSFÄHIGKEIT DER METALLE
## FÜR DIE
## ELECTRICITÄT, BEI VERSCHIEDENEN TEMPERATUREN;

VON

E. LENZ.

---

(Gelesen den 7. Juni 1833.)

Der berühmte *Humphry Davy* war der Erste, welcher zeigte, dass die Leitungsfähigkeit der Dräthe für die Electricität von ihrer Temperatur abhängig sei, und zwar so, dass die Leitungsfähigkeit abnehme, wenn die Temperatur zunimmt. Den auffallendsten Beweis dafür gab er durch folgenden bekannten Versuch. Er schloss die Pole einer kräftigen Voltaschen Säule durch einen Drath von der Dimension und Leitungsfähigkeit, dass derselbe eben anfing durch den electrischen Strom roth zu glühen; als er hierauf eine Stelle des Drathes während dieses Zustandes durch eine darunter gehaltene Lampe zum Weissglühen brachte, so hörte der übrige Theil des Drathes gänzlich auf zu glühen. Durch die weissglühende Stelle nämlich ward der electrische Strom so sehr geschwächt, dass er nicht mehr im Stande war, wie früher, den Drath rothglühend zu erhalten. — Erkältete dagegen *Davy* eine Stelle des rothglühenden Drathes durch Eis oder erkältenden Luftstrom, so fing der übrige Drath augenblicklich an stärker zu glühen, weil die bessere Leitung der erkälteten Stelle dem Strom einen geringern Leitungswiderstand entgegenstellte als

früher, der Strom also kräftiger wirken konnte. Auf diesen Versuch und einige ihm ähnliche sich stützend haben alle spätern Lehrbücher und Abhandlungen über diesen Gegenstand den Satz der schlechtern Leitungsfähigkeit der Metalle für die Electricität bei erhöhter Temperatur aufgenommen, ohne dass meines Wissens irgend jemand versucht hätte die Grösse der Abnahme der Leitungsfähigkeit mit dem Wachsthum der Temperatur numerisch zu bestimmen. Die Ursache hiervon lässt sich leicht darin nachweisen, dass die bisher angewandten genausten Methoden der Bestimmung der Kraft eines electrischen Stroms zur Ermittelung des in Frage stehenden Punktes nicht wohl ausreichten. Es können diese Methoden nämlich, wenn sich einigermassen genaue Resultate aus ihnen herleiten lassen sollen, füglich auf zwey reducirt werden, auf die Methode der galvanischen Drehwage und auf die der Oscillationen; die erste wurde besonders von *Ohm* bei seinen zahlreichen Arbeiten im Gebiete des Galvanismus, die letztere von *Fechner* in seinen galvanischen Massbestimmungen angewandt; beide aber sind unzulässlich bei der Bestimmung der Leitungsfähigkeit der Metalldräthe bei verschiedenen Temperaturen aus mehreren Gründen, vorzüglich aber, weil sie eine zu lange Beobachtungszeit erfordern, während welcher es unmöglich ist die Dräthe bei einer und derselben Temperatur zu erhalten, wenn man sich nicht etwa blos mit den constanten Temperaturen des Frier- und Siedepunktes begnügen will.

Durch die Entdeckung *Faraday's*, dass der Magnet unter geeigneten Umständen einen augenblicklichen electrischen Strom hervorzubringen vermöge, ist uns eine dritte Methode angewiesen den fraglichen Punkt zu ermitteln, die den frühern aus folgenden 4 Gründen bei weitem vorzuziehen ist:

1) Der electrische Strom, welcher in einem, den cylindrischen Anker eines Magneten spiralförmig umwindenden, Drathe durch Abreissen desselben vom Magneten erregt wird, kann sehr constant von derselben Kraft erhalten werden, wenigstens wenn schon mehrere Abreissungen vorgenommen worden sind, wie solches aus einer frühern Abhandlung, die ich der Akademie vorlegte und die in ei-

nem der letzten Hefte ihrer Memoiren abgedruckt ist *), zur Genüge erhellt und aus vorliegender Abhandlung noch klarer werden wird.

2) Der Apparat zu unsern Versuchen kann so construirt werden, dass der electrische Strom, der auf diese Weise erregt wird, nur durch metallische Leiter strömt, wodurch er einer genaueren Berechnung unterworfen werden kann, als wenn er auch durch Flüssigkeiten hindurch müsste, da die Gesetze des Leitungswiderstandes der Metalle gegen den electrischen Strom, insofern er von den Dimensionen derselben abhängig ist, als vollkommen ausgemittelt betrachtet werden können, besonders in neuerer Zeit durch *Ohm's* und *Fechner's* zahlreiche Versuche.

3) Die augenblickliche Dauer des Stroms lässt eine genaue Berechnung der Kraft, die der Strom auf die Doppelnadel des Multiplicators ausübt, zu, da die Windungen des letzteren auf die Nadel immer in einer und derselben Lage einwirken, nämlich in der, wo die Nadel in Ruhe ist. Ich habe die einfache Formel dafür in der oben erwähnten Abhandlung entwickelt.

4) Die Beobachtung nimmt nur einen Augenblick Zeit, so dass sie für jeden beliebigen Moment des Steigens der Temperatur des zu prüfenden Drathes angestellt werden kann.

Aus diesen Gründen glaubte ich jetzt mit Erfolg zur Ermittelung des Einflusses der Temperatur auf die Leitungsfähigkeit der Metalle für Electricität schreiten zu können und gegenwärtige Abhandlung enthält meine Versuche hierüber und die Resultate, die ich aus ihnen hergeleitet habe, wobei ich mich fürs erste auf 5 Metalle beschränkte, die am meisten bei galvanischen Ketten zu Leitungsdräthen gebraucht werden, nämlich Silber, Kupfer, Messing, Eisen und Platin.

Der Apparat, dessen ich mich bediente, ist dem in meiner früheren Abhandlung beschriebenen ganz ähnlich. Der Multiplicator bestand aus einem Kupferdrathe vom Durchmesser = 0,061 engl. Zoll **), er macht in 2 Reihen über einan-

*) Mémoires de l'Académ. Impér. d. sciences de St.-Pétersbourg; Sciences mathém., phys. et natur. T. II. pag. 427.

**) Auch in dieser Abhandlung sind alle Maasse in englischen Zollen gegeben.

der im Ganzen 32 Windungen, war gut mit Seide besponnen und hatte mit den Leitungsdräthen zusammen, die mit ihm ein Stück ausmachten *), eine Länge von 827",2. — Der Hufeisenmagnet war ebenfalls der schon früher gebrauchte und beschriebene, er trug 22 Pf. — Die electromotorische Spirale, die den cylindrischen Anker umgab, hatte 25 Windungen, war mit ihren freien Enden 180" lang und 0,044" dick. — Ein Ende des electromotorischen Drathes ward unmittelbar mit dem Leitnngsdrathe verbunden, zwischen den andern Enden beider ward der Drath hineingebracht, dessen Leitungsfähigkeit für verschiedene Temperaturen geprüft werden sollte. Ich habe schon in meiner früheren Abhandlung bemerkt, dass ein mehrmaliges festes Umeinanderwinden der zu verbindenden Dräthe eine vollkommene Leitung zulasse und habe mich nochmals davon überzeugt, indem ich diese Art der Verbindung mit der durch Eintauchen in Quecksilber verglich; in beiden Fällen war die erhaltene Abweichung der Magnetnadel des Multiplicators, unter sonst ganz gleichen Umständen, ganz und gar dieselbe. — Die Länge des zu prüfenden Drathes ward jedesmal genau gemessen, dann um einen Cylinder zu einer dichten Spirale gewunden und, nachdem der Cylinder herausgezogen war, auf die Kugel eines Greinerschen Thermometers Reaum. geschoben, welches mit einer Scala bis zum Siedepunkt des Quecksilbers hinauf versehn war; die Scala war auf Papier getheilt und in einer Glasröhre eingeschlossen, wie dieses bei den Thermometern von Greiner gewöhnlich der Fall ist. — Das Thermometer wurde berichtigt durch Vergleichung mit einem Normalthermometer und auch die Correction, wegen ungleichförmiger Ausdehnung des Quecksilbers über den Siedepunkt des Wassers hinaus, nach *Dulong* und *Petit*, berücksichtigt. Die im Folgenden angegebenen Temperaturen sind alle bereits auf diese Weise corrigirt worden. — Das Thermometer nebst der darauf steckenden Drathspirale wurde hierauf in ein cylindrisches, kupfernes, mit Baumöl bis auf $\frac{2}{3}$ der Höhe gefülltes, Gefäss von 5" Höhe

---

*) Daher im Folgenden die Ausdrücke „Multiplicatordrath" und „Leitungsdrath" ein und dasselbe bedeuten.

und 4″ Durchmesser gesteckt durch Oeffnungen, die zu dem Zwecke in dem Deckel des Gefässes angebracht waren, so dass aus demselben nur die Thermometerscala und die beiden Enden des zur Cylinderspirale gewundenen, zu prüfenden Drathes hervorragten, welche letztere mit den übrigen Dräthen, durch welche der electrische Kreislauf gehn sollte, auf gehörige Weise verbunden wurden. — Damit die Dämpfe des sich erhitzenden Oehles mir beim Beobachten nicht beschwerlich fallen möchten, wurde der Deckel des kupfernen Gefässes fest anschliessend gemacht und die Dämpfe wurden durch ein gebogenes kupfernes Rohr in einen Glaskolben geführt, der von Eisstücken umgeben war. Hierauf ward das Oel mittelst einer Spirituslampe erhitzt bis zu der Temperatur, deren Einfluss man gerade bestimmen wollte und die Abweichung durch Abreissung des Ankers mit seiner electromotorischen Spirale in dem Augenblick hervorgebracht und beobachtet, in welchem das Thermometer bis auf den bestimmten Punkt stieg; hierauf ward die Lampe entfernt und dieselbe Beobachtung bei derselbeo Temperatur, aber beim Sinken des Thermometers durch allmäliges Erkalten der Oelmasse, angestellt. Endlich wurden beide Beobachtungen nochmals wiederholt, so dass bei jeder Temperatur 4 Beobachtungen angestellt wurden, 2 bei steigender und 2 bei sinkender Temperatur, wodurch ich die Fehler, die aus einer ungleichen Erwärmung der Spirale und des Thermometers entstehn würden, so viel wie möglich aufzuheben suchte. Indem ich nun auch zu gleicher Zeit, wie ich in meiner früheren Abhandlung solches ausführlicher gezeigt habe, diese 4 Beobachtungen so anstellte, dass 2 an dem einen und 2 an dem andern Ende des Multiplicatorzeigers beobachtet und bei zweien die Ablenkung nach rechts, bei zweien aber nach links hervorgebracht wurden (durch Umkehren des Magneten beim Anlegen an den Anker), so eliminirte ich zugleich die Fehler der Excentricität der Nadel und einer etwanigen Drehung der Coconfäden, an welchen die Doppelnadel hing.

Die Beobachtungsreihe für die Leitungsfähigkeit eines jeden Metalls bei verschiedenen Temperaturen fing ich mit der Bestimmung der Kraft des Stroms an, wie sie sich blos für den electromotorischen und galvanometrischen Drath, ohne Zwi-

schenbringung des zu prüfenden Drathes, ergab, und beschloss sie mit einer ähnlichen Beobachtung, wobei ich die Temperatur der Leitungsdräthe mit der des Zimmers als gleich annahm; die Angabe derselben, wie sie sich im Mittel aus allen Thermometerablesungen, die nach je 4 Beobachtungen des Galvanometers an einem besonders dazu angebrachten Thermometer vorgenommen wurden, ergab, findet sich bei jeder der nachfolgenden Versuchstabellen angemerkt. — Aus den Beobachtungen am Anfang und Ende einer jeden Reihe und bei Weglassung des zu prüfenden Drathes aus dem Umkreise des Stroms, ist zu gleicher Zeit zu ersehn, dass in den meisten Fällen der Magnet so gut wie gar nichts an Kraft verloren hat durch die vielen dazwischen vorgenommene Abreissungen. Nur beim Silberdrathe ist eine etwas bedeutende Schwächung zu bemerken von einem Grade; dagegen beim Kupferdrathe z. B. eine Steigerung der Kraft des Magneten stattgefunden zu haben scheint; indessen kann die geringe Verschiedenheit des Resultats auch in einer Veränderung der magnetischen Erdkraft, in einer geringen Veränderung der Leitungsfähigkeit der Kupferdräthe, da in der That die Temperatur sich im Laufe des Tages um etwas änderte u. s. w., ihren Ursprung haben. Ich habe immer das Mittel aus der Abweichung am Anfange und am Ende der Reihe als die wahre Abweichung angenommen und mit diesem Werthe in Rechnung gebracht.

Für die Berechnung der Leitungsfähigkeit der Dräthe bei verschiedenen Temperaturen, aus den beobachteten Ablenkungen der Multiplicatornadel, wandte ich folgendes Verfahren an. Ich reducirte zuerst jeden Drath auf den Querschnitt des Multiplicatordrathes nach dem Satze, dass sich die Leitungswiderstände der Dräthe umgekehrt wie ihre Querschnitte verhalten; nach dieser Reduction können die Leitungswiderstände durch die Längen der Dräthe ausgedrückt werden (da sie denselben proportional sind), dividirt durch ihre Leitungsfähigkeit. Ich nehme für jede Reihe die Leitungsfähigkeit des kupfernen Multiplicator- und electromotorischen Drathes als Einheit an und nenne die Summe der reducirten Längen beider $= L$, so drückt also auch $L$ ihren Leitungswiderstand aus; die auf denselben Querschnitt des Multiplicatordrathes reducirte Länge des zu prüfenden

Drathes heisse $\lambda$, sein Leitungsvermögen $= \gamma$. Ferner heisse die electromotorische Kraft der Spirale um den Anker für unsern Magneten $= A$; die beobachtete Ablenkung ohne Zwischenbringung des zu prüfenden Drathes $= a$, dieselbe nach Dazwischenbringung dieses letztern bei einer gewissen beobachteten Temperatur $= b$. Die Stärke des Stroms für den ersten Fall ist $\frac{A}{L}$, für den zweiten Fall $\frac{A}{L + \frac{\lambda}{\gamma}}$ und hieraus ergeben sich, wie ich in meiner früheren Abhandlung ausführlich gezeigt habe, die beiden Gleichungen

$$\frac{A}{L} = p \cdot \sin. \left(\tfrac{1}{2} a\right)$$

$$\frac{A}{L + \frac{\lambda}{\gamma}} = p \cdot \sin. \left(\tfrac{1}{2} b\right)$$

wo $p$ einen zu bestimmenden Coëfficienten bedeutet, der aber, so wie das ebenfalls noch zu bestimmende $A$, verschwindet, sobald wir die erste Gleichung durch die zweite dividiren; wir bekommen alsdann die Gleichung

$$\frac{L + \frac{\lambda}{\gamma}}{L} = \frac{\sin. \frac{1}{2} a}{\sin. \frac{1}{2} b}$$

$$\gamma = \frac{\lambda \cdot \sin. \frac{1}{2} b}{L (\sin. \frac{1}{2} a \cdot - \sin. \frac{1}{2} b)} = \frac{\lambda \cdot \sin. \frac{1}{2} b}{2 L \cos. \frac{1}{4} (a + b) \cdot \sin. \frac{1}{4} (a - b)}$$

der letze Ausdruck für $\gamma$ ist für die logarithmische Berechnung bequemer.

Nach dieser Formel sind nun die in den nachfolgenden Versuchsreihen angegebenen Werthe von $\gamma$ berechnet, wo sich aber für jede Reihe die $\gamma$ auf eine andre Einheit beziehen, nämlich auf die der Leitungsfähigkeit des electromotorischen und galvanometrischen Kupferdrathes bei der Temperatur, die sie während der Reihe im Mittel hatten, und die daher jedesmal angegeben ist. Die Reduction auf ein und dieselbe Einheit wird nachher, beim Zusammenfassen der Resultate für die verschiedenen Metalle, vorgenommen werden.

Um die auf den Multiplicatordrath reducirten Längen der verschiedenen Dräthe erhalten zu können, wurden von jeder Sorte des Kupferdrathes 2 Fuss abgewogen, wobei sich ergab:

| | | |
|---|---|---|
| Das Gewicht von 2 Fuss des Multiplicatordrathes | . . . . . . | 166″, 1 Gr. |
| — — — — des electromotorischen Drathes | . . . | 83, 9 — |
| — — — — des zu prüfenden Drathes | . . . . . . | 41, 5 — |

Das Verhältniss der Gewichte ist auch zugleich das der Querschnitte, da alle Dräthe von Kupfer waren; die Dräthe aus den übrigen Metallen waren mit dem letzten der gewogenen durch ein und dasselbe Loch gezogen, also mit ihm genau von demselben Querschnitte.

| | | |
|---|---|---|
| Die Länge des Multiplicatordrathes blieb unverändert | . . . | = 827″, 20 Gr. |
| — — electromotorischen Drathes | . . . . . . . . | = 180″, 00 — |

Um den letztern auf den Querschnitt des ersteren zu reduciren, muss er mit $\frac{166,1}{83,9}$ multiplicirt werden, wodurch wir erhalten

| | | |
|---|---|---|
| reducirte Länge des electromotorischen Drathes | . . . . . | = 356″, 35 Gr. |
| hierzu addirt Länge des Multiplicatordrathes | . . . . . . | = 827, 20 — |
| ergiebt sich ihre Summe oder | . . . | $L$ = 1183,55 Gr. |

Die Länge der verschiedenen dazwischengebrachten Drathsorten war verschieden; um sie jedesmal auf den Durchschnitt des Multiplicatordrathes zu reduciren müssen die Längen derselben mit $\frac{166,1}{41,5}$ multiplicirt werden.

Nachdem das Obige vorausgeschickt worden ist, wird es leicht seyn die nun folgenden Versuchsreihen selbst zu verstehen.

### Versuche mit dem Silberdrathe.

Länge des Drathes = 131″, 7, folglich reducirte Länge desselben = $\frac{131,7 \times 166,1}{41,5.}$

oder $\lambda = 527, 12$.

Temperatur der Leitungsdräthe, des electromotorischen und Multiplicatordrathes im Mittel während der ganzen Versuchsreihe = 13, 2 R.

Ohne zwischengebrachten Silberdrathe erhielt ich

| | Abweichungen. 1 | 2 | 3 | 4 | Mittel. | |
|---|---|---|---|---|---|---|
| Beim Beginn der Reihe | 75°, 6 | 73°, 4 | 75°, 6 | 79°, 4 | 76, 00 | folgl. $a = 75° \, 31', 5$. |
| Beim Ende der Reihe | 75, 1 | 72, 2 | 74, 7 | 78, 2 | 75, 05 | |

Nach Zwischenbringung des Silberdraths zwischen den Multiplicator- und electromotorischen Drath ergaben sich bei den beistehenden Temperaturen folgende Abweichungen der Multiplicatornadel

| Therm. Réaum. | Abweichung der Nadel. 1 | 2 | 3 | 4 | Mittel. | $\gamma$ |
|---|---|---|---|---|---|---|
| 0,5 | 56°, 9 | 55°, 2 | 57, 2 | 59,7 | 57° 12′,0 | 1, 59500 |
| | 56, 7 | 55, 1 | 57, 1 | 59,7 | | |
| 15,2 | 56, 3 | 54, 5 | 57, 0 | 59,0 | 56 = 37, 5 | 1, 52990 |
| | 56, 4 | 54, 5 | 56, 7 | 58,6 | | |
| 31,0 | 55, 4 | 53, 5 | 55, 4 | 57,7 | 55 = 26, 2 | 1, 41359 |
| | 55, 0 | 53, 5 | 55, 1 | 57,9 | | |
| 47,5 | 54, 0 | 52, 8 | 54, 7 | 57,0 | 54 = 37,5 | 1, 33126 |
| 63,7 | 53, 6 | 52, 0 | 54, 1 | 55,6 | 53 = 49,5 | 1, 26213 |
| 79,7 | 52, 7 | 51, 0 | 52, 9 | 55,3 | 52 = 58,5 | 1, 19383 |
| 94,9 | 51, 9 | 50, 0 | 52, 1 | 54,4 | 52 = 6,0 | 1, 12905 |
| 110,1 | 51, 1 | 49, 1 | 51, 0 | 52,9 | 51 = 1,5 | 1, 05601 |
| 125,3 | 50, 3 | 48, 3 | 50, 3 | 52,4 | 50 = 19,5 | 1, 01181 |
| 139,7 | 49, 8 | 47, 7 | 49, 3 | 51,3 | 49 = 31,5 | 0, 96390 |
| 155,1 | 48, 7 | 47, 6 | 48, 6 | 50,5 | 48 = 51,0 | 0, 92624 |
| 169,6 | 48, 0 | 46, 5 | 48, 3 | 50,0 | 48 = 12,0 | 0, 89134 |

Um das Gesetz der Abnahme der Leitungsfähigkeit des Silbers für die Electricität bei Zuuahme der Temperatur aus diesen Werthen herzuleiten, bediente ich mich der Formel

$$\gamma_n = x + y \cdot n + z \cdot n^2$$

wo $\gamma_n$ die Leitungsfähigkeit des Silbers bei $n$ Grad des Reaumürschen Thermometers, $x$ die Leitungsfähigkeit desselben bei $0°$ bedeutet und wo $y$ und $z$ Coefficienten sind, die aus den Gleichungen selbst für verschiedene $n$ bestimmt werden müssen. Aus den 12 Werthen für $n$ und für $\gamma_n$ müssten nun nach der Methode

der kleinsten Quadrate $x$, $y$ und $z$ bestimmt werden; um aber die weitläuftige Rechnung zu vermeiden, ziehe ich zuerst die erste Gleichung von der zweiten, die zweite von der dritten u.s.w. ab, wodurch $x$ verschwindet und 11 neue Gleichungen entstehen von der Form

$$o = m + ay + bz$$

die nach der bekannten Auflösung der kleinsten Quadrate geben

$$y = -\frac{\int ma \int bb - \int mb \int ba}{\int aa \int bb - \int ba \int ba}$$

$$z = -\frac{\int mb \int aa - \int ma \int ba}{\int aa \int bb - \int ba \int ba}$$

Wenn auch auf diese Weise auf Kosten der Genauigkeit an Zeit gewonnen wird, so möchte solches gerade bei diesen Beobachtungen weniger zu bedeuten haben, da dieselben doch noch Fehlern von mehreren Minuten unterworfen sind.

Die 11 Gleichungen, aus welchen $y$ und $z$ auf obige Art gefunden worden, sind

$$0 = 0{,}06510 + 14{,}7 \cdot y + 230{,}79 \cdot z$$
$$0 = 0{,}11631 + 15{,}8 \cdot y + 729{,}96 \cdot z$$
$$0 = 0{,}08233 + 16{,}3 \cdot y + 1276{,}26 \cdot z$$
$$0 = 0{,}06913 + 16{,}4 \cdot y + 1820{,}44 \cdot z$$
$$0 = 0{,}06830 + 16{,}0 \cdot y + 2294{,}50 \cdot z$$
$$0 = 0{,}06478 + 15{,}2\, y + 2654{,}40 \cdot z$$
$$0 = 0{,}09304 + 15{,}2 \cdot y + 3116{,}10 \cdot z$$
$$0 = 0{,}04420 + 15{,}2 \cdot y + 3577{,}70 \cdot z$$
$$0 = 0{,}04791 + 14{,}4 \cdot y + 3916{,}50 \cdot z$$
$$0 = 0{,}03776 + 15{,}4 \cdot y + 4539{,}10 \cdot z$$
$$0 = 0{,}03490 + 14{,}5 \cdot y + 6065{,}40 \cdot z$$

Hieraus ergeben sich

$$y = -\ 0{,}005349873$$
$$z = +\ 0{,}000009434674$$

Setze ich diese Werthe in die allgemeine Gleichung

$$\gamma_n = x + yn + zn^2$$

$$\text{oder } x = \gamma_n - (yn + zn^2)$$

so erhalte ich 12 verschiedene Werthe von $x$, aus welchen das Mittel giebt

$$x = 1,599298$$

Folglich ist die Formel für die Leitungsfähigkeit des Silbers bei der Temperatur $n$

$$\text{oder } \gamma_n = 1,59930 - 0,005849873 \cdot n + 0,000008434674 \cdot n^2$$

welche Leitungsfähigkeit auf die des Kupfers bei 13,2 R. als Einheit bezogen ist.

Berechne ich nun die verschiedenen Werthe von $\gamma_n$ bei den beobachteten Temperaturen, und vergleiche sie mit den beobachteten, so erhalte ich folgende vergleichende Tabelle

| $\gamma_n$ berechnet | $\gamma_n$ beobachtet | Differenz. |
|---|---|---|
| 1,59637 | 1,59500 | + 0,00137 |
| 1,51256 | 1,52990 | — 0,01734 |
| 1,42701 | 1,41359 | + 0,01342 |
| 1,34371 | 1,33126 | + 0,01245 |
| 1,26494 | 1,26213 | + 0,00281 |
| 1,19299 | 1,19383 | — 0,00084 |
| 1,12911 | 1,12905 | + 0,00006 |
| 1,06959 | 1,05601 | + 0,01358 |
| 1,01443 | 1,01181 | + 0,00252 |
| 0,96623 | 0,96396 | + 0,00233 |
| 0,91894 | 0,92624 | — 0,00730 |
| 0,86821 | 0,89134 | — 0,02313 |

## Versuche mit dem Kupferdrathe.

Länge des Kupferdrathes = 133″,6, folgl. reducirte Länge $= \frac{133,6 \times 166,1}{41,5}$

$$\text{oder } \lambda = 534,72$$

Ohne zwischengebrachten Kupferdrath erhielt ich:

| | Abweichungen. 1 | 2 | 3 | 4 | Mittel. | |
|---|---|---|---|---|---|---|
| Beim Beginn der Reihe | 69,0 | 67,2 | 67,8 | 72,9 | 69,225 | folgl. $a = 69° \,\text{-}\, 33',0$ |
| Am Ende der Reihe | 70,1 | 67,5 | 68,9 | 73,0 | 69,875 | |

Die Abweichungen nach Dazwischenbringung des zu prüfenden Kupferdrathes bei verschiedenen Temperaturen sind in nachfolgender Tafel enthalten, so wie die daraus hergeleiteten Leitungsfähigkeiten oder $\gamma$. — Temperatur der Leitungsdräthe $= 15^\circ,1$ R.

| Thermom. Reaum. | Abweichungen. | | | | Mittel. | $\gamma$ |
|---|---|---|---|---|---|---|
| | 1 | 2 | 3 | 4 | | |
| 2,60 | 48,6 | 46,6 | 48,3 | 50,2 | 48° = 33′,0 | 1,16640 |
| 20,80 | 47,8<br>47,7 | 45,9<br>45,7 | 47,3<br>47,5 | 48,9<br>48,6 | 47 = 33,7 | 1,09023 |
| 39,50 | 46,9 | 45,0 | 46,3 | 48,1 | 46 = 34,5 | 1,02120 |
| 59,50 | 46,0 | 43,9 | 45,6 | 47,1 | 45 = 39,0 | 0,96064 |
| 79,40 | 45,0 | 43,0 | 44,7 | 46,8 | 44 = 52,5 | 0,91394 |
| 98,80 | 44,2 | 42,6 | 43,6 | 46,9 | 44 = 19,2 | 0,88234 |
| 118,20 | 43,2 | 42,1 | 42,5 | 45,2 | 43 = 15,0 | 0,82496 |
| 137,40 | 42,8 | 41,5 | 42,2 | 43,5 | 42 = 30,0 | 0,78284 |
| 156,70 | 42,0 | 40,2 | 41,8 | 43,1 | 41 = 46,5 | 0,75337 |
| 175,80 | 40,6 | 38,6 | 40,0 | 42,1 | 40 = 19,5 | 0,68998 |
| 195,00 | 40,1 | 38,2 | 38,8 | 41,1 | 39 = 33,0 | 0,65875 |

Indem ich nun das Gesetz der Abnahme der Leitungsfähigkeit durch die Formel

$$\gamma_n = x + yn + zn^2$$

ausgedrückt suche und dabei ganz wie oben verfahren, erhalte ich folgende 10 Bestimmungsgleichungen für $y$ und $z$

$$0{,}07617 + 18{,}2 \cdot y + 425{,}7 \cdot z = 0$$
$$0{,}06903 + 18{,}7 \cdot y + 1127{,}7 \cdot z = 0$$
$$0{,}06057 + 20{,}0 \cdot y + 1980{,}0 \cdot z = 0$$
$$0{,}05670 + 19{,}9 \cdot y + 2764{,}0 \; z = 0$$
$$0{,}03160 + 19{,}4 \cdot y + 3457{,}3 \cdot z = 0$$
$$0{,}05738 + 19{,}4 \cdot y + 4209{,}8 \cdot z = 0$$
$$0{,}04212 + 19{,}2 \cdot y + 4907{,}6 \cdot z = 0$$
$$0{,}02947 + 19{,}3 \cdot y + 5676{,}0 \cdot z = 0$$
$$0{,}06339 + 19{,}1 \cdot y + 6351{,}0 \cdot z = 0$$
$$0{,}03123 + 19{,}1 \cdot y + 7118{,}0 \cdot z = 0$$

Hieraus ergeben sich nach der Methode der kleinsten Quadrate

$$y = -0{,}003705211$$

$$z = +0{,}00000515915$$

Diese Werthe in die Gleichung

$$x = \gamma_n - (yn + zn^2)$$

setzend, erhalten wir 11 Werthe für $x$, aus welchen das Mittel giebt:

$$x = 1{,}18123$$

Folglich ist die Formel für die Leitungsfähigkeit des Kupferdrathes, oder

$$\gamma_n = 1{,}18123 - 0{,}003705211 \cdot n + 0{,}00000515915 \cdot n^2$$

welche $\gamma_n$ auf die Leitungsfähigkeit der kupfernen Leitungs- und electromotorischen Dräthe bei 15,1 als Einheit bezogen werden müssen.

Berechnen wir nach dieser Formel die Werthe von $\gamma_n$ bei den beobachteten Temperaturen, so erhalten wir folgende Vergleichung der beobachteten und berechneten Werthe

| $\gamma_n$ | | Differenz. |
|---|---|---|
| berechnet | beobachtet | |
| 1,17156 | 1,16640 | + 0,00516 |
| 1,10640 | 1,09023 | + 0,01617 |
| 1,04292 | 1,02120 | + 0,02172 |
| 0,97903 | 0,96064 | + 0,01839 |
| 0,91271 | 0,91394 | — 0,00123 |
| 0,86552 | 0,88234 | — 0,01682 |
| 0,81536 | 0,82496 | — 0,00960 |
| 0,76960 | 0,78284 | — 0,01324 |
| 0,72732 | 0,75337 | — 0,02605 |
| 0,68932 | 0,68998 | — 0,00066 |
| 0,65491 | 0,65875 | — 0,00384 |

Berechne ich nach der so eben erhaltenen Formel die Leitungsfähigkeit des Kupferdrathes für die Electricität bei der Temperatur = 15,1, so finde ich dieselbe = 1,12646, statt dass dieselbe sich = 1,00000 ergeben sollte, nämlich gleich der des electromotorischen und des Leitungsdrathes, da die Temperatur der letztern ebenfalls 15,1 und ihre Substanz ebenfalls Kupfer war. Woher dieser Unterschied

herrühre, ist schwer zu entscheiden. Einerseits könnten die Dräthe sehr wohl in chemischer Beschaffenheit oder in ihrem Aggregatzustande etwas differiren; vielleicht hat z. B. das häufigere Durchziehen des dünneren Drathes durch immer engere Löcher eine grössere Annäherung seiner Molecüle hervorgebracht, so dass er dadurch besser leitend geworden, wie solches der Werth seiner Leitungsfähigkeit 1,12646 in der That anzuzeigen scheint. — Andererseits aber kann der Unterschied auch von einem kleinen Fehler bei Bestimmung der Querschnitte beider Dräthe herrühren, wodurch die Reduction auf einerlei Querschnitt fehlerhaft geworden wäre (ein kleiner Fehler in der Längenmessung möchte von keinem erheblichen Einfluss seyn). — Wie dem aber auch sei, so hat diese Differenz doch auf unsern eigentlichen Zweck, nämlich auf die Verminderung der Leitungsfähigkeit mit der Temperatur und auf die Vergleichung dieser Veränderungen bei verschiedenen Drathsorten, keinen Einfluss. Im ersten Fall nämlich würde die Einheit, auf die wir alle Leitungsfähigkeiten bezogen, nicht die des Kupferdrathes unsrer Versuche seyn, was ganz gleichgültig ist; im zweiten Falle aber, wenn wirklich ein Fehler in der Bestimmung der Querschnitte vorgefallen sein sollte, so hätten wir bei der Reduction der gemessenen Drathlängen auf den Querschnitt des Multiplicatordrathes uns nicht des Factors $\frac{166,1}{41,5}$, sondern eines andern $\frac{166,1}{41,5} \cdot \delta$ bedienen müsse, wo $\delta$ irgend einen Factor bedeutet; alsdann hätten wir nicht die Formel

$$\gamma = \frac{\lambda}{2L} \cdot \frac{\sin. \frac{1}{2} \alpha}{\cos. \frac{1}{4} (a + \alpha) \cdot \sin. \frac{1}{4} (a - \alpha)}$$

sondern

$$\gamma = \delta \cdot \frac{\lambda}{2L} \cdot \frac{\sin. \frac{1}{2} \alpha}{\cos. \frac{1}{4} (a + \alpha) \cdot \sin. \frac{1}{4} (a - \alpha)}$$

gebrauchen müssen. Wir kennen nun zwar $\delta$ nicht, allein wir wissen doch wenigstens dass es bei allen Dräthen unverändert bleibt, da sie alle genau einen und denselben Querschnitt hatten. Wir brauchten also eigentlich nur alle gefundene Werthe von $\gamma$ mit $\delta$ zu multipliciren, um den wahren zu haben; da wir es aber hier nur mit Verhältnissen zu thun haben, so können wir diesen allgemeinen Factor $\delta$ unbeschadet überall weglassen.

## Versuche mit dem Messingdrathe.

Länge des Drathes $= 109'',5$. Reducirte Länge $= \frac{166,1 \times 109,5}{41,5} = 438,26$

also $\lambda = 438,26$

Ohne Dazwischenbringung des Messingdrathes erhielt ich folgende Resultate mittelst des electromotorischen und Multiplicator-Drathes allein

| | Abweichungen. | | | | Mittel. | |
|---|---|---|---|---|---|---|
| | 1 | 2 | 3 | 4 | | |
| Beim Beginn der Reihe | 72,1 | 68,8 | 69,0 | 73,9 | 70,950 | folgl. $a = 70^\circ$ = 39′, 6 |
| Am Ende der Reihe | 70,4 | 68,0 | 69,6 | 73,5 | 70,375 | |

Die Temperatur des Leitungs- und electromotorischen Drathes $= 14,8$ R.

Die Versuche nach Dazwischenbringung des Messingdrathes bei verschiedenen Temperaturen sind in Folgendem enthalten:

| Temperat. Reaum. | Abweichungen. | | | | Mittel. | $\gamma$ |
|---|---|---|---|---|---|---|
| | 1 | 2 | 3 | 4 | | |
| 2,48 | 32,9 | 31,5 | 32,7 | 33,1 | 32° = 33′ | 0,34845 |
| 15,47 | 31,7 | 30,7 | 32,0 | 32,7 | 31 = 46, 5 | 0,33282 |
| 39,53 | 31,2 | 30,2 | 31,3 | 32,3 | 31 = 15,0 | 0,32282 |
| 79,38 | 30,1 | 29,1 | 30,5 | 30,6 | 30 = 4,5 | 0,30129 |
| 118,19 | 29,2<br>29,4 | 28,1<br>28,6 | 29,2<br>29,8 | 29,7<br>29,9 | 29 = 14, 2 | 0,28670 |
| 156,74 | 28,2 | 27,0 | 28,4 | 28,6 | 28 = 3,0 | 0,26714 |
| 195,02 | 27,4<br>27,6 | 26,1<br>26,1 | 27,6<br>27,3 | 27,9<br>28,1 | 27 = 16, 5 | 0,25467 |

Indem ich ein, dem früheren ganz ähnliches, Verfahren anwende, erhalte ich folgende 6 Bestimmungsgleichungen für $y$ und $z$, wo $y$ und $z$ die früheren Bedeutungen haben

$$0,01563 + 12,8 \cdot y + 163,8 \cdot z = 0$$
$$0,00997 + 24,2 \cdot y + 585,6 \cdot z = 0$$
$$0,02156 + 39,8 \cdot y + 4744,0 \cdot z = 0$$
$$0,01459 + 38,8 \cdot y + 7667,1 \cdot z = 0$$
$$0,01956 + 38,6 \cdot y + 10583,6 \cdot z = 0$$
$$0,01247 + 38,3 \cdot y + 13469,0 \cdot z = 0$$

Aus ihnen erhalten wir folgende wahrscheinlichste Werthe von $y$ und $z$

$$y = 0{,}0006098323$$
$$z = + 0{,}000000723477$$

Setzen wir diese Werthe in die Gleichung

$$x = \gamma_n - (n \cdot x + n^2 \cdot z)$$

so erhalten wir 7 Werthe für $x$, aus welchen sich $x$ im Mittel

$$= 0{,}34609$$

ergiebt.

Die ganze Gleichung ist also

$$\gamma_n = 0{,}34609 - 0{,}0006098323 + 0{,}000000723477$$

welcher Werth sich auf die Leitungsfähigkeit des Multiplicatordraths bei 14°, 8, als Einheit, bezieht.

Die Berechnung der Werthe für $\gamma_n$ nach unsrer Formel und die Vergleichung mit den aus der Beobachtung abgeleiteten, enthält folgende Tafel:

| Leitungsfähigkeit | | Differenz. |
|---|---|---|
| berechnet | beobachtet | |
| 0,34458 | 0,34845 | — 0,00387 |
| 0,33689 | 0,33282 | + 0,00407 |
| 0,32312 | 0,32285 | + 0,00027 |
| 0,30224 | 0,30129 | + 0,00095 |
| 0,28412 | 0,28670 | — 0,00258 |
| 0,26827 | 0,26714 | + 0,00113 |
| 0,25468 | 0,25467 | + 0,00001 |

## Versuche mit dem Eisendrathe.

Länge des Drathes = 131,6. — Reducirte Länge folgl. = $\frac{166{,}1 \times 131{,}6}{41{,}5}$

also $\lambda = 526{,}7$

Ohne Dazwischenbringung des Eisendrathes erhielt ich folgende Abweichungen der Multiplicatornadel:

| | Abweichungen. | | | | Mittel. | |
|---|---|---|---|---|---|---|
| | 1 | 2 | 3 | 4 | | |
| Vor Beginn der Reihe | 69,2 | 67,0 | 67,1 | 71,8 | 68,775 | folgl. $a = 68°, 40, 5$ |
| Am Ende der Reihe | 68,7 | 68,4 | 66,3 | 70,9 | 68,575 | |

Die Temperatur des Leitungs- und electromotorischen Drathes im Mittel = 13,5 R. Die Versuche nach Dazwischenbringung des Eisendrathes folgen hierbei:

| Thermom. Reaum. | Abweichungen der Nadel. | | | | Mittel. | $\gamma$ |
|---|---|---|---|---|---|---|
| | 1 | 2 | 3 | 4 | | |
| 3,47 | 20,4 | 20,3 | 21,3 | 21,8 | 20°=55′,5 | 0,21129 |
| | 20,7 | 20,4 | 20,9 | 21,6 | | |
| 39,53 | 18,8 | 18,0 | 18,8 | 18,8 | 18 = 36, 0 | 0,17870 |
| 79,38 | 16,0 | 15,4 | 15,6 | 16,6 | 15 = 56, 2 | 0,14501 |
| | 15,6 | 16,0 | 16,0 | 16,7 | | |
| 118,19 | 13,6 | 13,5 | 13,6 | 14,5 | 13 = 46, 5 | 0,12014 |
| 156,74 | 11,5 | 11,9 | 11,7 | 12,6 | 11 = 58, 5 | 0,10096 |
| | 11,7 | 11,8 | 11,9 | 12,7 | | |
| 195,02 | 10,2 | 10,6 | 10,0 | 11,2 | 10 = 31, 0 | 0,08634 |
| | 10,3 | 10,7 | 10,2 | 10,9 | | |

Aus diesen Werthen von $\gamma$ ergeben sich, nach der von uns angewandten Methode der Rechnung, folgende Bestimmungsgleichungen für $y$ und $z$.

$$0 = 0{,}03259 + 36{,}1 \cdot y + 1548{,}0 \cdot z$$
$$0 = 0{,}03369 + 39{,}8 \cdot y + 4744{,}0 \cdot z$$
$$0 = 0{,}02487 + 38{,}8 \cdot y + 7667{,}1 \cdot z$$
$$0 = 0{,}01918 + 38{,}6 \cdot y + 10583{,}6 \cdot z$$
$$0 = 0{,}01462 + 38{,}3 \cdot y + 13469{,}0 \cdot z$$

Daraus ergeben sich

$$y = -\ 0{,}001013424$$
$$z = +\ 0{,}0000018178085$$

Durch Substitution dieser Werthe in die Formel

$$x = \gamma_n - (ny + n^2 z)$$

erhalte ich 6 Werthe für $x$, aus welchen das Mittel giebt

$$x = 0{,}21471$$

Folglich ist unsre Formel für den Eisendrath

$$\gamma_n = 0{,}21471 - 0{,}001013424 \cdot n + 0{,}0000018178085 \cdot n^2$$

Die Vergleichung der berechneten und beobachteten Werthe von $\gamma_n$ ergiebt:

| Leitungsfähigkeit. | | Differenz. |
|---|---|---|
| berechnet | beobachtet | |
| 0,21121 | 0,21129 | — 0,00008 |
| 0,17849 | 0,17870 | — 0,00021 |
| 0,14571 | 0,14501 | + 0,00070 |
| 0,12033 | 0,12014 | + 0,00019 |
| 0,10052 | 0,10096 | — 0,00044 |
| 0,08621 | 0,08634 | — 0,00013 |

## Versuche mit dem Platindrathe.

Länge des Drathes $= 132{,}0$ reducirte Länge $= \frac{166{,}1 \times 132{,}0}{41{,}5} = 528{,}32$

folgl. $\lambda = 528{,}32$

Ohne Zwischenbringung des Platindrathes erhielt ich:

| | Abweichungen. | | | | Mittel. | |
|---|---|---|---|---|---|---|
| | 1 | 2 | 3 | 4 | | |
| Vor Beginn der Reihe | 75,9 | 73,2 | 75,0 | 76,6 | 75°,10,2 | folgl. $a = 75°,12,6$ |
| Am Ende der Reihe | 75,9 | 72,9 | 74,1 | 78,1 | 75 ,15,0 | |

Temperatur der Leitungsdräthe im Mittel während der nachfolgenden Versuchsreihe $= 14°{,}0$.

Nachdem der Platindrath dazwischengebracht worden war, erhielt ich folgende Ablenkungen der Multiplicatornadel,

| Thermom. Reaum. | Abweichungen. | | | | Mittel. | $\gamma$ |
|---|---|---|---|---|---|---|
| | 1 | 2 | 3 | 4 | | |
| 0,9 | 19,1 | 18,2 | 19,5 | 19,7 | 19° 7′,5 | 0,16695 |
| 14,6 | 18,4 | 17,8 | 18,9 | 19,1 | 18 33,0 | 0,16018 |
| 31,0 | 17,8 | 17,1 | 18,0 | 18,5 | 17 51,0 | 0,15076 |
| 47,3 | 17,2 | 16,7 | 17,7 | 17,8 | 17 21,0 | 0,14639 |
| 63,7 | 16,7 | 16,0 | 17,2 | 17,3 | 16 48,0 | 0,14048 |
| 79,7 | 16,3 | 15,8 | 16,7 | 16,8 | 16 24,0 | 0,13614 |
| 94,9 | 15,8<br>15,9 | 15,2<br>15,1 | 16,1<br>16,0 | 16,3<br>16,2 | 15 49,5 | 0,13001 |
| 110,1 | 15,4 | 15,0 | 15,6 | 15,9 | 15 28,5 | 0,12634 |
| 125,3 | 15,0 | 14,4 | 15,2 | 15,6 | 15 3,0 | 0,12195 |
| 139,7 | 14,6 | 14,1 | 14,7 | 15,2 | 14 32,5 | 0,11678 |
| 155,1 | 14,3 | 13,6 | 14,5 | 15,1 | 14 22,5 | 0,11510 |
| 169,6 | 13,8 | 13,4 | 14,4 | 14,3 | 13 58,5 | 0,11112 |
| 185,7 | 13,6 | 13,1 | 14,1 | 14,2 | 13 45,0 | 0,10891 |

Hieraus ergeben sich folgende Bestimmungsgleichungen für $y$ und $z$

$$0{,}00677 + 13{,}7 \cdot y + 212{,}35 \cdot z = 0$$
$$0{,}00942 + 16{,}4 \cdot y + 747{,}84 \cdot z = 0$$
$$0{,}00437 + 16{,}3 \cdot y + 1276{,}26 \cdot z = 0$$
$$0{,}00591 + 16{,}4 \cdot y + 1820{,}44 \cdot z = 0$$
$$0{,}00434 + 16{,}0 \cdot y + 2294{,}50 \cdot z = 0$$
$$0{,}00613 + 15{,}2 \cdot y + 2654{,}40 \cdot z = 0$$
$$0{,}00367 + 15{,}2 \cdot y + 3116{,}10 \cdot z = 0$$
$$0{,}00439 + 15{,}2 \cdot y + 3577{,}7 \cdot z = 0$$
$$0{,}00517 + 14{,}4 \cdot y + 3916{,}5 \cdot z = 0$$
$$0{,}00168 + 15{,}4 \cdot y + 4539{,}1 \cdot z = 0$$
$$0{,}00398 + 14{,}5 \cdot y + 6065{,}4 \cdot z = 0$$
$$0{,}00221 + 16{,}1 \cdot y + 4363{,}5 \cdot z = 0$$

woraus ich finde

$$y = -\ 0{,}000457892$$
$$z = +\ 0{,}0000007752415$$

Mittelst dieser Werthe von $y$ und $z$ ergeben sich 14 Werthe von $x$, aus welchen, das Mittel genommen, sich findet

$$x = 0{,}16674$$

Folglich ist unsre Gleichung

$$\gamma_n = 0{,}16674 - 0{,}000457892 \cdot n + 0{,}0000007752415 \; n^2$$

wo die Werthe von $\gamma_n$ auf die Leitungsfähigkeit des Multiplicator- und electromotorischen Drathes bei der Temperatur = 14°,0 R. bezogen sind.

Berechne ich nach dieser Formel die Werthe von $\gamma_n$ bei den Temperaturen, bei welchen ich sie beobachtet habe, so ergiebt die Vergleichung der Rechnung und Beobachtung:

| $\gamma_n$ | | Differenz. |
|---|---|---|
| berechnet | beobachtet | |
| 0,16637 | 0,16695 | — 0,00058 |
| 0,16002 | 0,16018 | — 0,00016 |
| 0,15329 | 0,15076 | + 0,00253 |
| 0,14782 | 0,14639 | + 0,00143 |
| 0,14072 | 0,14048 | + 0,00024 |
| 0,13517 | 0,13614 | — 0,00097 |
| 0,13026 | 0,13001 | + 0,00025 |
| 0,12455 | 0,12634 | — 0,00179 |
| 0,12153 | 0,12195 | — 0,00042 |
| 0,11790 | 0,11678 | + 0,00112 |
| 0,11437 | 0,11510 | — 0,00073 |
| 0,11062 | 0,11112 | — 0,00050 |
| 0,10844 | 0,10891 | — 0,00047 |

Fassen wir alle obigen Versuche zusammen, so haben wir also für die 5 Metalle:

Silber, Kupfer, Messing, Eisen und Platin

folgende Werthe ihrer Leitungsfähigkeiten für die Electricität bei der Temperatur $n$ erhalten:

für Silber $\gamma_n = 1{,}59930 - 0{,}005849873 \cdot n + 0{,}000009434674 \cdot n^2$
Einheit der Leitungsdräthe bei 15°, 1

für Kupfer $\gamma_n = 1{,}18123 - 0{,}003705211 \cdot n + 0{,}00000515915 \cdot n^2$
Einheit der Leitungsdräthe bei 15°, 1

für Messing $\gamma_n = 0{,}34609 - 0{,}0006098323 \cdot n + 0{,}000000723477 \cdot n^2$
Einheit der Leitungsdräthe bei 14°, 8

für Eisen $\gamma_n = 0{,}21471 - 0{,}001013424 \cdot n + 0{,}0000018178085 \cdot n^2$
Einheit der Leitungsdräthe bei 15°, 5

für Platin $\gamma_n = 0{,}16674 - 0{,}000457892 \cdot n + 0{,}0000007752415 \cdot n^2$
Einheit der Leitungsdräthe bei 14°, 0

Um sie zuerst alle auf eine Einheit zu reduciren, wähle ich für dieselbe die der kupfernen Leitungsdräthe bei der Temperatur = 14, wo also die Formel für den Platindrath schon auf die richtige Einheit bezogen ist. Um für die andern Dräthe die dazu nöthige Correction zu finden, berechne ich aus der Formel für den Kupferdrath die Leitungsfähigkeit desselben bei den verschiedenen Temperaturen, die die Leitungsdräthe während der verschiedenen Versuchsreihen hatten, und finde

$$\gamma_{13,1} = 1{,}13358$$
$$\gamma_{15,1} = 1{,}12646$$
$$\gamma_{14,5} = 1{,}12752$$
$$\gamma_{15,5} = 1{,}12504$$
$$\gamma_{14,0} = 1{,}13037$$

Die Einheit bei der Temperatur = 13,1 ist also in dem Verhältniss von 1,13358 : 1,13037 grösser als die von 14°, oder, nennt man die Leitungsfähigkeit bei 14° = 1, so ist die bei 13,1 zur Einheit genommene Leitungsfähigkeit $= \frac{1{,}13358}{1{,}13037}$ der vorigen; in demselben Verhältniss, als die Einheit kleiner wird müssen aber die durch die Formel gelieferten Werthe von $\gamma_n$ grösser werden, wir haben also, um die Werthe von $\gamma_n$ auf die Einheit von 14° zu reduciren, die Glieder der Formel für Silber mit $\frac{1{,}13358}{1{,}13037}$ zu multipliciren. Auf ähnliche Weise müssen wir auch mit den übrigen Werthen verfahren, jeden nämlich mit der Leitungsfähigkeit des Kupfers bei der Temperatur, bei welcher sich während der Versuchsreihe die Leitungsdräthe erhielten, multipliciren und mit der bei 14° dividiren; daraus ergeben sich die Formeln

für Silber $= 1{,}60384 - 0{,}0058665 \cdot n + 0{,}0000094615 \cdot n^2$
für Kupfer $= 1{,}17710 - 0{,}0056923 \cdot n + 0{,}0000051415 \cdot n^2$
für Messing $= 0{,}34527 - 0{,}00060839 \cdot n + 0{,}00000072175 \cdot n^2$
für Eisen $= 0{,}20883 - 0{,}00098568 \cdot n + 0{,}00000180921 \cdot n^2$
für Platin $= 0{,}16674 - 0{,}00045789 \cdot n + 0{,}00000077524 \cdot n^2$

Diese Formeln nun beziehen sich alle auf eine Einheit, die der kupfernen Leitungsdräthe bei 14°; da es aber oft üblich ist, bei Vergleichung der verschiedenen

Leitungsfähigkeiten der Metalle, diese auf die des Kupfers zu beziehen, so dass diese = 100 gesetzt wird, so ändere ich unsere Formeln nochmals um, indem ich sie sämmtlich mit $\frac{100}{1,17710}$ multiplicire; dadurch wird im Verhältniss der Leitungsfähigkeit nichts geändert, als dass die des Kupfers bei 0° = 100 gesetzt wird; so erhalte ich

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| *für Silber* $\gamma_n =$ | 136,250 | $- 0,49838 \cdot n$ | $+ 0,00080378 \cdot n^2$ | (A) |
| u. d. Log. d. Coëfficienten | 2,13434 | 9,69756 | 6,90514 | |
| *für Kupfer* $\gamma_n =$ | 100,000 | $- 0,31368 \cdot n$ | $+ 0,00043679 \cdot n^2$ | |
| Logarithmen | 2,00000 | 9,49648 | 6,64027 | |
| *für Messing* $\gamma_n =$ | 29,332 | $- 0,051685 \cdot n$ | $+ 0,000061316 \cdot n^2$ | |
| Logarithmen | 1,46734 | 8,71336 | 5,78757 | |
| *für Eisen* $\gamma_n =$ | 17,741 | $- 0,083736 \cdot n$ | $+ 0,00015020 \cdot n^2$ | |
| Logarithmen | 1,24897 | 8,92291 | 6,17667 | |
| *für Platin* $\gamma_n =$ | 14,165 | $- 0,038899 \cdot n$ | $+ 0,00006586 \cdot n^2$ | |
| Logarithmen | 1,15122 | 8,58994 | 5,81862 | |

Aus diesen Formeln sieht man nun, dass die Abnahme der Leitungsfähigkeit der Metalle für die Electricität, bei Zunahme der Temperatur derselben, bedeutend ist und im Ganzen bei besser leitenden stärker als bei schwächer leitenden; jedoch steht diese Abnahme nicht in bestimmtem Verhältniss zur Leitungsfähigkeit, denn sonst müssten die Coefficienten von $n$ und $n^2$ für alle Metalle dieselben werden, wenn wir die Leitungsfähigkeit eines jeden Metalls bei 0° gleich 100 setzen; wir finden aber in diesem Falle folgende Werthe für diese Coefficienten

| | | |
|---|---|---|
| für Silber | $= - 0,36568 \cdot n$ | $+ 0,00058993 \cdot n^2$ |
| für Kupfer | $= - 0,31368 \cdot n$ | $+ 0,00043679 \cdot n^2$ |
| für Messing | $= - 0,171204 \cdot n$ | $+ 0,00020904 \cdot n^2$ |
| für Eisen | $= - 0,47200 \cdot n$ | $+ 0,00084664 \cdot n^2$ |
| für Platin | $= - 0,27461 \cdot n$ | $+ 0,00046494 \cdot n^2$ |

Hierbei bemerke ich, dass das Silber völlig rein war, die übrigen Metalle aber, wie sie in Russland im Handel vorkommen.

Hier kommen Silber und Kupfer sich an Grösse der Abnahme der Leitung bei Zunahme der Temperatur ziemlich nahe, dagegen weichen die übrigen Metalle bedeutend davon ab. Im Verhältniss zu seiner Leitungsfähigkeit ist die Abnahme des Eisens die grösste von Allen.

Die Abnahme der Leitungsfähigkeit mit der Zunahme der Temperatur ist dieser nicht proportional, sondern sie nimmt langsamer ab als diese zunimmt, da der positive Coefficient von $n^2$ für höhere Temperaturen immer bedeutender wird, so dass er endlich selbst den negativen zu überwiegen anfängt; von welchem Augenblicke an die Leitungsfähigkeit mit der Temperatur zugleich zunimmt. Aus dieser Betrachtung folgt, dass die Metalle ein Minimum der Leitungsfähigkeit bei einer gewissen Temperatur haben müssen; durch Differenziren obiger Formeln (A), in Hinsicht auf $n$ genommen, finden wir, wenn wir diese Differenziale $= o$ setzen:

| | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|
| Minimum | der Leitungsfähigkeit | des | Silbers | = 59,00 | bei | 310°,05 |
| — | — | — | Kupfers | = 56,32 | — | 359,00 |
| — | — | — | Messing | = 18,43 | — | 421,50 |
| — | — | — | Eisen | = 6,07 | — | 278,8 |
| — | — | — | Platins | = 8,41 | — | 295,3 |

Das Minimum findet also in der That für jedes der 5 Metalle statt, es tritt aber erst bei einer ziemlich hohen Temperatur ein (zwischen 250 und 450), so dass für die gewöhnlichen Temperaturen die Leitungsfähigkeit mit der Zunahme der Temperatur abnimmt. Da das Silber sein Minimum tiefer hat, als die Leitungsfähigkeit des Kupfers bei 0° beträgt, so wird es eine gewisse Temperatur geben, wo es eben so gut leitet als das Kupfer bei der Temperatur = 0; diese Temperatur ist 84° und auch 536°; zwischen diesen beiden Punkten des Thermometers wird seine Leitungsfähigkeit schlechter sein, als die des Kupfers bei 0°.

Da das Platin nur wenig schlechter leitet als das Eisen und letzteres sein Leitungsvermögen bei Zunahme der Temperatur bei weitem in schnellerem Verhältniss verliert als das Platin, so werden sich 2 Temperaturen finden, zwischen welchen diese beiden Metalle ihre Rolle tauschen, so dass das Eisen das schlechter leitende

wird. Um dieses zu beweisen hat man nur die Formeln der Leitungsfähigkeiten einander gleich zu setzen, so erhält man

$$17,741 - 0,083736 \cdot n + 0,0001502 \cdot n^2 = 14,165 - 0,038899 \cdot n + 0,00006586 \cdot n^2$$

folgl. $$0,00008434 \cdot n^2 - 0,044837 \cdot n = -3,576$$

also $$n = 97,72 \text{ und } n = 433,92$$

Hieraus ergiebt sich, dass bei 97,°72 und 433°,92 R. Eisen und Platin gleich gut leiten, zwischen diesen Temperaturen leitet das Platin besser, ausserhalb derselben das Eisen. Dieses interessante Verhalten des Platins und Eisens könnte wohl einen neuen Grund abgeben (ausser der Verschiedenheit in der Reinheit der gebrauchten Metalle), um die Differenzen zu erklären, die sich bei verschiedenen Beobachtern bei Angabe der Leitungsfähigkeit beider Metalle vorfinden. Wenn z. B. diese durch Erwärmung verschiedener Drathlängen bestimmt ist, wie solches in der That von *Priestley*, *Childern*, *Van-Marum*, *Davy*, *Harris* geschah, so kommt es darauf an, bis zu welchem Grade sie die Erwärmung trieben; war sie unter 97°,7 oder über 433,9, so mussten sie das Platin als schlechtern Leiter angeben; ging sie bis auf eine Temperatur zwischen 97,7 und 433,9 so werden sie umgekehrt das Eisen als schlechtern Leiter gefunden haben.

Ueberhaupt sieht man, wie diese bedeutende Veränderung der Leitungsfähigkeit der Metalle die Berechnung der Wirkung der geschlossenen galvanischen Kette verwickelter macht, da ja der Strom selbst die Leitungsdräthe erwärmt und diese Erwärmung wiederum den Strom schwächt. Da frühere Versuche beweisen, dass die Erwärmung der metallischen Schliessungsdräthe in umgekehrtem Verhältniss ihrer Leitungsfähigkeit statt findet, so werden schlechter leitende Schliessungsdräthe den Strom einer bestimmten voltaischen Säule aus 2 Gründen mehr schwächen als besser leitende, erstens eben wegen ihrer schlechtern Leitungsfähigkeit und zweitens wegen der dadurch hervorgebrachten grössern Erwärmung der Dräthe.

Dieses möchte ein 5ter Grund sein, der Methode, welche ich zur Bestimmung der Leitungsfähigkeiten der Dräthe anwendete, den Vorzug zu geben vor den übrigen Methoden. Bei diesen schliesst der zu prüfende Drath die galvanische Kette un-

mer eine lange Zeit hindurch, er wird also immer eine höhere Temperatur haben als die umgebende Luft, die aber nicht bestimmt werden kann, da sie von so vielen Umständen abhängt, als: Stärke des Stroms, Leitungsfähigkeit des Drathes für Electricität, Leitungsfähigkeit für die Wärme, Oberfläche des Drathes in Hinsicht auf Ausstrahlungsvermögen der erlangten hohen Temperatur u. s. w. — Bei unserer magneto-electrischen Stromerregung aber wirkt dieser Strom nur einen Augenblick, es ist gleichsam nur eine electrische Welle, die den Drath durchläuft, die Erwärmung kann also nur unbedeutend sein und verliert sich gewiss während der Zeit, dass die Nadel des Multiplicators in Ruhe kommt und ehe die Abreissung des Ankers mit der electromotorischen Spirale wiederum vorgenommen wird.

Ich habe geglaubt eine Beziehung zwischen der Ausdehnung der Metalle durch die Wärme und der Schwächung des Leitungsvermögens, eben dadurch, auffinden zu müssen, allein eine solche scheint nicht statt zu finden; um sich hiervon zu überzeugen, braucht man nur einen Blick auf die Werthe der Verminderung des Leitungsvermögens unserer 5 Metalle zu werfen, wie sie sich ergaben, wenn man sie bei 0° überall gleich 100 setzte.

# SUITE DU MÉMOIRE

SUR

# L'INTÉGRATION DES FRACTIONS RATIONELLES;

PAR

M. OSTROGRADSKY. *)

(Lu le 23 Août 1833.)

VIII. **O**ccupons nous de l'intégrale

(28) $$\int \frac{L}{M} \frac{dx}{y},$$

dans laquelle $L$ et $M$ sont les fonctions entières de $x$, la fraction $\frac{L}{M}$ est irréductible et $y$ est donné par l'équation $y^2 = R$, $R$ étant une fonction entière de $x$ et ne renfermant point des facteurs multiples.

Supposons, en vertu de l'article I^er^,

$$\int \frac{L}{M} \frac{dx}{y} = X'y + X'',$$

$X'$ et $X''$ étant des fonctions rationelles de $x$; nous aurons

$$\frac{L}{M} \frac{1}{y} = y \frac{dX'}{dx} + X' \frac{dy}{dx} + \frac{dX''}{dx}.$$

En multipliant par $2y$ et observant que $y^2 = R$, $2y \frac{dy}{dx} = \frac{dR}{dx}$, on trouve

$$\frac{2L}{M} = 2R \frac{dX'}{dx} + \frac{dR}{dx} X' + 2 \frac{dX''}{dx} y;$$

---

*) Voir page 569 de ce volume.

de là, en comparant les coëfficiens des puissances de $y$,

$$\frac{dX''}{dx} = o \quad \text{ou} \quad X'' = \text{Const.}$$

(29) $$\frac{2L}{M} = 2R\,\frac{dX'}{dx} + \frac{dR}{dx}\,X',$$

$X'$ étant une fraction rationelle. Faisons

$$X' = \frac{X}{Y},$$

$X$ et $Y$ désignant deux fonctions entières de $x$ n'ayant point de facteurs communs; nous aurons

(30) $$\int \frac{L}{M}\,\frac{dx}{y} = \frac{X}{Y}\,y + \text{const.}$$

(31) $$\frac{2L}{M} = \frac{2RY\,\frac{dX}{dx} + \left(\frac{dR}{dx}\,Y - 2R\,\frac{dY}{dx}\right)X}{Y^2}.$$

Le premier membre de cette équation est une fraction irréductible; il faut, comme dans l'intégration des fractions rationelles, rendre irréductible son second membre et ensuite égaler entre eux les numérateurs et les dénominateurs.

Désignons par $Y_1$ le plus grand commun diviseur entre $Y$ et $\frac{dY}{dx}$, en sorte que

$$Y = SY_1, \quad \frac{dY}{dx} = TY_1;$$

nous aurons

(32) $$\frac{2L}{M} = \frac{2RS\,\frac{dX}{dx} + \left(\frac{dR}{dx}\,S - 2RT\right)X}{SY}.$$

Il est évident, qu'aucun facteur de $S$, qui ne divise pas $R$, ne divise pas le numérateur du second membre, en sorte que ce membre est irréductible, si $R$ et $S$ n'ont pas de facteurs communs. Mais $S$ n'étant pas connue, on ne peut pas savoir d'avance, si cette quantité a ou n'a pas de facteurs communs avec $R$. Or, comme l'hypothèse d'un facteur commun comprend celle où les quantités $R$ et $S$ seraient supposées premières entre elles, nous ferons

$$(33) \qquad \begin{cases} R = R_1 P \\ S = S_1 P, \end{cases}$$

$P$ étant le plus grand commun diviseur entre $R$ et $S$. $P$ sera $= 1$, si $R$ et $S$ sont premiers entre eux.

Les valeurs précédentes de $R$ et $S$ étant mises dans l'équation (32), celle-ci deviendra

$$(34) \qquad \frac{2L}{M} = \frac{2RS_1 \frac{dX}{dx} + \left(\frac{dR}{dx} S_1 - 2R_1 T\right) X}{S_1 V}.$$

Comme aucun facteur de $S_1$ ne divise le numérateur du second membre, il nous reste à examiner, si $P$ ou ses facteurs ne divise pas une ou plusieurs fois la quantité

$$(35) \qquad 2RS_1 \frac{dX}{dx} + \left(\frac{dR}{dx} S_1 - 2R_1 T\right) X.$$

Comme $P$ divise $R$, et qu'aucun de ses facteurs ne divise $X$, la quantité (35) sera ou ne sera pas divisible par $P$ ou ses facteurs suivant que $\frac{dR}{dx} S_1 - 2R_1 T$ le sera ou non.

Or nous avons

$$\frac{dR}{dx} = P \frac{dR_1}{dx} + R_1 \frac{dP}{dx};$$

donc la quantité

$$\frac{dR}{dx} S_1 - 2R_1 T = PS_1 \frac{dR_1}{dx} + R_1 \left(S_1 \frac{dP}{dx} - 2T\right)$$

sera divisible par $P$ ou ses facteurs, quand

$$R_1 \left(S_1 \frac{dP}{dx} - 2T\right) \text{ c'est-à-dire } S_1 \frac{dP}{dx} - 2T \text{ le sera.}$$

Le numérateur du second membre de l'équation (34) étant divisible par tous les facteurs de $P$ qui divisent la quantité $S_1 \frac{dP}{dx} - 2T$ et par aucun de ceux qui ne la divisent pas, il importe de déterminer le plus grand commun diviseur entre $P$ et $S_1 \frac{dP}{dx} - 2T$. Pour cela, remontant à la quantité $V$, décomposons la en deux facteurs $Z$ et $U$, le premier ne dépendant que des facteurs contenus dans $S_1$, et le second, de ceux qui se trouvent dans $P$. $S_1$ et $P$ n'ayant pas n'ayant pas de facteurs communs, $Z$ et $U$ n'en auront pas non plus.

*

Faisons

$$Z = S_1 Z_1 \quad U = PU',$$
$$\frac{dZ}{dx} = T_1 Z_1 \quad \frac{dU}{dx} = QU_1,$$

$Z_1$ est le plus grand commun diviseur entre $Z$ et $\frac{dZ}{dx}$, $U_1$ est celui entre $U$ et $\frac{dU}{dx}$; nous aurons

$$Y = S_1 P Z_1 U_1 = S Z_1 U_1.$$

Donc $Z_1 U_1 = Y_1$, c'est-à-dire $Z_1 U_1$ sera le plus grand commun diviseur entre $Y$ et $\frac{dY}{dx}$.

Or nous avons

$$\frac{dY}{dx} = U \frac{dZ}{dx} + Z \frac{dU}{dx} = (PT_1 + QS_1)\, Y_1;$$

donc $T = PT_1 + QS_1$, par conséquent

$$S_1 \frac{dP}{dx} - 2T = 2PT_1 + S_1 \left(\frac{dP}{dx} - 2Q\right).$$

Comme $S_1$ et $P$ n'ont pas de facteurs communs, la quantité $S_1 \frac{dP}{dx} - 2T$ sera divisible ou non par $P$ ou ses facteurs, suivant que $\frac{dP}{dx} - 2Q$ le sera ou non. Il est d'abord évident, que la quantité $\frac{dP}{dx} - 2Q$ ne peut pas être divisible par $P$, à moins qu'elle ne se réduise à zéro. Car la fonction $P$ est supérieure en degré à la fonction $\frac{dP}{dx} - 2Q$. Or $\frac{dP}{dx} - 2Q$ ne peut jamais s'évanouir pour toutes les valeurs de $x$. En effet, si l'on avait $\frac{dP}{dx} = 2Q$, on trouverait, en éliminant $U$ des équations $U = PU_1$, $\frac{dU}{dx} = QU_1$, l'équation suivante

$$P \frac{dU_1}{dx} + QU_1 = o,$$

et comme $P$ et $Q$ n'ont pas de facteurs communs, il s'en suivrait

$$U_1 = PU_2$$
$$\frac{dU_1}{dx} = -QU_2.$$

En éliminant $U_1$, on trouverait

$$P\frac{dU_2}{dx}+3QU_2=o,$$

donc

$$U_2=PU_3$$

$$\frac{dU_2}{dx}=-3QU_3.$$

En continuant de la même manière, on finirait par arriver aux équations

$$U_{i-1}=PU_i,\quad \frac{dU_{i-1}}{dx}=-(2i-3)\,QU_i,$$

dans lesquelles $U_i$ serait constante. Car le degré de la fonction $U$ étant limité, l'opération précédente ne peut pas continuer indéfiniment.

Nous aurons, en éliminant $U_{i-1}$,

$$\frac{dP}{dx}=-(2i-3)\,Q,$$

ou bien, en vertu de l'hypothèse $\frac{dP}{dx}=2Q$, $(2i-1)\,Q=o$, or $Q$ n'étant pas zéro, il faut que $2i-1$ soit zéro, ce qui est impossible, puisque $i$ est un nombre entier. Ainsi

$$\frac{dP}{dx}-2Q$$

ne peut jamais devenir nul pour toutes les valeurs de $x$.

La quantité $\frac{dP}{dx}-2Q$ n'est pas divisible par $P$. Reste à voir, si elle est divisible par un facteur $P_1$ de $P$. Pour cela désignons par $P_2$ le produit des autres facteurs de $P$, en sorte que

$$P=P_1P_2$$

$$\frac{dP}{dx}=P_1\frac{dP_2}{dx}+P_2\frac{dP_1}{dx}.$$

Décomposons la quantité $U$ en deux facteurs $U'$ et $U''$, le premier composé des facteurs de $P_1$ élevés à différentes puissances, le second, de ceux de $P_2$. Supposons de plus

$$U'=P_1U'_1\qquad U''=P_2U''_1$$

$$\frac{dU'}{dx}=Q_1U_1'\qquad \frac{dU''}{dx}=Q_2U_1''.$$

Nous aurons

$$U = P_1 P_2 U'_1 U''_1 = PU'_1 U''_1;$$

donc

$$U'_1 U''_1 = U_1.$$

Nous aurons en même temps

$$\frac{dU}{dx} = U' \frac{dU''}{dx} + U'' \frac{dU'}{dx} = (P_1 Q_2 + Q_1 P_2) U_1;$$

donc

$$Q = P_1 Q_2 + Q_1 P_2$$

et par suite

$$\frac{dP}{dx} - 2Q = P_1 \left(\frac{dP_2}{dx} - 2Q\right) + P_2 \left(\frac{dP_1}{dx} - 2Q_1\right).$$

La quantité $\frac{dP_1}{dx} - 2Q_1$, par la même raison que $\frac{dP}{dx} - 2Q$, ne sera jamais nulle pour $x$ quelconque. Il s'ensuit que $\frac{dP}{dx} - 2Q$ n'est jamais divisible par aucun facteur $P_1$ de $P$. Car $P_2$ n'a pas de facteurs communs avec $P_1$, et $\frac{dP_1}{dx} - 2Q_1$ est inférieur en degré à $P_1$. Il en résulte immédiatement, que le numérateur du second membre de l'équation (34) n'est divisible par aucun facteur du dénominateur. Ainsi les deux membres de cette équation sont des fractions irréductibles, d'où il suit, que l'on aura

$$(36) \qquad \left\{ \begin{aligned} & M = S_1 Y \\ & 2L = 2RS_1 \frac{dX}{dx} + \left(\frac{dR}{dx} S_1 - 2R_1 T\right) X. \end{aligned} \right.$$

Pour trouver $Y$, on décomposera $M$ en deux facteurs $M_1$ et $M_2$, $M_1$ n'ayant aucun facteur commun avec $R$, et $M_2$ ne renfermant que les facteurs contenus dans $R$. Ces facteurs sont tous simples dans $R$, et ils peuvent être élevés à différentes puissances dans $M_2$.

Désignons aussi par $Z$ l'ensemble des facteurs de $Y$, qui ne divisent pas $R$; il est évident, que le produit des facteurs restants sera représenté par $M_2$ en sorte que

$$Y = ZM_2.$$

Donc nous aurons

(37) $$M_1 = S_1 Z,$$

et, par suite $Z$ est le plus grand commun diviseur entre $M_1$ et $\frac{dM_1}{dx}$. Ainsi $Z$ et $Y$ seront connus, $S_1$ le sera aussi par la division de $M_1$ par $Z$.

Pour trouver plus simplement le dénominateur $Y$ et les quantités $S_1$, $R_1$ et $T$ cherchons 1) le plus grand commun diviseur entre $M$ et $R$. Ce diviseur sera $P$. En divisant $R$ par $P$ on trouve $R_1$. 2) Cherchons le plus grand commun diviseur entre $M$ et $\frac{dM}{dx}$. Le diviseur sera $S_1 Y_1$. $S$ sera le quotient de la division de $M$ par $S_1 Y_1$, et $Y = S_1 Y_1 P$. En divisant $S$ par $P$ on trouvera $S_1$. Divisant $Y$ par $S$ on trouvera $Y_1$, et divisant $\frac{dY}{dx}$ par $Y_1$ on trouvera $T$.

Au reste, en faisant $\frac{dM}{dx} = U S_1 Y_1$, on trouvera

$$U = T + \frac{dS_1}{dx} P,$$

d'où

$$T = U - \frac{dS_1}{dx} P = U - \frac{dS}{dx} + S_1 \frac{dP}{dx}.$$

IX. Ayant trouvé $Y$ et les quantités $S_1$, $R_1$, $T$, on cherchera l'inconnue $X$ au moyen de l'équation

(37) $$2RS_1 \frac{dX}{dx} + \left(\frac{dR}{dx} S_1 - 2R_1 T\right) X = 2L,$$

que l'on traitera comme on a traité l'équation

$$S \frac{dX}{dx} - TX = N$$

dans le cas des fractions rationelles.

Quelquefois il serait plus simple d'employer pour la résolution de l'équation (37) la méthode des coëfficiens indéterminés. Pour cela faisons

$$X = QY + X',$$

$Q$ étant le quotient, et $X'$ le reste de la division de $X$ par $Y$. Nous aurons

$$\left(2R \frac{dQ}{dx} + \frac{dR}{dx} Q\right) M + 2RS_1 \frac{dX'}{dx} + \left(\frac{dR}{dx} S_1 - 2R_1 T\right) X' = 2L.$$

Faisons

$$2RS_1 \frac{dX'}{dx} + \left(\frac{dR}{dx} S_1 - 2R_1 T\right) X' = Z\,;$$

nous aurons

$$\left(2R \frac{dQ}{dx} + \frac{dR}{dx} Q\right) M = 2L - Z.$$

Désignons par $n$ le degré de la fonction $R$, par $m$ celui de $M$; le degré de $Z$ sera au plus $n+m-2$. En désignant par $i$ le degré de $Q$, la plus haute puissance de $\left(2R \frac{dQ}{dx} + \frac{dR}{dx} Q\right) M$ sera $= n+m+i-1$. Soit $\mu$ le degré de $L$; on doit avoir $n+m+i-1=\mu$; donc $i=\mu-n-m+1$. On fera $Q=o$, si $i$ est négatif; on aura alors $Z=2L$.

Supposons $2L = KM + H$. Le reste de la division de $Z$ par $M$ doit être aussi $H$; car sans cela $2L - Z$ ne serait pas divisible par $M$. Donc on aura $Z = qM + H$, $q$ est inconnue.

Nous aurons $2R \frac{dQ}{dx} + \frac{dR}{dx} Q = K - q$, le degré de $K$ est $n+i-1$, celui de $q$ est $n-2$, on trouvera

$$q = K - \left(2R \frac{dQ}{dx} + \frac{dR}{dx} Q\right)$$

il faut déterminer $Q$ de manière que le degré du second membre soit seulement $n-2$, ce qui est toujours possible.

En effet faisons

$$Q = Ax^i + Q'$$

$Q'$ étant une fonction du degré $i-1$, nous aurons

$$q = K - A\left(2iR + x\frac{dR}{dx}\right) x^{i-1} - \left(2R \frac{dQ'}{dx} + \frac{dR}{dx} Q'\right).$$

Soit $K = ax^{n+i-1} + K'$, $R = \alpha x^n + R'$,

on aura

$$q = [a - A\alpha(2i+n)]\, x^{n+i-1} + K_1 - \left(2R \frac{dQ'}{dx} + \frac{dR}{dx} Q'\right)$$

On a fait pour abréger

$$K_1 = K' - A\left(2iR' + x\frac{dR'}{dx}\right) x^{i-1}.$$

En faisant

$$A = \frac{a}{(2i+n)^a}, \text{ on trouvera}$$

$$q = K_1 - \left(2R\frac{dQ'}{dx} + \frac{dR}{dx}Q'\right),$$

le degré du second membre est seulement $n+i-2$; il est evident, qu'on peut faire évanouir autant de termes dans ce membre, que $Q$ renfermera de quantités indéterminées, c'est-à-dire $i+1$ termes, ce qui réduirait ce membre à la puissance $n-2$, après avoir disposé des coëfficients de la fonction $Q$ de manière à reduire la différence $K - \left(2R\frac{dQ}{dx} + \frac{dR}{dx}Q\right)$ au degré $n-2$. Cette différence, où il ne restera rien d'inconnu, représentera la valeur de $q$.

Par suite on trouvera la valeur de $Z$ par la formule

$$Z = qM + H.$$

Au reste, si pour trouver $Q$ on ne voulait pas employer la méthode des coëfficients indéterminés, on pourrait faire usage d'une autre méthode que nous allons indiquer; $q$ n'étant que du degré $n-2$, on trouve évidemment

$$\frac{d^{n-1}\left(2R\frac{dQ}{dx} + \frac{dR}{dx}Q\right)}{dx^{n-1}} = \frac{d^{n-1}K}{dx^{n-1}}$$

$$\frac{d^{n}\left(2R\frac{dQ}{dx} + \frac{dR}{dx}Q\right)}{dx^{n}} = \frac{d^{n}K}{dx^{n}}$$

..................................................

$$\frac{d^{n+i-1}\left(2R\frac{dQ}{dx} + \frac{dR}{dx}Q\right)}{dx^{n+i-1}} = \frac{d^{n+i-1}K}{dx^{n+i-1}}.$$

Ces équations renferment seulement $i+1$ quantités: $Q, \frac{dQ}{dx}, \frac{d^2Q}{dx^2} \ldots\ldots \frac{d^iQ}{dx^i}$; les autres différentielles sont nulles, et comme il y a aussi $i+1$ équations, on peut éliminer les différentielles $\frac{dQ}{dx}, \frac{d^2Q}{dx} \ldots \frac{d^iQ}{dx}$ et déterminer $Q$. On pourra ne chercher les valeurs de $Q, \frac{dQ}{dx}, \frac{d^2Q}{dx} \ldots \frac{d^iQ}{dx}$ que pour une valeur déterminée

$x_1$ de $x$, valeur tellement choisie que la recherche en devienne facile, on aura $Q$ pour $x$ quelconque au moyen de la formule

$$Q = Q + \frac{dQ}{dx}(x - x_1) + \frac{d^2Q}{dx^2}\frac{(x-x_1)^2}{2} + \cdots + \frac{d^iQ}{dx^i}\frac{(x-x_1)^i}{1\cdot 2\cdot 3 \cdots\cdots i}$$

$Q$, $\frac{dQ}{dx}$, $\frac{d^2Q}{dx^2} \cdots \frac{d^iQ}{dx^i}$ du second membre sont relatives à $x = x_1$.

La méthode que nous indiquons peut évidemment servir à résoudre l'équation

$$S\frac{dX}{dx} - TX = N$$

qui se rapporte aux fractions rationelles. Elle peut aussi servir à résoudre une ou plusieurs équations où les inconnues ainsi que leurs différentielles seraient élevées à différentes puissances. Cette méthode nous sera très utile, quand nous parlerons, dans un autre mémoire, de l'intégration des fonctions algébriques au moyen des fonctions transcendentes.

$Z$ étant connue, on cherchera $X'$ au moyen de l'équation

$$2RS_1\frac{dX'}{dx} + \left(\frac{dR}{dx}S_1 - 2R_1T\right)X' = Z.$$

Il importe avant tout de découvrir le degré de la fonction $X'$. Pour cela multiplions l'équation précédente par $PY_1$, nous aurons

$$2RY\frac{dX'}{dx} + \left(\frac{dR}{dx}Y - 2R\frac{dY}{dx}\right)X' = PY_1Z.$$

Désignons par $p$ le degré de $Y$ et par $s$ celui de $X'$; le degré du premier membre de l'équation précédente, excepté le cas $2s + n = 2p$, sera $n + p + s - 1$. Donc en désignant par $k$ le degré de $Z$ et par $q$ celui de $S_1$, on aura

$$n + p + s - 1 = k + p - q;$$

donc

$$s = k - n - q + 1.$$

$s$ étant connue par cette formule, on essaiera, si l'équation $2s + n = 2p$ est satisfaite. Si elle l'est, l'équation en $X'$ est impossible, car alors la plus haute puissance de $x$ disparaissant dans la fonction

$$2RS_1\frac{dX'}{dx} + \left(\frac{dR}{dx}S_1 - 2R_1T\right)X'$$

cette fonction deviendra d'un degré moins élevé que $Z$, et si l'on augmente $s$ d'une unité, alors l'équation $2s+n=2p$ n'étant plus satisfaite, la plus haute puissance de $x$ dans

$$2RS_1 \frac{dX'}{dx} + \left(\frac{dR}{dx} S_1 - 2R_1 T\right) X'$$

ne disparaîtra pas, et cette fonction deviendra supérieure en degré à $Z$. Ainsi si l'on a $2s+n=2p$, c'est-à-dire

$$2k - 2q - n + 2 = 2p$$

alors tout est dit: l'intégrale proposée est impossible algébriquement. Supposons que l'équation $2s+n=2p$ n'a pas lieu, le degré de $X'$ sera $=s$, ou bien il sera $=s+1$. Le dernier cas aura lieu, si $2s+n+2=2p$, car, en supposant que $X'$ soit du degré $s+1$, le degré de la fonction

$$2RY \frac{dX'}{dx} + \left(\frac{dR}{dx} Y - 2R \frac{dY}{dx}\right) X'$$

sera, comme dans le cas où le degré de $X'$ est $s$, égal à $n+p+s-1$, car le coëfficient de $x^{n+p+s}$ se réduira à zéro dans cette fonction. Ainsi dans le cas de $2s+n+2=2p$, le degré de $X'$ est $=s+1$, et dans le cas où l'équation $2s+n+2=2p$ n'est pas satisfaite, $X'$ ne sera que du degré $s$.

Le degré de $X'$ étant connu, on déterminera cette fonction, si la chose est possible, par la méthode que nous avons exposée en parlant des fractions rationelles, ou par celle des coëfficients indéterminés, ou bien encore par la méthode de différentiation successive dont il vient d'être question

Proposons nous d'intégrer la fonction

$$\int \frac{x(x^4+x^3-4x^2-4x-4)\,dx}{(x^3+x^2-x-1)y}, \quad y^2 = x^5 - 1$$

Ici on a $\mu=5$, $m=3$, $n=5$, donc le degré de la fonction $Q$ est $=-2$, ainsi $Q=o$; donc dans l'intégrale $\frac{X}{Y}y+$ const. le degré de la quantité $X$ est de deux unités inférieur à $Y$, le plus grand commun diviseur entre $R=x^5-1$ et $M=x^3+x^2-x-1$ est $x-1$, donc $P=x-1$, $R_1=x^4+x^3+x^2+x+1$, le plus grand commun diviseur entre $M$ et $\frac{dM}{dx}=S_1 Y_1=x+1$, donc

*

$$Y = PS_1Y_1 = x^2 - 1\,;$$

par suite $Y_1 = 1$, $S_1 = x + 1$, $S = x^2 - 1$, $T = 2x$.

Donc pour déterminer $X$ on aura l'équation

$$2\,(x^5 - 1)\,(x + 1)\,\frac{dX}{dx} + x(x^4 + x^3 - 4x^2 - 4x - 4)\,X = 2x(x^4 + x^3 - 4x^2 - 4x - 4)$$

$X$ étant de deux unités inférieure à $Y$, on doit avoir $X =$ const. et $\frac{dX}{dx} = o$, donc $X = 2$. Ainsi

$$\int \frac{x\,(x^4 + x^3 - 4x^2 - 4x - 4)\,dx}{(x^3 + x^2 - x - 1)\,y} = \frac{2y}{x^2 - 1} + \text{const.}$$

Soit encore à intégrer

$$\int \frac{dx}{y}, \quad y^2 = R.$$

Ici $M = 1$, le plus grand commun diviseur $P$ entre $M$ et $R$ est aussi l'unité, donc $R_1 = R$; le plus grand commun diviseur entre $M$ et $\frac{dM}{dx}$ est $= 1$, donc $SY_1 = Y = 1$, $S = 1$, $T = o$. Ainsi nous aurons

$$2R\,\frac{dX}{dx} + \frac{dR}{dx}\,X = 2a = 2.$$

La plus haute puissance de $x$ dans le premier membre de cette équation ne disparaît jamais, donc le membre ne pourra jamais se réduire à une quantité constante, à moins que le degré de la fonction $R$ ne soit l'unité, ou zéro. Donc l'intégrale $\int \frac{dx}{y}$ est impossible algébriquement toutes les fois que la puissance de $R$ surpasse l'unité.

X. La méthode que nous avons suivie pour trouver l'intégrale $\int \frac{Ldx}{My}$, quand cette intégrale est algébrique, s'applique sans la moindre difficulté à l'intégrale

$$\int \left(\frac{L_1}{y^{n-1}} + \frac{L_2}{y^{n-2}} + \cdots + \frac{L_{n-1}}{y}\right) dx\,,$$

dans laquelle $L_1$, $L_2$, $\cdots L_n$ sont des fonctions rationelles de $x$, $y$ est donnée par l'équation $y^n = R$, $n$ est un nombre entier, et $R$ une fonction entière de $x$. Si

l'intégrale précédente est algébrique, il sera facile de démontrer que les intégrales $\int \frac{L_1}{y^{n-1}} dx$, $\int \frac{L_2}{y^{n-2}} dx \cdots \int \frac{L_{n-1}}{y} dx$ seront algébriques, chacune en particulier, et que l'on aura généralement

$$\int \frac{L_m}{y^{n-m}} dx = Xy^m + C,$$

$X$ étant une fonction rationelle de $x$. On peut admettre que la fonction $R$ renferme des facteurs multiples, mais il suffit de supposer que la plus haute puissance de chaque facteur linéaire contenu dans $R$, ne surpasse pas $n-1$, car, dans le cas contraire, l'équation $y^n = R$ pourrait être simplifiée.

Quant à l'intégrale

$$\int (L_1 y^{n-1} + L_2 y^{n-2} + \cdots L_{n-1} y + L_n)\, dx,$$

où $y$ est donnée par une équation algébrique

$$o = y^n + A_1 y^{n-1} + A_2 y^{n-2} + \cdots + A_n,$$

$A_1$, $A_2$, $\cdots A_n$ étant des fonctions entières de $x$, on aura à traiter, pour la trouver, des équations plus composées que celles que nous avons résolues; cependant la solution en est toujours possible, en sorte qu'on pourra toujours trouver l'intégrale d'une fonction algébrique, quand cette intégrale est elle-même une fonction algébrique. Mais, si l'opération transcendante qu'on indique par $\int$, ne se réduit pas aux opérations algébriques, alors on doit chercher à la réduire aux opérations algébriques et transcendantes, en n'admettant parmi ces dernières que celles dont les propriétés nous soient connues. Mais le problème devient alors très difficile.

Abel a donné une méthode pour trouver l'intégrale de la forme $\int \frac{L}{y} dx$, $y^2 = R$, quand cette intégrale peut être représentée par les seules quantités logarithmiques, et quand $L$ et $R$ sont des fonctions entières. J'ai trouvé depuis peu qu'on peut toujours trouver l'intégrale $\int \frac{L}{M} \frac{dx}{y}$, $y^2 = R$, quand elle est réductible aux quantités algébriques et logarithmiques, $L$, $M$ et $R$ étant des fonctions entières de $x$. J'exposerai mes recherches sur cet objet dans un autre mémoire. Quant à

celui-ci, je le terminerai par une observation relativement à l'intégration d'une fraction rationelle $\frac{L}{M}$, observation qu'on peut appliquer aussi à l'intégrale

$$\int \frac{L}{M}\frac{dx}{y},\ y^2 = R.$$

Extrayons la partie entière $K$ de la fraction $\frac{L}{M}$, en sorte que

$$\frac{L}{M} = K + \frac{N}{M},$$

et cherchons les produits $M_1$, $M_2$, $M_3 \cdots$ des facteurs simples qui sont contenus dans $M$ un même nombre de fois; ainsi, par exemple, $M_1$ représentera le produit de tous les facteurs simples qui sont contenus dans $M$ chacun $n$ fois, $M_2$ représentera le produit des facteurs simples contenus dans $M$ chacun $m$ fois, et ainsi de suite: nous aurons évidemment

$$M = M_1{}^n M_2{}^m \ldots\ldots$$

Les quantités $M_1\, M_2 \cdots\cdots$ se trouveront sans résoudre aucune équation. Cela posé décomposons la fraction $\frac{N}{M}$ en fractions partielles, en sorte que

$$\frac{N}{M} = \frac{N_1}{M_1{}^n} + \frac{N_2}{M_2{}^m} + \ldots.$$

Pour trouver $\int \frac{N}{M}\,dx$, nous aurons à intégrer chaque quantité $\frac{N_1}{M_1{}^n}$, $\frac{N_2}{M_2{}^m} \cdots\cdot$ N'en considérons que la première, et ce que nous en disons, s'appliquera, mot pour mot, à toutes les autres.

Désignons, pour plus de commodité, $N_1$ par $f(x)$, $M_1$ par $\varphi(x)$, et par $x_1, x_2 \cdots\cdots$ les racines de l'équation $\varphi(x) = o$; nous pouvons faire

$$\begin{aligned}\frac{f(x)}{(\varphi x)^n} = {} & \frac{A_1}{(x-x_1)^n} + \frac{A_2}{(x-x_2)^n} + \ldots\ldots \\ & + \frac{B_1}{(x-x_1)^{n-2}} + \frac{B_2}{(x-x_2)^{n-2}} + \ldots\ldots \\ & + \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ & + \frac{K_1}{(x-x_1)^2} + \frac{K_2}{(x-x_2)^2} + \ldots\ldots \\ & + \frac{1}{1\cdot 2\cdots\cdots n-1}\left\{\frac{d^{n-1}\frac{fx_1}{(\varphi' x_1)^n}}{dx_1{}^{n-1}}\frac{1}{x-x_1} + \frac{d^{n-1}\frac{f(x_2)}{(\varphi' x_2)^n}}{dx_2{}^{n-1}}\frac{1}{x-x_2} + \cdots\right\}\end{aligned}$$

$A_1$, $A_2 \cdots$ $B_1$, $B_2 \cdots\cdots$ sont des quantités indépendantes de $x$.

On voit par la formule précédente que l'intégrale $\int \frac{f(x)}{(\varphi x)^n}\, dx$ ne saurait être algébrique à moins que la fonction

$$\frac{d^{n-1}\dfrac{f(x)}{(\varphi' x)^n}}{dx^{n-1}}$$

ne disparaisse pour toutes les valeurs de $x = x_1,\ x_2 \cdots\cdots$

Donc, pour que la fonction $\frac{f(x)}{(\varphi x)^n}$ soit intégrable algébriquement, il faut que le numérateur de la différentielle $\dfrac{d^{n-1}\dfrac{f(x)}{(\varphi' x)^n}}{dx^{n-1}}$,

savoir

$$(\varphi' x)^{2n-1}\,\frac{d^{n-1}\dfrac{f(x)}{(\varphi' x)^n}}{dx^{n-1}}$$

soit divisible par $\varphi(x)$. Si la division peut se faire, alors

$$\begin{aligned}\int \frac{f(x)}{(\varphi x)^n}\, dx = &-\frac{1}{n-1}\left\{\frac{A_1}{(x-x_1)^{n-1}} + \frac{A_2}{(x-x_2)^{n-1}} + \cdots\right\}\\ &-\frac{1}{n-2}\left\{\frac{B_1}{(x-x_1)^{n-2}} + \frac{B_2}{(x-x_2)^{n-2}} + \cdots\right\}\\ &-\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\\ &-\left\{\frac{K_1}{x-x_1} + \frac{K_2}{x-x_2} + \cdots\right\}.\end{aligned}$$

Or, le second membre de cette équation, étant une fonction invariable de toutes les racines de l'équation $\varphi x = o$, il est exprimable rationellement au moyen des coëfficiens de la fonction $\varphi x$.

On trouvera de la même manière les autres intégrales $\int \frac{N_2}{M_2}\, dx \cdots$, et l'on parviendra à intégrer $\int \frac{N}{M}\, dx$. Mais comme

$$\int \frac{L}{M}\, dx = \int K dx + \int \frac{N}{M}\, dx,$$

on trouvera donc $\int \frac{L}{M}\, dx$, sans résoudre aucune équation.

# L'HYDROBORACITE,

## NOUVELLE ESPÈCE MINÉRALE;

PAR

M. HESS.

(Lu le 14 Juin 1833.)

Parmi une collection de minéraux venant du Caucase, il s'en trouvait un qu'on avait pris pour du gypse. M. *Woerth*, qui parcourut ces minéraux, reconnut que ce n'était point du gypse, mais une substance différente de la plupart des espèces connues, et facile à distinguer par sa grande fusibilité.

Voici les caractères de cette substance à laquelle j'ai trouvé convenable de donner le nom d'*Hydroboracite:* Elle elle blanche, ressemble assez à du gypse feuilleté, elle est tendre, paraît rougeâtre à cause d'un silicate ferrique qui se trouve disséminé dans la masse; toute la masse est traversée de cavités, ressemblant beaucoup à celles d'un bois vermoulu, et qui sont remplies d'une masse argilleuse contenant différents sels. Les feuilles minces sont demi-transparentes. La pesanteur spécifique du minéral est approximativement $= 1,9$.

L'hydroboracite, choisie avec soin et dégagée des substances qui l'accompagnent, se comporte comme il suit: Chauffée dans un tube de verre elle dégage beaucoup d'eau. Le dard du chalumeau la fait fondre très facilement en un verre transparent, incolore et qui ne devient point opaque par le refroidissement. Elle donne une teinte verdâtre à la flamme du chalumeau, ce qui décèle la présence de l'acide borique.

L'hydroboracite est un peu soluble dans l'eau. Quand on la fait bouillir avec de l'eau, elle lui communique une faible réaction alcaline; et la dissolution aqueuse étant filtrée et évaporée, donne une pellicule blanche. — L'hydroboracite est facile-

ment dissoute à l'aide de la chaleur par les acides nitrique et hydrocholique. Si les acides sont concentrés, il se dépose de l'acide borique, quand le liquide se refroidit. Ces dissolutions ne précipitent point par le chlorure barytique. Si l'on ne s'est point servi d'un excès d'acide pour obtenir une dissolution, celle-ci est abondamment précipitée par l'ammoniaque caustique, et le précipité est redissout par le muriate d'ammoniaque, sauf quelquefois des traces inappréciables d'alumine. L'ammoniaque caustique ne produit point de précipité dans la dissolution acide. La dissolution saturée d'ammoniaque est abondamment précipitée par l'acide oxalique.

3,025 gram. d'hydroboracite perdirent 0,8 gram. par la calcination, ce qui indique 26,445 p. Ct. d'eau.

2,614 gram. perdirent dans une seconde expérience 0,6855 gram. d'eau, ce qui indique 26,23 p. Ct. La moyenne de ces deux expériences est 26,33 p. Ct.

3,034 gram. d'hydroboracite furent fondus avec un mélange de carbonate potassique et de potasse caustique dans un creuset de platine. La masse fondue fut dissoute dans l'eau; le résidu lavé, et puis redissout dans de l'acide hydrochlorique. De cette dissolution on précipita la chaux au moyen de l'ammoniaque caustique et de l'acide oxalique: le précipité, ayant été transformé en carbonate, pesait 0,741, ce qui équivaut à 13,74 p. Ct. de chaux. La dissolution évaporée et calcinée au contact de l'air laissa 0,325 ou 10,71 p. Ct. de magnésie. Si nous admettons que ce qui manque consistait en acide borique, cette analyse nous donne

| | | oxigène | | multiples |
|---|---|---|---|---|
| Chaux | 13,74 | 3,859 | 8,00 | 1 |
| Magnésie | 10,71 | 4,141 | | |
| Eau | 26,33 | | 23,41 | 3 |
| Acide borique | 49,22 | | 33,86 | 4 |
| | 100,00 | | | |

Pour doser la quantité d'acide borique, 1,109 gram. de la substance furent dissouts dans l'acide hydrofluorique mêlé avec de l'acide sulfurique, et évaporés jusqu'à

siccité. Le mélange ayant été calciné pour chasser l'excès d'acide sulfurique, il laissa 0,715 gram. de résidu, ce qui équivaut à 64,472 p. Ct. de sulfate.

Si l'on transforme la quantité de chaux et de magnésie que nous avons obtenue plus haut, en sulfates de ces bases, nous aurons

$$\dot{C}a \quad 13,74 = 33,08\ \dot{C}a\,\ddot{S}$$
$$\dot{M}g \quad 10,71 = 31,40\ \dot{M}g\,\ddot{S}$$
$$64,48$$

Ce résultat s'accorde donc parfaitement avec la première analyse, et suppose que le minéral ne contient point d'alcali, en sorte que sa réaction alcaline ne doit être attribuée qu'à la solubilité du sous-borate magnésique.

Ce résultat avait été obtenu le printemps. Mes travaux ayant été interrompus pendant quelque temps, je trouvai, lorsque je revis cette analyse, que j'avais négligé de décrire en détail la dernière expérience faite à l'aide de l'acide hydrofluorique, de façon que je ne me souvenais plus si les 64,472 p. Ct. de sulfate avaient été obtenus le sulfate de chaux y compris, ou bien si c'était 64 p. Ct. de sulfate soluble? Ce qui dans ce cas supposerait une composition bien différente de celle qui avait été citée plus haut. Je fus donc obligé de recommencer, et j'obtins, par une seconde expérience, comme résidu de la calcination, 63 p. Ct.

Ayant obtenu de la complaisance de M. *Woerth* encore un petit échantillon de cette substance, quoique moins pure, je répétai l'analyse.

2,15 gram. dissouts dans l'acide hydrochlorique laissèrent 0,031 de résidu insoluble.

La dissolution saturée d'ammoniaque et précipitée par l'acide oxalique, donne après la calcination 0,5 gram. de carbonate de chaux, ce qui équivaut à 23,59 p. Ct. ou 13,298 de chaux.

La dissolution ayant été évaporée, le résidu calciné pour en chasser les sels ammoniacaux, redissout ensuite dans l'acide hydrofluorique et évaporé avec de l'acide sulfurique, donna après la calcination du résidu 0,651 gram. de sulfate de magnésie, équivalents à 30,72 p. Ct. ou 10,45 de magnésie. — Pour m'assurer d'une manière

directe, si le sulfate de magnésie ne contenait point d'alcali, il fut dissout dans l'eau et précipité par l'acétate de baryte. Le liquide filtré ayant été évaporé à sec et calciné, il fut arrosé d'eau que l'on fit bouillir avec le résidu; le papier de curcuma n'indiqua la présence d'aucun carbonate alcalin. Le résultat de cette analyse qui s'accorde avec le premier, donne pour la composition de l'hydroboracite:

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| Chaux | 13,298 | 3,73 | 7,69 | 1 |
| Magnésie | 10,450 | 3,96 | | |
| Eau | 26,330 | | 23,41 | 3 |
| Acide borique | 49,922 | | 34,34 | 4 |
| | 100,000 | | | |

Il résulte de ces analyses que la formule du minéral est $\left.\begin{matrix}\dot{C}a\\ \dot{M}g\end{matrix}\right\}^{3} \dddot{B}^{2} + 9\dot{H}$. Elle justifie pleinement le nom que j'ai donné au minéral, vu que l'acide borique et la magnésie (dont une partie est remplacée par de la chaux) se trouvent dans le même rapport que dans la boracite.

Tab 1

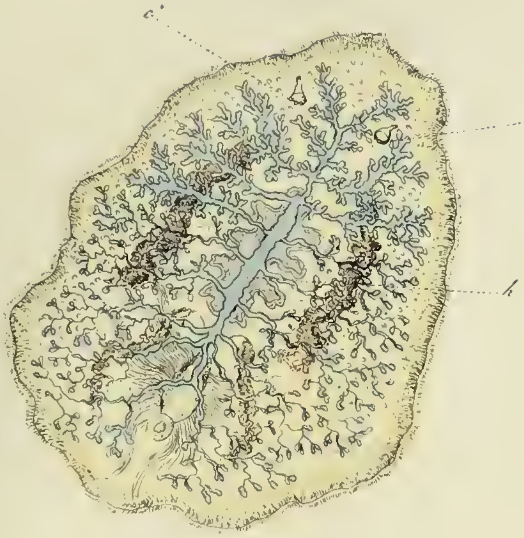
Fig. 1-3 Planaria Lichenoides. n

Fig. 4-6 Sargassicola. n

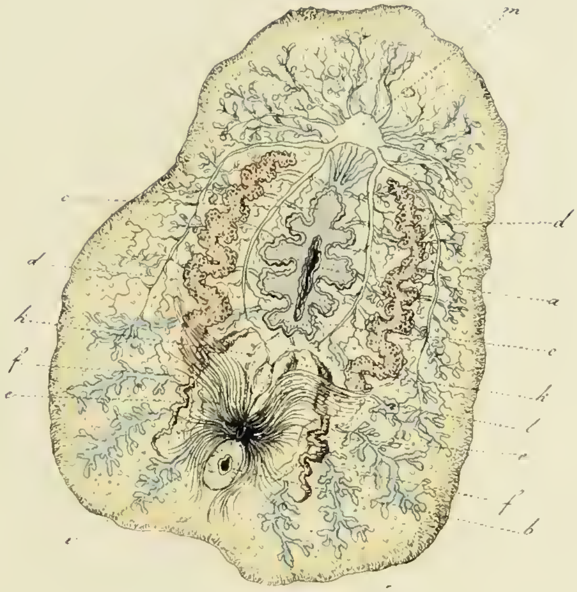
D^r. H. M.

F. 1

F. 2



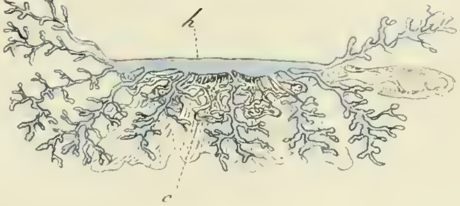

F. 3



F. 5.

F. 6.

F. 4.

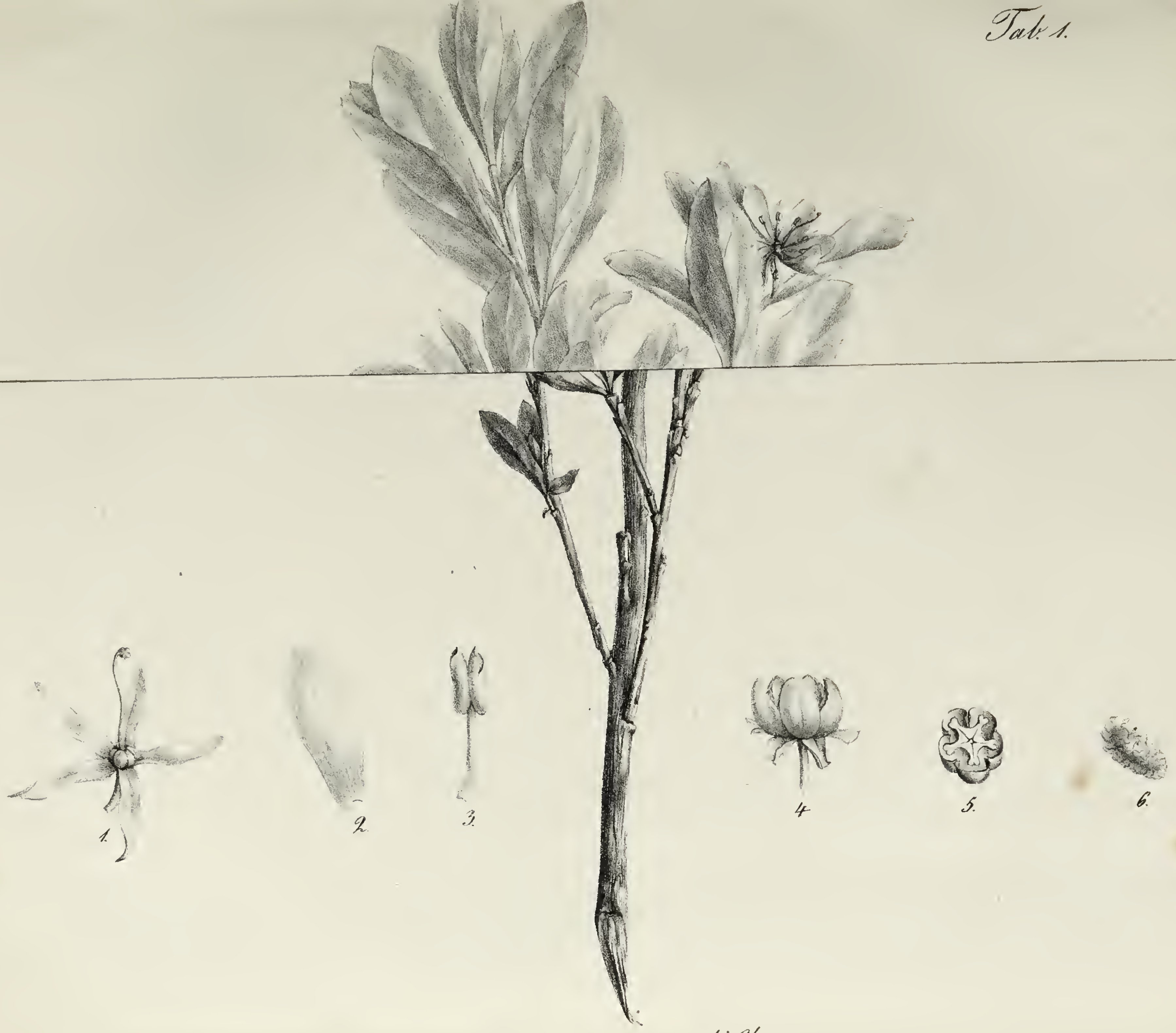



D.r H. M.

Planaria pellucida. n.

2.
A.
B
1.
A.
B.
3.
A.
B.
C.
D.
E.
F.
G.
H.
K.
L.
M.
N.

Tab. 1.




*Cladothamnus pyroliflorus.*

Pape del.

Tab. 1.

*Cladothamnus pyroliflorus.*

Pape del.

*Lütkea sibbaldioides.*

Pape del.

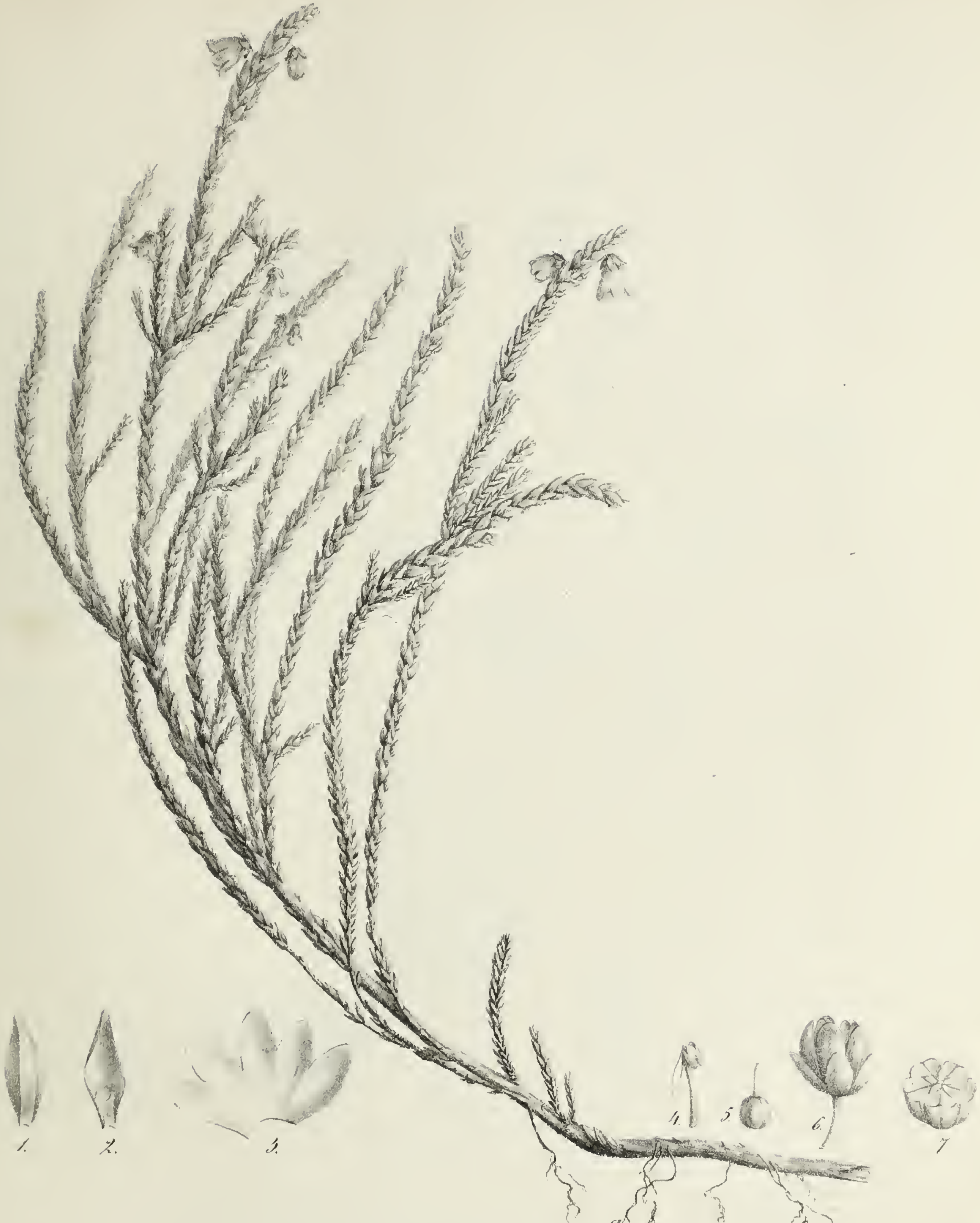
Tab. 3.

*Menziesia aleutica. Spr.*

Pape del.

Romanzowia Sitchensis.

Pape del.




Andromeda Mertensiana

Page del.

Gentiana Douglasiana.

Pape del.

Tab. 1.

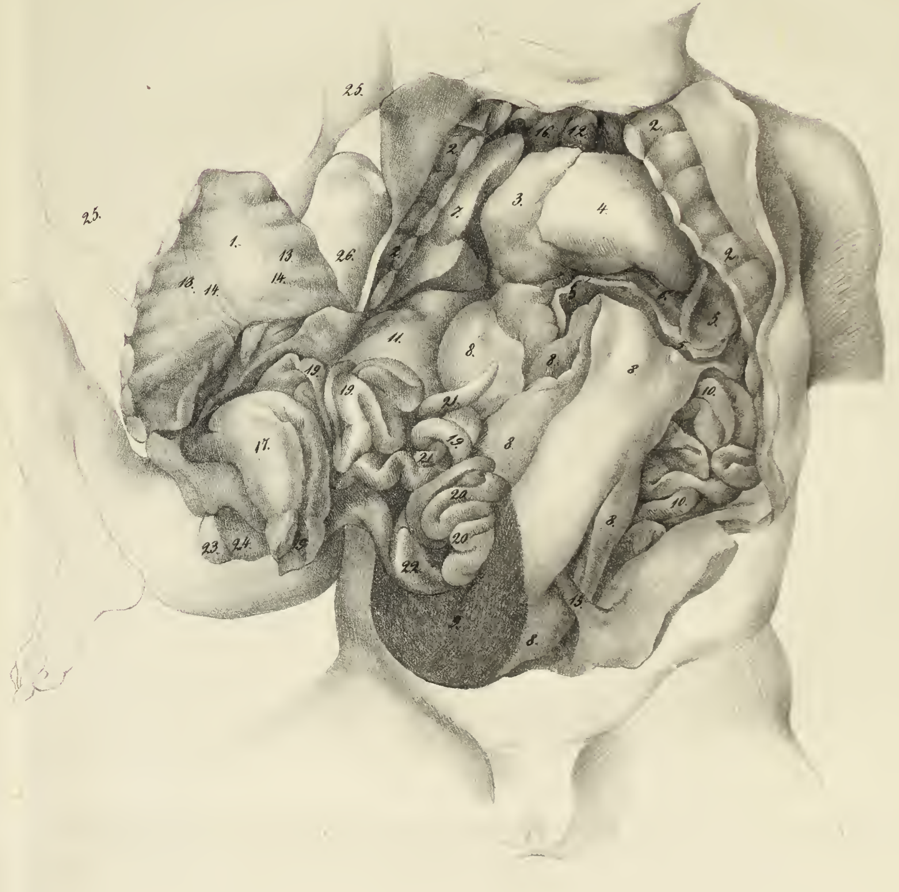
Tab. 1

Pape del.

Tab. 2.

Pape del.

Tab. 3.



Tab XI.

*Eriocaulon macrorhizon.*

Tab. XII.

*Eriocaulon lingulatum.*

*Eriocaulon piliferum.*

Pape del.

Tab XIII.

*Eriocaulon elegans.*

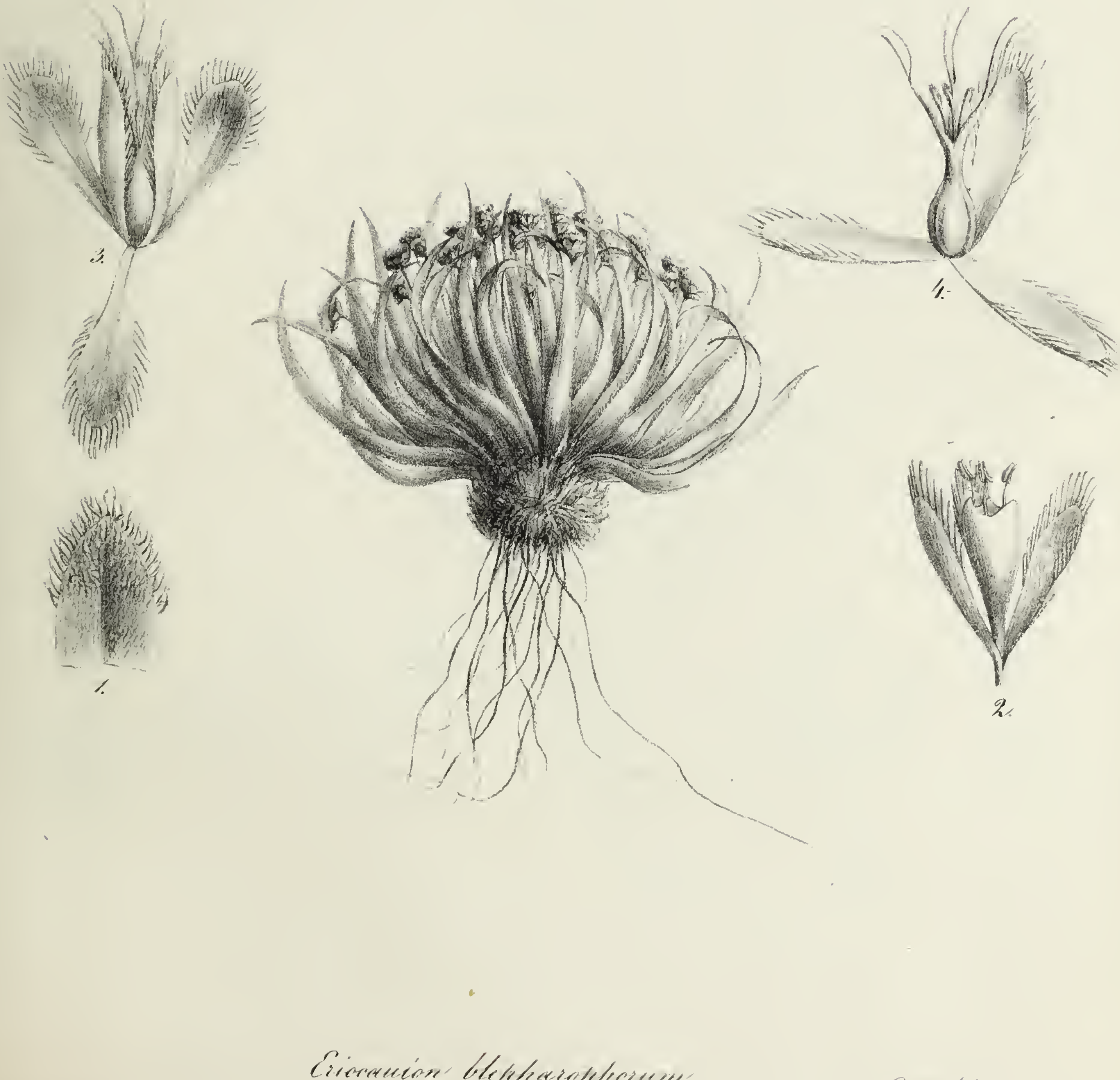
Pape del.

*Eriocaulon nitidum.*

*Pape del.*

*Eriocaulon anthemiflorum.*

Pape del.




*Eriocaulon blepharophorum.*

Pape del.

*Eriocaulon plantagineum.*

Pape del.

THE LIBRARY
OF THE

Tab. XVIII.

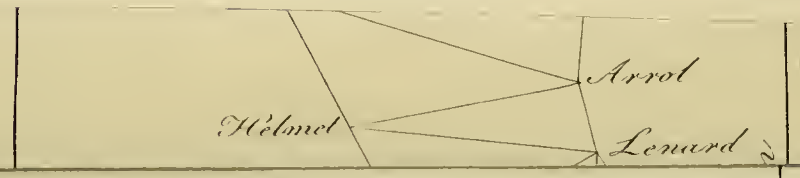
*Eriocaulon corymbosum*

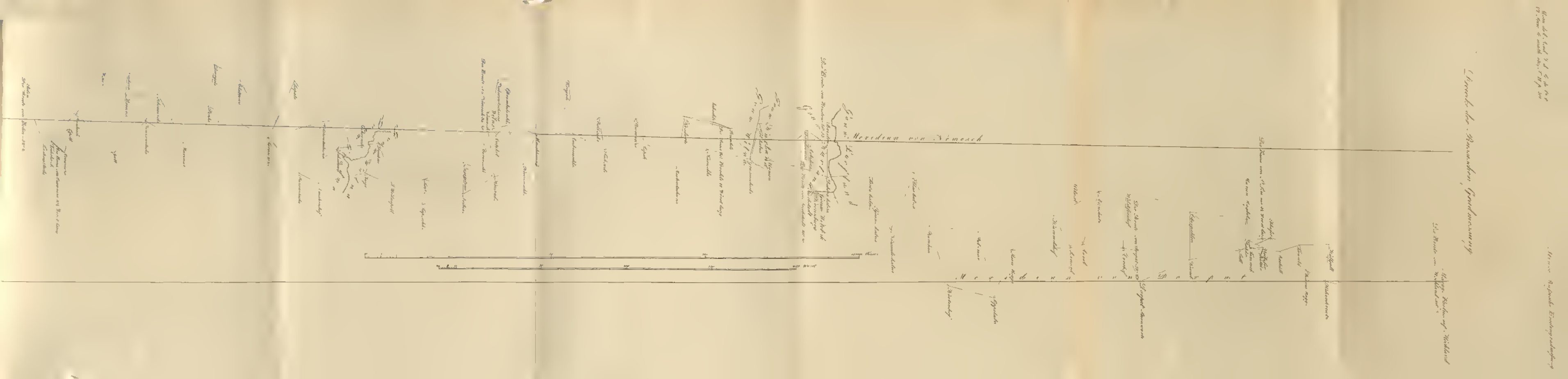
Pape del.

*Eriocaulon mucronatum*

*Eriocaulon lanuginosum.*

THE LIBRARY
OF THE
UNIVERSITY OF ILLINOIS


Arrol
Hélmet
Lenard

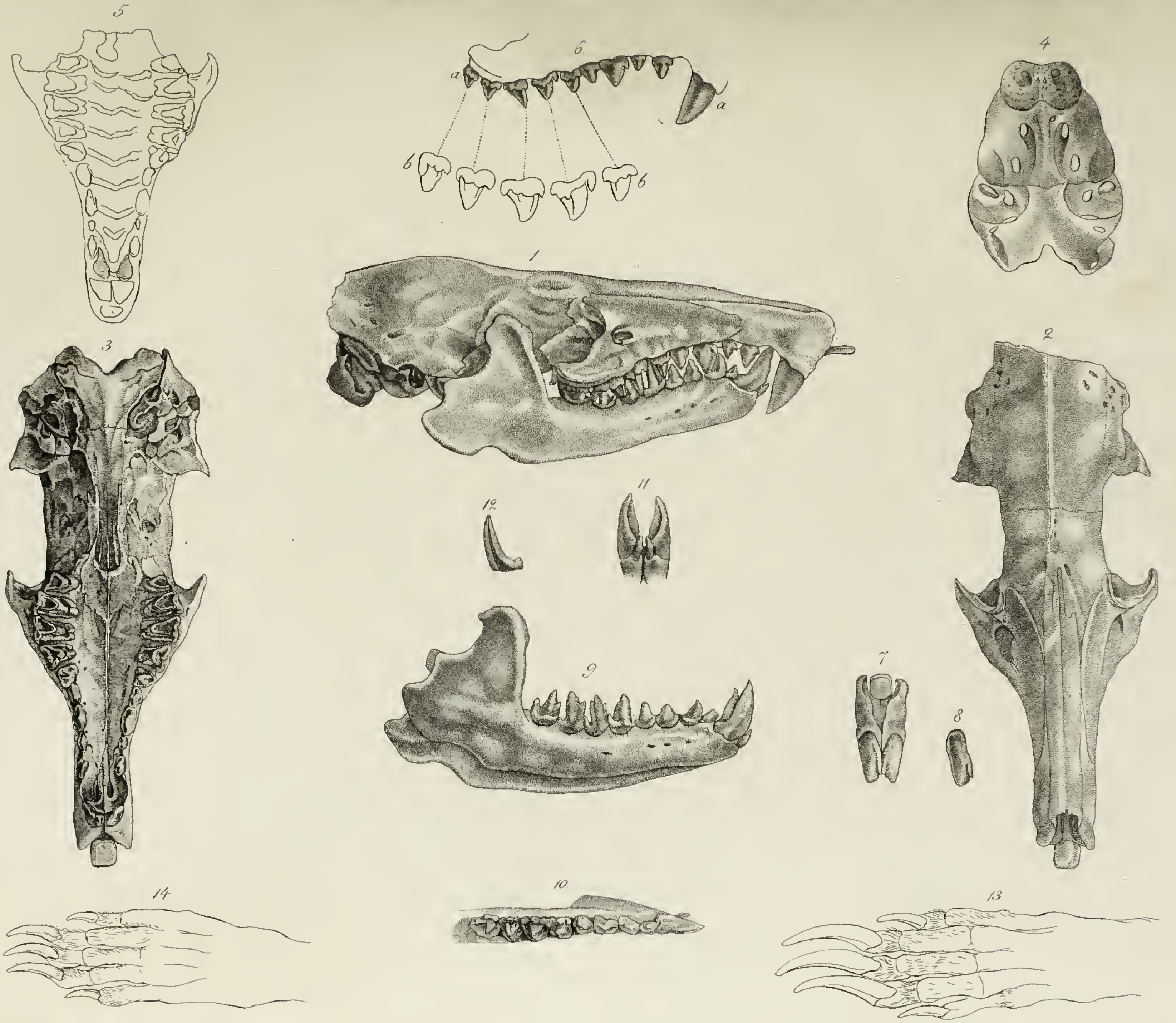


½

W. Pape ad nat. pinxit.

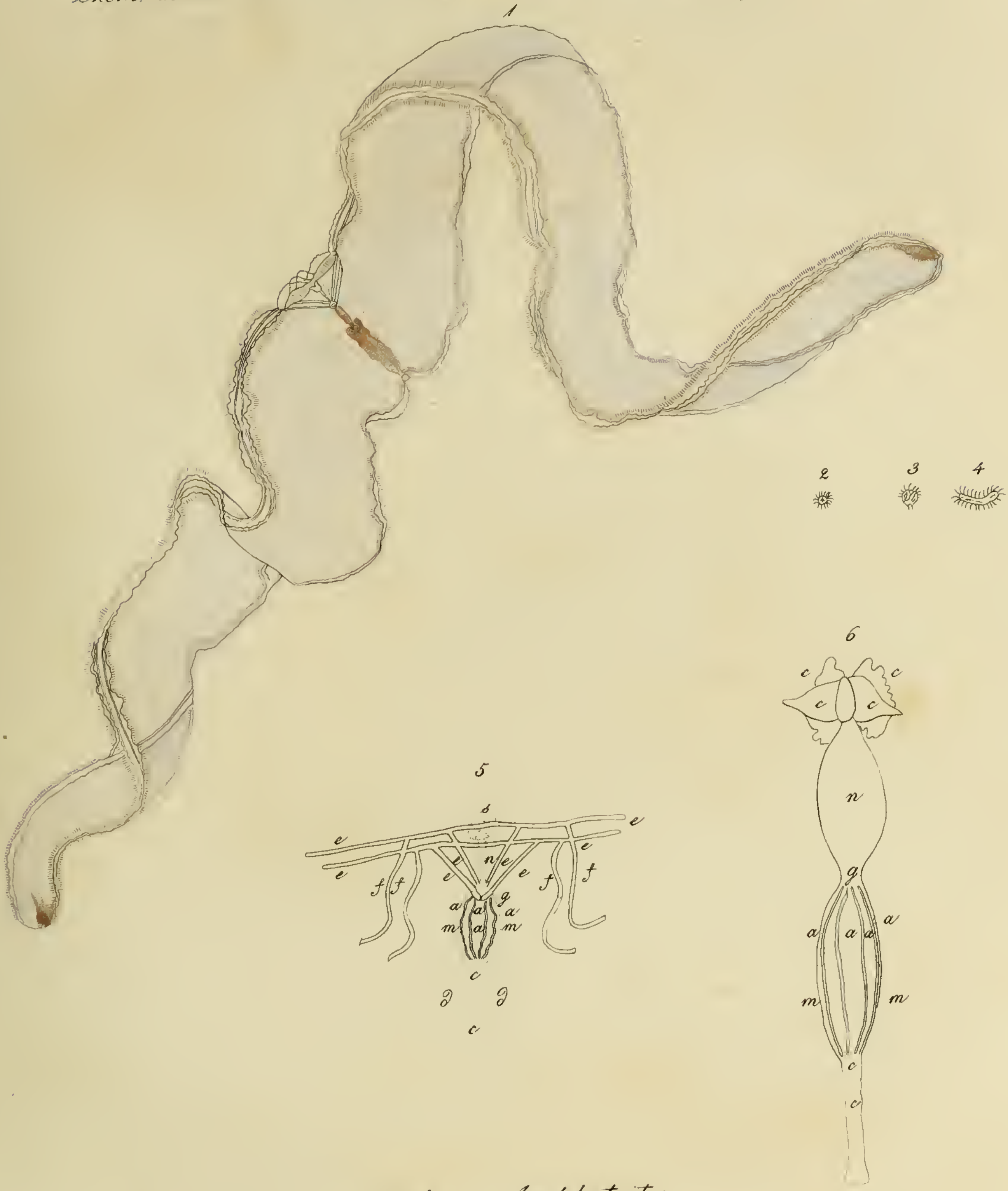
Solenodon paradoxus. Brandt

THE LIBRARY
OF THE
[illegible]




W. Pape del.

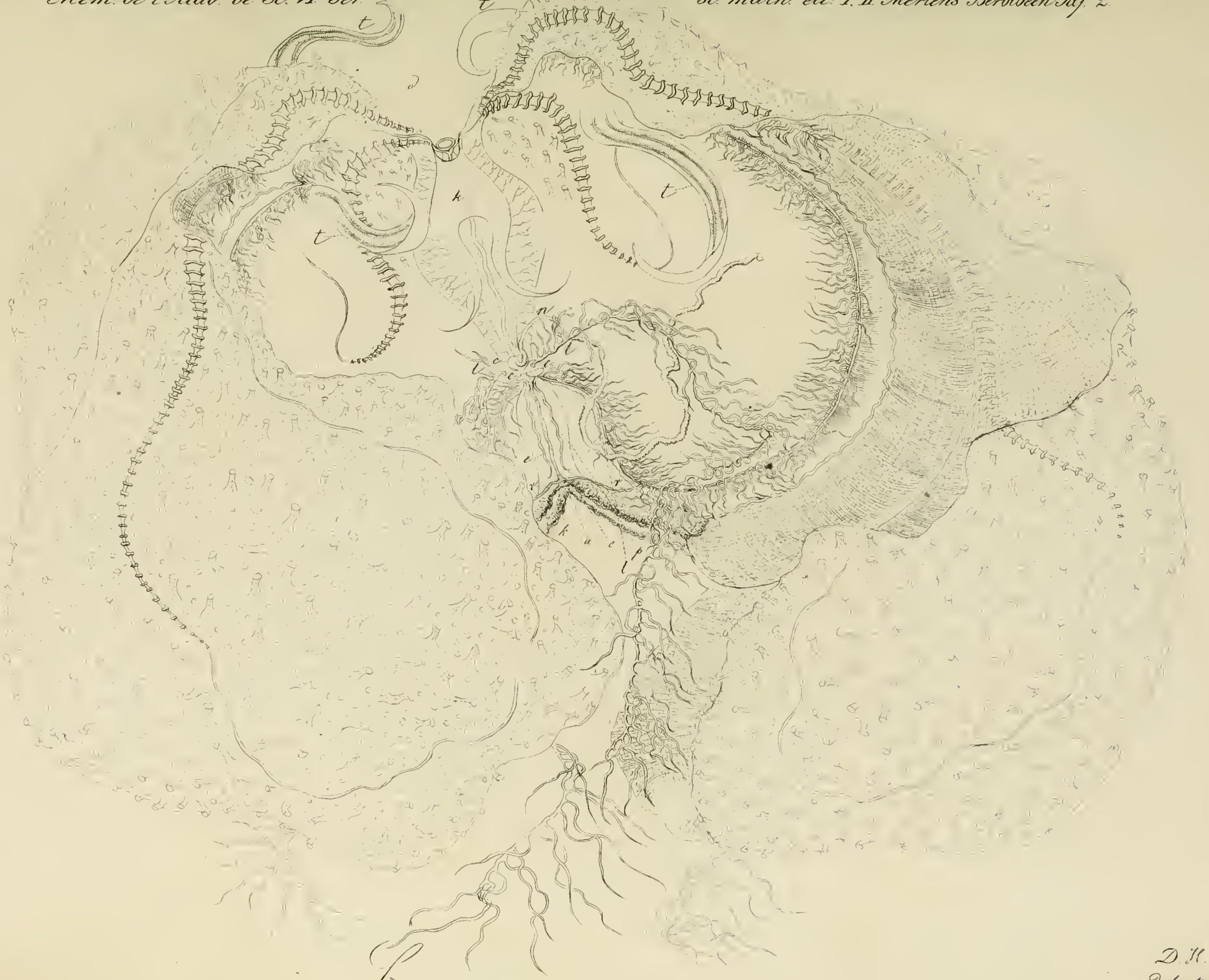
THE LIBRARY
OF THE
UNIVERSITY OF ILLINOIS




Cestum Amphitrites.

D. H. M. del.

THE LIBRARY
OF THE
UNIVERSITY OF [illegible]




Leucothea formosa n.

D. H. M. del. et sc.

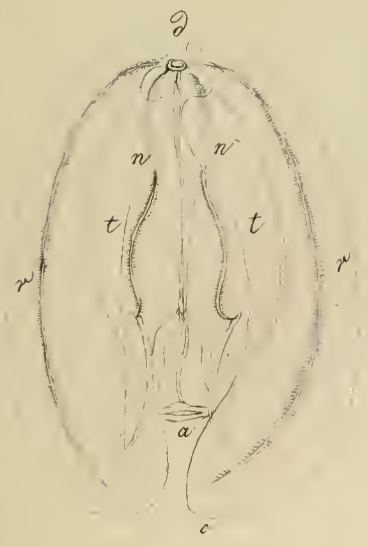
[illegible]

Leucothea formosa n.

D. H. M. del. et sc.

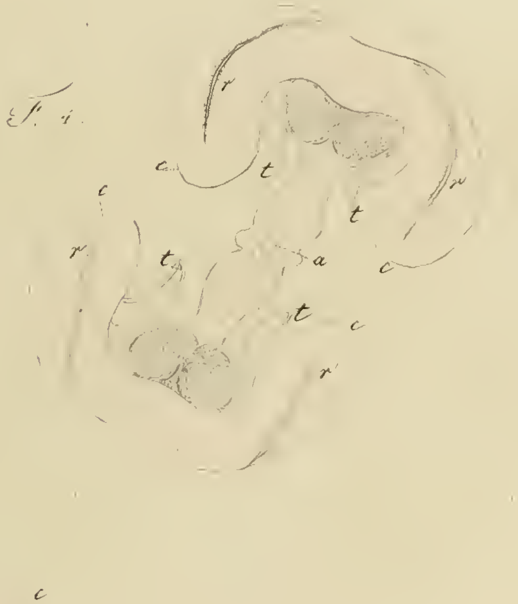
[illegible]
[illegible]
[illegible]

F. 1

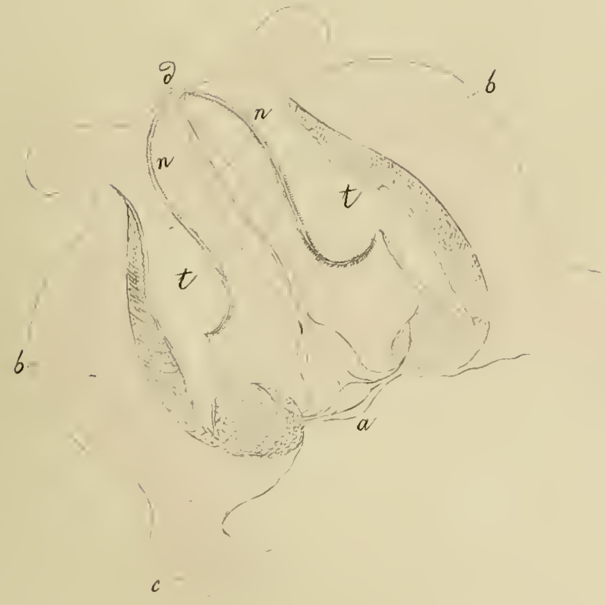



F. 2

F. 4




F. 3



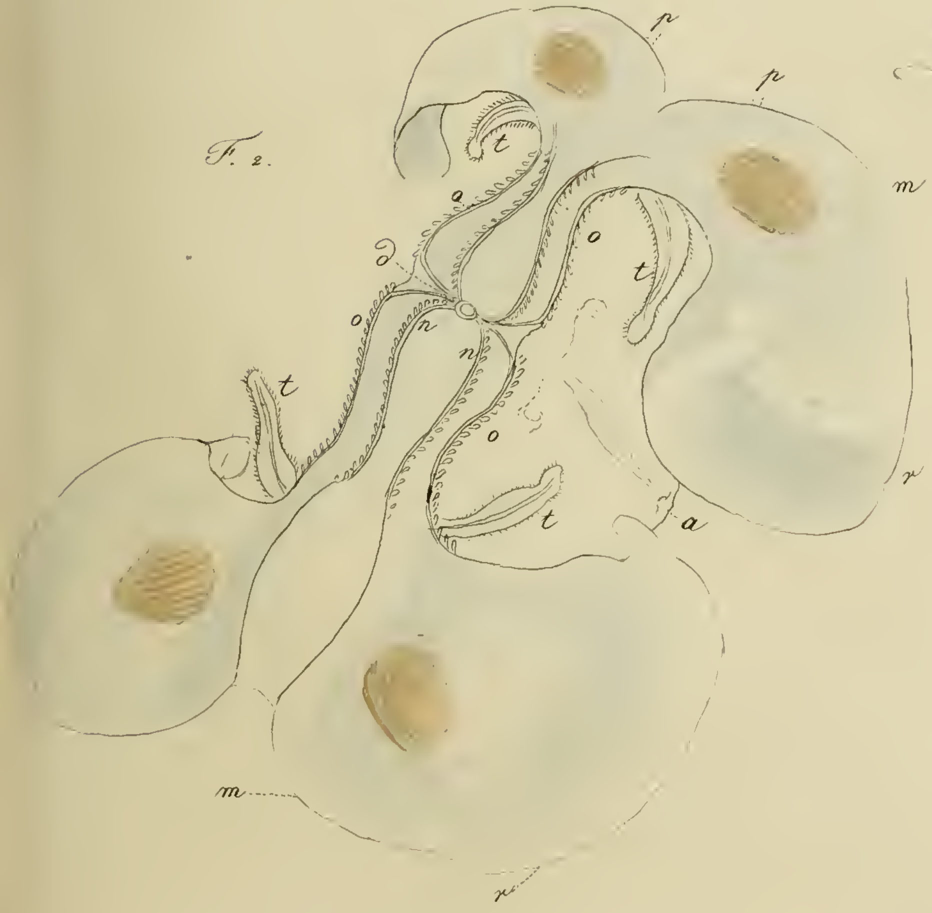

Alcinoe rosea n.

D. H. M.
del. et sc.

[illegible]
OF THE
[illegible]

F. 1.

F. 2.



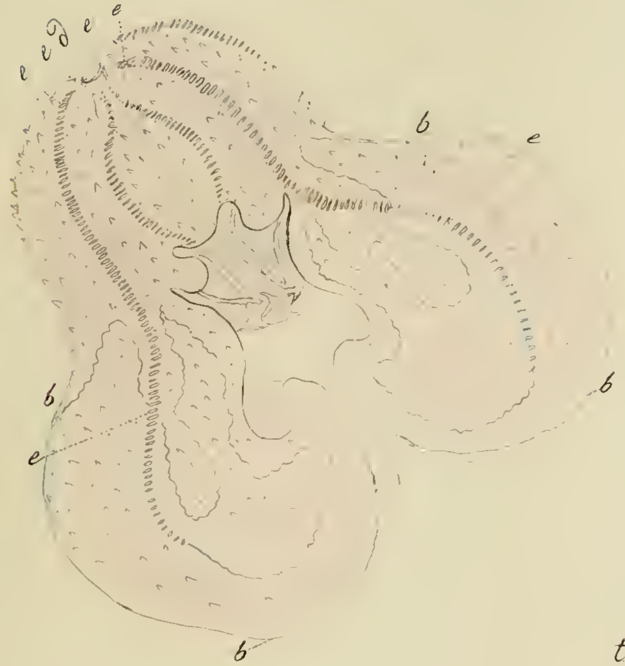

F. 3.

Calymma Trevirani. Esch.

D. H. M.
del. et sc.

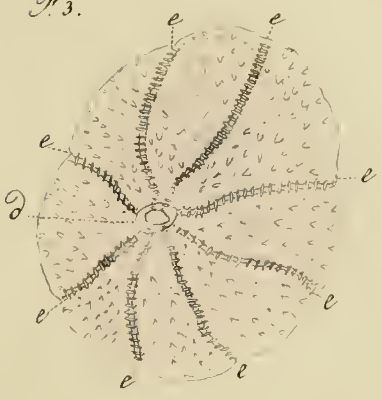
THE LIBRARY
OF THE
UNIVERSITY OF ILLINOIS

F. 1.




F. 2.

F. 3.



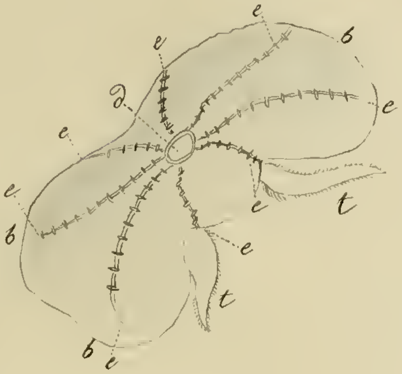

F. 4.

Bolina elegans n.

D. H. M.
del. et sc.

[illegible]
[illegible]
[illegible]

F. 1.

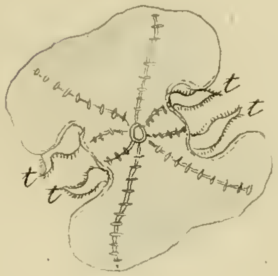



F. 2.

F. 5.

F. 3.

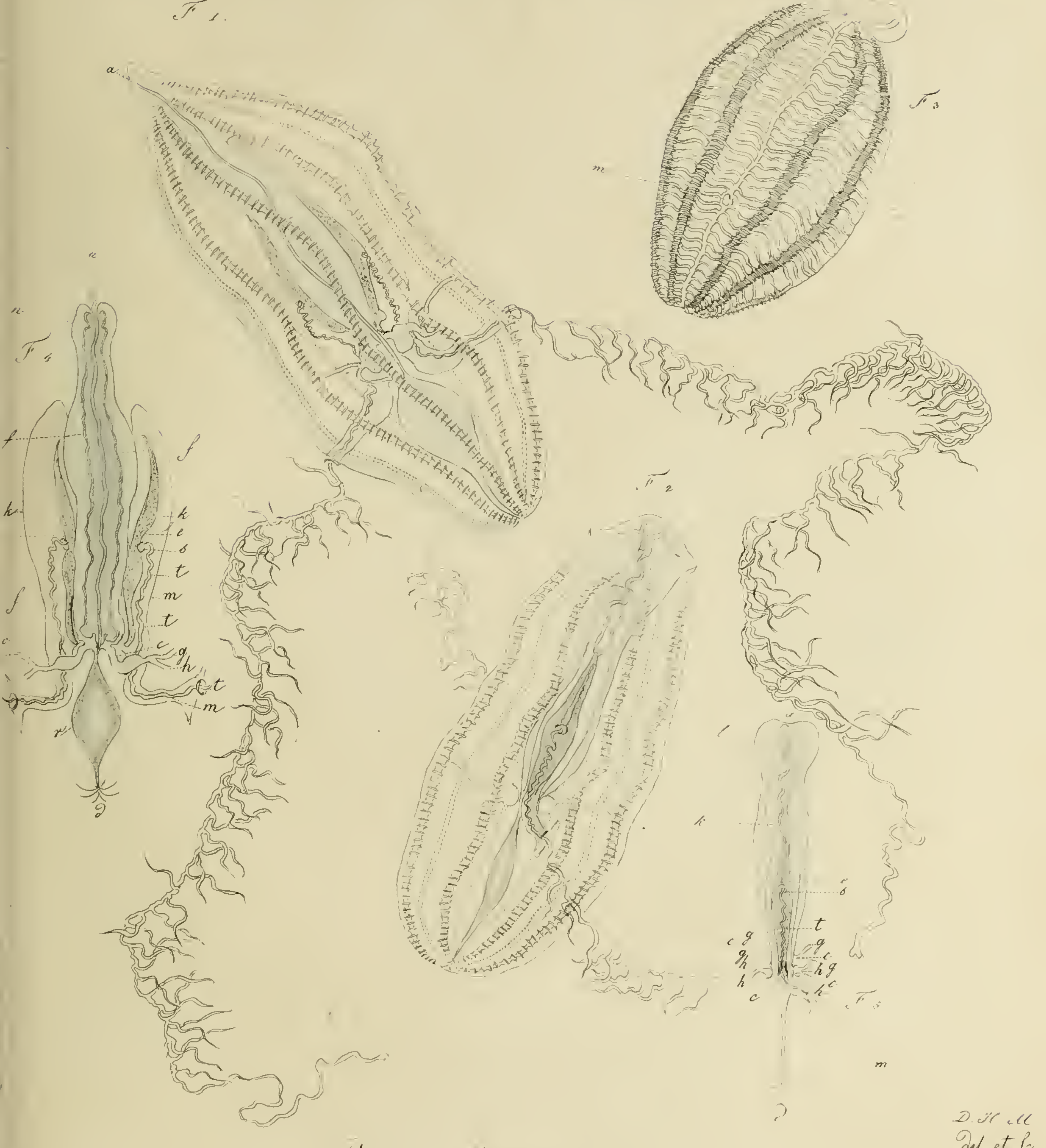
F. 4.




*Bolina septentrionalis. n.*

D. H. M.
del. et sc.

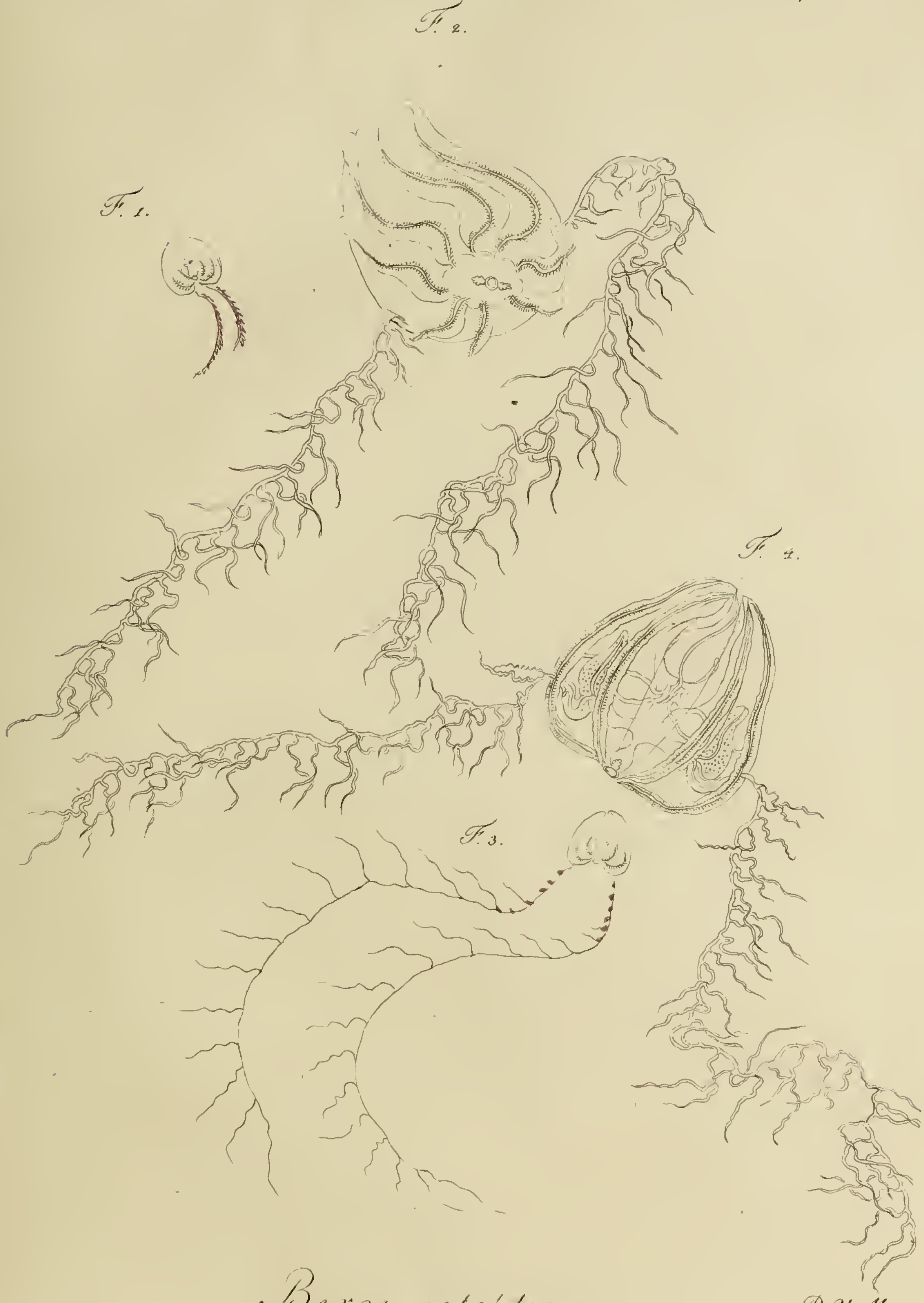
[illegible]
[illegible]
[illegible]




Beroe Cucumis n.

Beroe compressa n.

D. H. M.
del. et sc.




Beroe octoptera n.

D. H. M.
del. et sc.

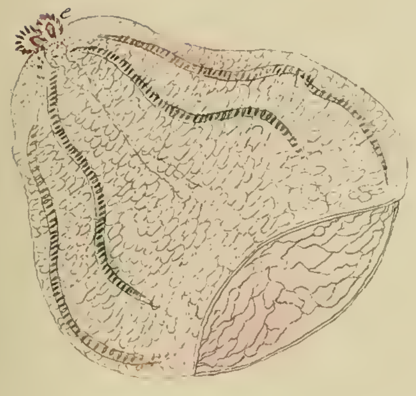
[illegible]

*Beroe glandiformis. n*

D. H. M.
del. et sc.

THE LIBRARY
OF THE
UNIVERSITY OF ILLINOIS

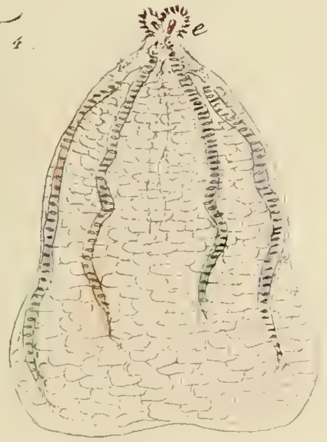
F. 1.




F. 2.

F. 3.

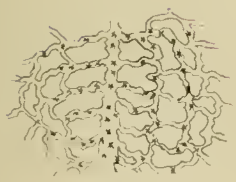
F. 4.



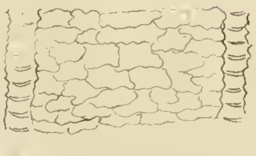

F. 6.

F. 5.

F. 7.



F. 8.

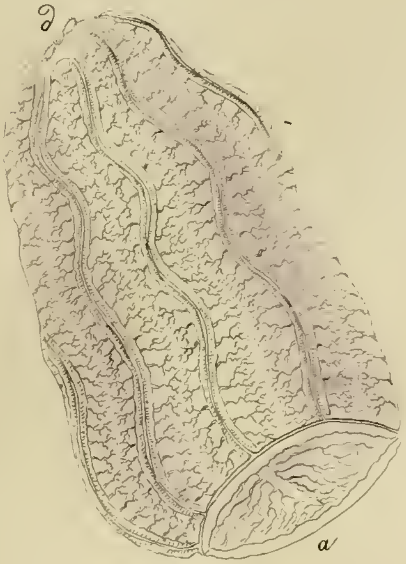


Idya penicillata n.

D. H. M.
del. et sc.

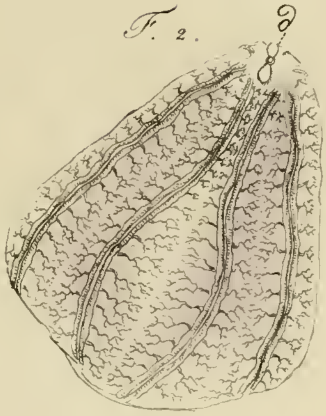
THE LIBRARY
OF THE
UNIVERSITY OF ILLINOIS

F. 1.

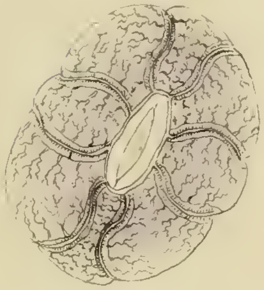



F. 3.

F. 2.



F. 4.

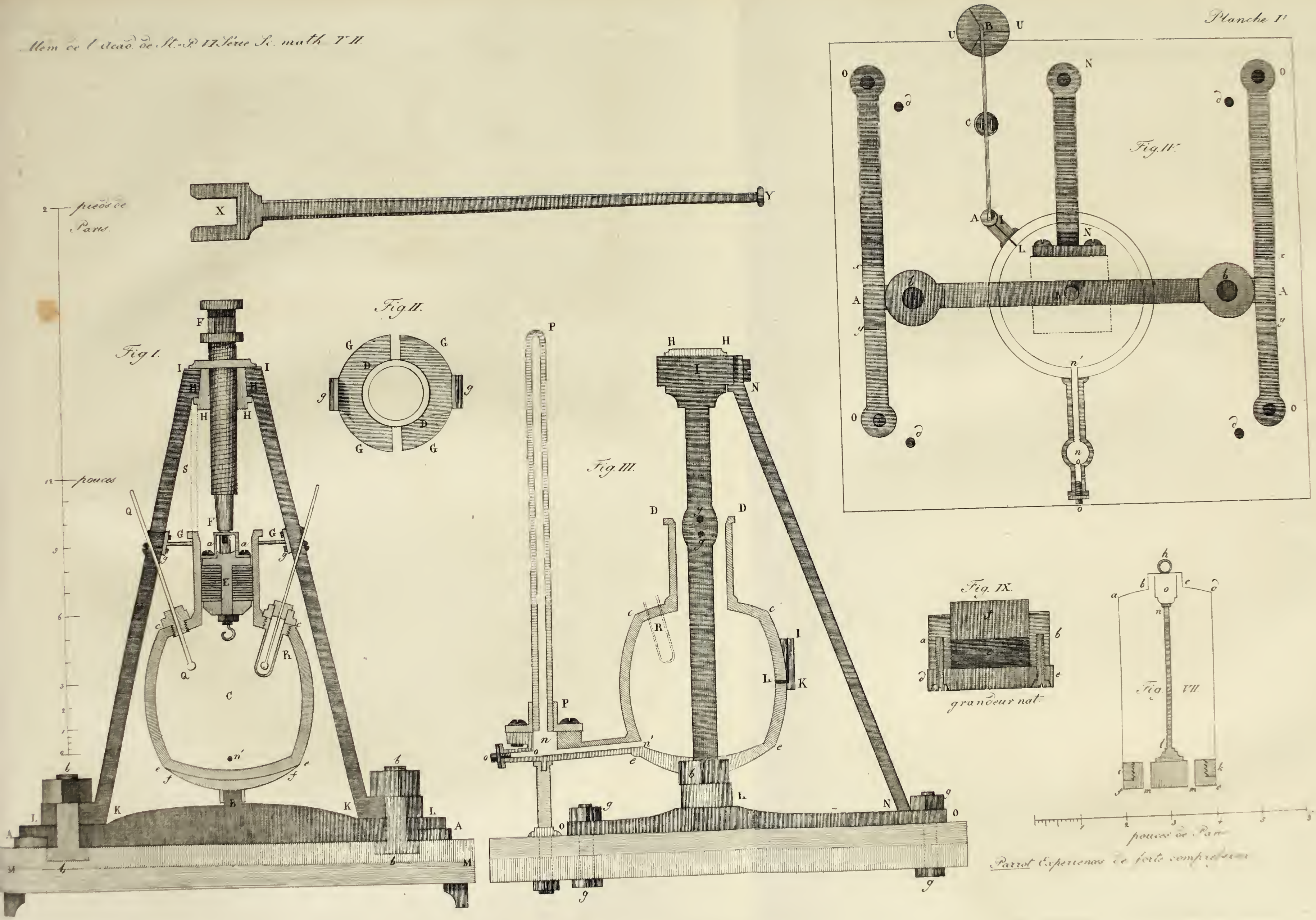


*Idya Mertensii Br.*

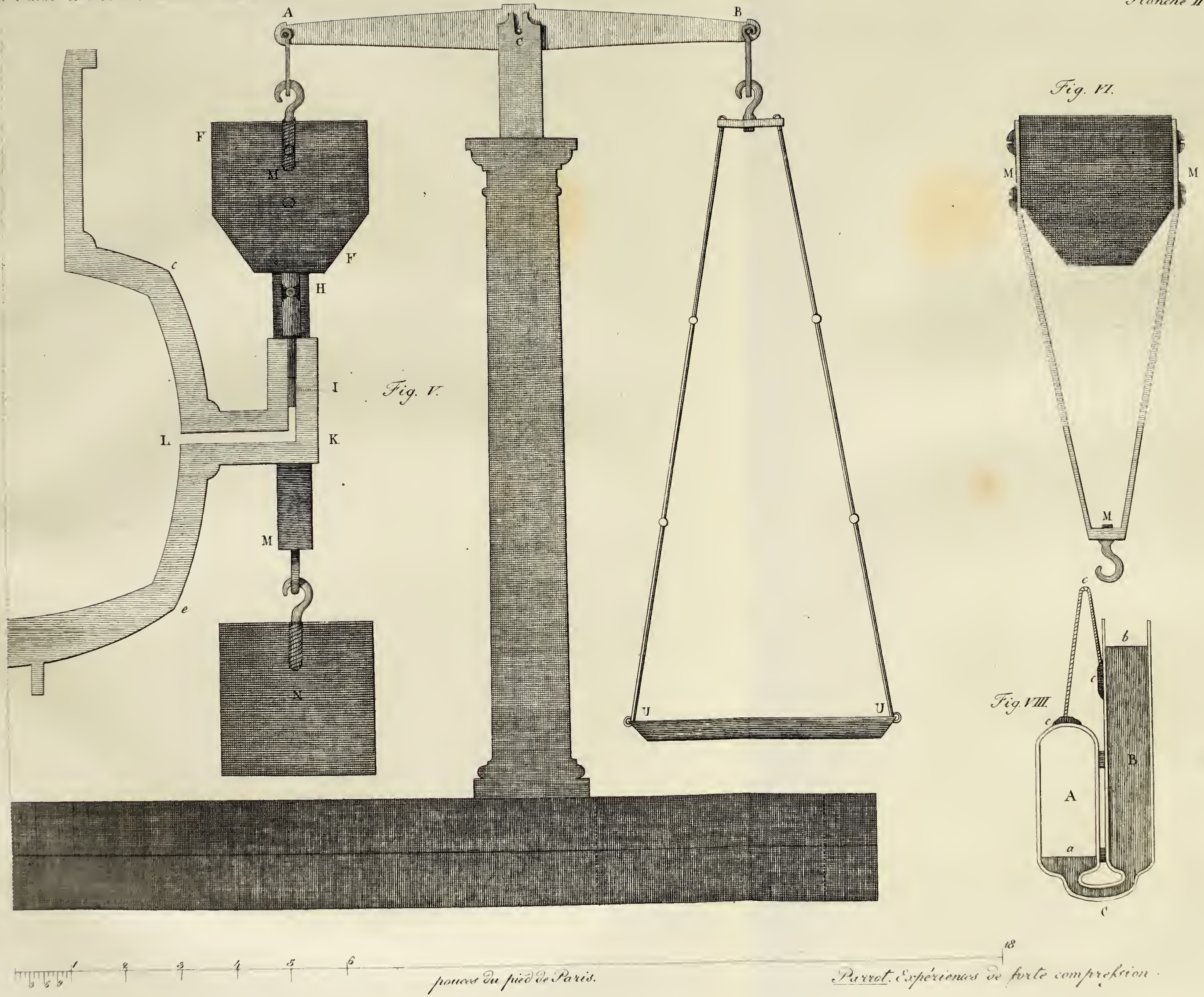
D. H. M
del. et sc.

THE LIBRARY
OF THE
UNIVERSITY OF ILLINOIS

Mém. d




Parrot Expériences de forte compression




pouces du pied de Paris.

Parrot. Expériences de forte compression.

# BULLETIN SCIENTIFIQUE.

## No. 1.

*Résumé des observations météorologiques faites à St.-Pétersbourg en* 1830, *à l'Observatoire de l'Académie des sciences, par MM.* Wisniewsky *et* Tarkhanoff, *et calculées par M. A.-T.* Kupffer.

(Lu le 24 Août 1831.)

Le thermomètre est divisé d'après Réaumur, le baromètre en pouces français. Les hauteurs barométriques ont été réduites à une température de + 14° R. Les mois sont comptés d'après le nouveau style.

I. Moyennes des observations thermométriques pour tous les mois de l'année 1830.

| Mois. | 7 heures du matin. | 2 heures après midi. | 9 heures du soir. | moyennes. |
|---|---|---|---|---|
| Janvier | — 9,46 | — 8,03 | — 8,44 | — 8,64 |
| Février | — 8,54 | — 6,55 | — 7,24 | — 7,45 |
| Mars | — 4,59 | — 1,13 | — 3,25 | — 2,99 |
| Avril | + 0,83 | + 4,30 | + 1,18 | + 2,10 |
| Mai | + 4,46 | + 7,76 | + 3,86 | + 5,36 |
| Juin | + 11,59 | + 14,67 | + 10,89 | + 12,38 |
| Juillet | + 13,11 | + 15,73 | + 12,66 | + 13,83 |
| Août | + 13,16 | + 16,65 | + 12,65 | + 14,15 |
| Septembre | + 6,08 | + 10,77 | + 7,33 | + 8,06 |
| Octobre | + 3,17 | + 5,68 | + 3,86 | + 4,24 |
| Novembre | — 0,36 | + 0,72 | + 0,28 | + 0,21 |
| Décembre | — 4,76 | — 3,64 | — 4,11 | — 4,17 |
| moyennes pour l'année entière. | + 2,6 | + 4,74 | + 2,47 | + 3,09 |

D'après les tableaux que M. Brewster a communiqués,*) il faut retrancher 0,11 de la moyenne trouvée ci-dessus, pour avoir la température moyenne de l'année. Nous aurons donc pour la température moyenne de l'année 1830 + 2,98 R.

Je n'ai pas besoin de rappeler que la table de M. Brewster n'est peut-être applicable que pour l'Ecosse et de semblables climats: je l'ai employée ici parce que nous ne possédons pas encore, pour St.-Pétersbourg même, des observations thermométriques exécutées sur le modèle de celles qui ont été faites avec tant de persévérance à Leith, par les soins de M. Brewster.

II. Variations extrêmes du thermomètre pour chacun des mois de l'année 1830, aux heures où l'on a observé, et maximum de différence, pour chaque mois entre deux observations du même jour.

| Noms des mois. | Maximum des températures, observées à deux heures ap. m. | Minimum des températures observées à 7h. du matin. | Différence. | Plus grande différence entre deux observations du même jour |
|---|---|---|---|---|
| Janvier . . . . . . | — 1°,2 | — 19°,2 | 18°,0 | 6°,8 |
| Février . . . . . . | + 0,3 | 16,5 | 16,8 | 7,7 |
| Mars . . . . . . . | 4,3 | 17,9 | 22,2 | 7,2 |
| Avril . . . . . . . | 13,2 | 5,2 | 18,4 | 9,9 |
| Mai . . . . . . . . | 16,0 | 0,0 | 16,0 | ,5 |
| Juin . . . . . . . | 22,0 | + 8,1 | 13,9 | 8,8 |
| Juillet . . . . . . | 23,8 | 8,3 | 15,5 | 6,5 |
| Août . . . . . . . | 24,0 | 9,4 | 14,6 | 8,0 |
| Septembre . . . . | 14,5 | 1,1 | 13,4 | 9,5 |
| Octobre . . . . . | 12,7 | — 2,2 | 14,9 | 7,4 |
| Novembre . . . . | 6,3 | 9,5 | 15,8 | 4,0 |
| Décembre . . . . | 1,2 | 12,1 | 13,3 | 7,1 |

Ce tableau ne donne pas les plus grandes variations que la température ait éprouvées dans le courant d'un mois, ou en vingt-quatre heures: on peut admettre, que les maxima de température ont eu lieu à 2 heures après midi, mais pour les minima, on sait qu'ils ont lieu ordinairement quelques instans après le lever du soleil, de sorte qu'à 7 heures du matin la température est, pendant la plus grande partie de l'année, considérablement au-dessus du minimum.

*) Voyez: Edinburgh Journal of sciences, june 1826.

III. Moyennes des observations barométriques, faites à $7^h$ du matin, à $2^h$ après midi et à $9^h$ du soir, pour tous les mois de l'année 1830.

| Noms des mois. | Hauteur barométrique. | Noms des mois. | Hauteur barométrique. |
|---|---|---|---|
| Janvier . . . . . . | $28^p$,454 | Juillet . . . . . . . | $28^p$,044 |
| Février . . . . . . | 28,025 | Août . . . . . . . | 27,937 |
| Mars . . . . . . . | 28,077 | Septembre . . . . | 28,212 |
| Avril . . . . . . . | 28,073 | Octobre . . . . . | 27,991 |
| Mai . . . . . . . | 28,160 | Novembre . . . . | 28,315 |
| Juin . . . . . . . | 28,056 | Décembre . . . . | 28,057 |

Hauteur barométrique moyenne, pour l'année 1830, réduite à 14° R. $28^p$,116

IV. Variations extrêmes du baromètre, aux heures où l'on a observé, pour chacun des mois de l'année 1830.

| Noms des mois. | Maximum. | Minimum. | Différence. |
|---|---|---|---|
| Janvier . . . . . . . . | $29^p$,14 | $27^p$,75 | 1,39 |
| Février . . . . . . . | 28,67 | 26,93 | 1,74 |
| Mars . . . . . . . . | 28,83 | 27,33 | 1,50 |
| Avril . . . . . . . . | 28,55 | 27,48 | 1,07 |
| Mai . . . . . . . . . | 28,51 | 27,47 | 1,04 |
| Juin . . . . . . . . | 28,64 | 27,53 | 1,11 |
| Juillet . . . . . . . . | 28,46 | 27,70 | 0,76 |
| Août . . . . . . . . | 28,17 | 27,70 | 0,47 |
| Septembre . . . . . . | 28,60 | 27,78 | 0,82 |
| Octobre . . . . . . . | 28,41 | 27,17 | 1,24 |
| Novembre . . . . . . | 28,99 | 27,36 | 1,63 |
| Décembre . . . . . . | 29,05 | 27,26 | 1,79 |
| Moyennes . . . . . . | 28,67 | 27,46 | 1,21 |

V. Etat des vents dont la direction a été observée trois fois par jour, à $7^h$ du matin, à $2^h$ après midi et à $9^h$ du soir.

| Noms des Mois. | Nord | Nord-Est. | Est. | Sud-Est. | Sud. | Sud-Ouest. | Ouest. | Nord-Ouest. | Calmes |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| Janvier. . . . . . . | 1 | 14 | 0 | 8 | 13 | 41 | 12 | 0 | 4 |
| Février . . . . . . | 7 | 18 | 4 | 11 | 7 | 33 | 2 | 1 | 1 |
| Mars . . . . . . . | 0 | 7 | 4 | 6 | 29 | 38 | 8 | 0 | 1 |
| Avril . . . . . . . | 1 | 13 | 2 | 10 | 14 | 43 | 2 | 0 | 5 |
| Mai . . . . . . . . | 8 | 27 | 1 | 6 | 5 | 25 | 17 | 1 | 3 |
| Juin . . . . . . . | 4 | 18 | 9 | 5 | 9 | 27 | 11 | 0 | 7 |
| Juillet . . . . . . . | 7 | 13 | 2 | 6 | 7 | 40 | 12 | 4 | 2 |
| Août . . . . . . . | 0 | 4 | 5 | 14 | 15 | 41 | 8 | 0 | 6 |
| Septembre . . . . . | 11 | 23 | 11 | 1 | 13 | 16 | 3 | 3 | 9 |
| Octobre . . . . . . | 12 | 19 | 3 | 12 | 10 | 30 | 1 | 2 | 4 |
| Novembre . . . . . | 3 | 11 | 2 | 14 | 24 | 31 | 2 | 0 | 3 |
| Décembre . . . . . | 2 | 8 | 0 | 13 | 48 | 15 | 3 | 0 | 4 |
| Sommes . . . . . . | 56 | 175 | 43 | 106 | 194 | 380 | 81 | 11 | 49 |

VI. Hauteur moyenne du baromètre pour chaque vent.

| Noms des vents. | Hauteur moy. du baromètre | Nombre des observations. |
|---|---|---|
| Nord . . . | 28,091 | 56 |
| Nord-E. . . | 28,229 | 175 |
| Est. . . . . | 28,156 | 43 |
| Sud-E. . . | 28,071 | 106 |
| Sud . . . | 28,025 | 194 |
| Sud-O. . . | 28,085 | 380 |
| Ouest . . . . | 28,142 | 81 |
| Nord-O. . . | 28,142 | 11 |
| Calme . . . | 28,256 | 49 |

Il y a eu des vents forts et très forts les jours suivans:
Le 8 février (nouveau style). Sud-Est.
Le 12, 13, 18, 30 mars Sud, le 31 mars Sud-Ouest.
Le 5 avril Sud.
Le 8 mai Nord-Est.
Le 14 août Sud.

Le 27 décembre Sud.

Dans le cours de l'année 1830, il y a eu à St.-Pétersbourg:

90 jours de pluie.

68 jours de neige.

10 jours de tonnerre.

28 jours durant lesquels le ciel a été entièrement découvert, depuis le matin jusqu'au soir.

58 jours durant lesquels le ciel a été entièrement et uniformément couvert, depuis le matin jusqu'au soir.

218 jours durant lesquels le ciel a été nuageux pendant la plus grande partie du jour.

143 jours de brouillard (les brouillards s'élèvent ordinairement le matin, moins souvent le soir et durent fort rarement au-delà de midi.)

La dernière gelée eut lieu le 4 mai (nouv. style).

La première gelée eut lieu le 14 octobre.

Le thermomètre s'est élevé au-dessus de zéro, pour la première fois: le 27 février: pour la dernière fois: le 28 décembre.

On a observé des aurores boréales dans les soirées des jours suivans:

Le 24 février (nouv. st.)

Le 18 mars.

Le 5 mai.

Le 13, 17, 18, 19, 23 septembre.

Le 18, 22 octobre.

Le 8, 15 décembre.

---

*Note communiquée par M. Kupffer, sur la température et la hauteur barométrique moyenne d'Ilioulouk, dans l'île d'Ounalachka.*

(Lu le 7 Septembre 1831.)

M. Lütke vient de me communiquer quelques observations météorologiques qui lui ont été envoyées d'Ounalachka. Quoique ces observations n'embrassent pas un très grand espace de temps, j'ai pensé que l'intérêt qu'elles présentent, servira d'excuse au trop d'empressement que j'ai peut-être mis dans leur publication. Voici les moyennes des hauteurs barométriques, exprimées en pouces anglais et des indications d'un thermomètre de Réaumur, placé à l'ombre et vers le nord, dans un cylindre creux en fer blanc ouvert aux deux extrêmités. On a observé trois fois par jour: vers 8 heures du matin, à une heure après midi et à 9 heures du soir. Les devoirs du service n'ont pas toujours permis à l'observateur de se tenir strictement aux heures indiquées; les observations ont quelquefois été faites une demi-heure plus tôt ou plus tard; mais telle est la

lenteur avec laquelle la température varie dans ce climat, que cette irrégularité n'a pu compromettre sensiblement l'exactitude des résultats moyens.

I. Température moyenne de chaque mois, vieux style.

| Noms des mois. | Température moyenne | Noms des mois. | Température moyenne. |
|---|---|---|---|
| 1827. Octobre . . | + 1,7 | 1828. Septembre . | + 6,2 |
| Novembre . | 2,0 | Octobre . | 2,9 |
| Décembre . | 1,5 | Novembre . | — 0,1 |
| 1828. Janvier . . | 3,7 | Décembre . | 3,1 |
| Février . . | — 0,1 | 1829. Janvier . . | 1,5 |
| Mars . . | 0,1 | Février. . | 0,4 |
| Avril . . . | + 2,1 | Mars . . . | + 0,1 |
| Mai . . . | 4,1 | Avril . . | 0,8 |
| Juin . . . | 6,6 | Mai . . . | 4,1 |
| Juillet . . | 8,4 | Juin . . | 6,6 |
| Août . . . | 11,0 | | |

Moyenne des douze premiers mois . . . . . . . . . . . . . . 4°,0
Moyenne de l'année 1828 . . . . . . . . . . . . . . . . . 3,8
Moyenne des douze derniers mois . . . . . . . . . . . . . . 3,0

D'après les tableaux des observations exécutées à Leith en Ecosse, que M. Brewster a communiquées*) la moyenne d'observations faites à 8 heures du matin, à une heure après midi et à 9 heures du soir, ne surpasserait que de 0°,2 R. la véritable température moyenne du lieu.

II. Hauteur moyenne du baromètre, et étendue de ses variations pour chaque mois, vieux style.

| Noms des mois. | Hauteur barométrique moyenne, pouces anglais. | Maximum. | Minimum. | Différence. |
|---|---|---|---|---|
| 1827. Octobre . . | 29,23 | 29,85 | 29,01 | 0,84 |
| Novembre . | 29,44 | 30,08 | 28,60 | 1,48 |
| Décembre . | 29,65 | 30,26 | 28,87 | 1,39 |
| 1828. Janvier . . | 29,47 | 29,94 | 28,77 | 1,17 |
| Février . . | 29,17 | 29,84 | 28,35 | 1,49 |

*) Voyez Journal of sciences june 1826.

| Noms des mois. | Hauteur barométrique moyenne, pouces anglais. | Maximum. | Minimum. | Différence. |
|---|---|---|---|---|
| 1828. Mars . . . | 29,42 | 30,08 | 28,72 | 1,36 |
| Avril . . | 29,32 | 29,74 | 28,98 | 0,76 |
| Mai . . . | 29,50 | 30,06 | 28,94 | 1,12 |
| Juin. . . | 29,44 | 29,78 | 28,96 | 0,82 |
| Juillet . . | 29,56 | 29,82 | 29,18 | 0,64 |
| Août . . | 29,65 | 30,00 | 29,20 | 0,80 |
| Septembre . | 29,41 | 29,77 | 28,74 | 1,03 |
| Octobre. . | 29,16 | 29,82 | 28,45 | 1,37 |
| Novembre . | 29,20 | 29,85 | 28,66 | 1,19 |
| Décembre . | 29,83 | 30,38 | 28,71 | 1,67 |
| 1829. Janvier . . | 29,29 | 29,73 | 28,36 | 1,37 |
| Février . . | 29,20 | 29,69 | 28,55 | 1,14 |
| Mars . . . | 29,08 | 29,98 | 28,51 | 1,47 |
| Avril . . | 29,55 | 30,24 | 28,44 | 1,80 |
| Mai . . . | 29,43 | 30,11 | 28,80 | 1,31 |
| Juin . . . | 29,55 | 29,89 | 29,05 | 0,84 |
| Moyenne. . . . | 29,41 | 29,95 | 28,75 | 1,19 |

Le baromètre, qui a servi dans les observations précédentes fut comparé à celui de M. Lütke, il se trouva que le premier indiqua constamment une hauteur moindre de 0,32 que celui-ci. Le baromètre de M. Lütke ayant été comparé avec celui de l'observatoire de Copenhagne, ses indications peuvent être regardées comme exactes. Après avoir ajouté ces 0,32 à la moyenne percédente, on trouve pour la hauteur barométrique moyenne d'Iloulouk

29,73 pouces anglais,
ou $27^p$ $10,7^l$ de France.

La température du mercure n'a malheureusement pas été observée; on peut, sans craindre de tomber dans une trop grande erreur, regarder la hauteur barométrique, que nous venons de calculer, comme réduite à la température de 14° R. Ce résultat vient à l'appui d'une remarque faite par M. Erman fils, sur la hauteur barométrique au niveau de la mer d'Okhotsk; voyez *Poggendorfs Annalen* 1829 No. 10.

### III. Etat des vents, observés trois fois par jour.

Durant la première année, il y a eu

92 vents du Nord.

| | | |
|---|---|---|
| 49 | vents du | NNO. |
| 59 | — | Nord-Ouest. |
| 32 | — | O.N.O. |
| 85 | — | Ouest. |
| 45 | — | O.S.O. |
| 106 | — | Sud-Ouest. |
| 41 | — | S.S.O. |
| 170 | — | Sud. |
| 34 | — | S.S.E. |
| 49 | — | Sud-Est. |
| 15 | — | E.S.E. |
| 23 | — | Est. |
| 6 | — | E.N.E. |
| 42 | — | Nord-Est. |
| 21 | — | N.N.E. |

On voit que les vents dominans sont ceux du Sud et du Sud-Ouest.

---

*Note communiquée par M. Kupffer sur la température et la hauteur barométrique moyenne de Sitka, sur la côte Nord-Ouest de l'Amérique.*

(Lu le 7 Septembre 1831.)

Le tableau suivant m'a été également communiqué par M. Lütke, il donnera au moins une idée approximative du climat de Sitka.

Tableau contenant les maxima et minima de la hauteur barométrique et de de la température dans chaque mois de l'année 1828, vieux style.

| Noms des mois. | Baromètre, en pouces angl | | Thermomètre octogés. | |
|---|---|---|---|---|
| | Maximum. | Minimum. | Maximum. | Minimum. |
| Janvier . . . . | 29,80 | 29,20 | + 5 | — 7 |
| Février . . . . | 29,83 | 29,23 | 6 | 1 |
| Mars . . . . . | 30,44 | 29,06 | 8 | 2 |
| Avril . . . . | 30,27 | 29,38 | $13\frac{1}{2}$ | + 4 |
| Mai . . . . . | 30,12 | 29,57 | 12 | $5\frac{1}{2}$ |
| Juin . . . . . | 30,20 | 29,45 | 16 | 7 |
| Juillet . . . . | 30,20 | 29,75 | 18 | 9 |
| Août . . . . | 30,17 | 29,34 | 15 | 5 |
| Septembre . . . | 30,20 | 29,20 | 12 | 2 |
| Octobre . . . | 30,01 | 28,78 | 10 | — 1 |
| Novembre . . . | 30,10 | 28,66 | 6 | 2 |
| Décembre . . . | 30,57 | 28,72 | $6\frac{1}{2}$ | 10 |
| Moyennes . . . | 30,16 | 29,20 | + 10,7 | + 0,8 |

Si l'on prend, pour Iloulouk, la moyenne des maxima et minima des hauteurs barométriques de tous les mois de l'année 1828 (voyez le II^eme^ tableau de la note précédente) on trouve:

| | |
|---|---|
| Moyenne des maxima . . . . . . . . . . . . . . . . . | $29,^p92$ |
| — des minima . . . . . . . . . . . . . . . . . | 28, 80 |
| Moyenne | 29, 36 |

à quoi il faut encore ajouter $0,^p32$, c'est-à-dire l'erreur du baromètre; ce qui élève la moyenne précédente à . . . . . . . . . . . . . . . . 29,68
En effectuant le même calcul pour Sitka, on trouve . . . . . . . 29,68
c'est-à-dire exactement la même valeur. Cette concordance donne un plus grand poids à ces observations, qu'on ne serait tenté de leur attribuer.

Il est facile de se convaincre que, pour Iloulouk, la moyenne des maxima et minima de tous les mois ne s'éloigne pas beaucoup de la véritable hauteur barométrique moyenne. Quant aux observations thermométriques, on sait également, que la température moyenne de l'année ne s'éloigne pas beaucoup de la moyenne des maxima et minima de température de tous les mois. La moyenne de ces maxima et minima est pour Sitka, pour l'année 1828, comme on voit par le tableau précédent . . . . . . . . . . . . . . . . . . + 5,°8 R.

Je ne communique cependant ce résultat qu'avec une extrême défiance.

## SÉANCES DE L'ACADÉMIE.

Séance du 17 (29) *Août* 1831. M. le Dr. *Brandt*, nouvellement élu Académicien adjoint dans la section de Zoologie, et arrivé depuis peu de Berlin, assiste pour la première fois aux séances. L'Académie le nomme directeur de son musée zoologique. — M. le Président annonce à l'Académie qu'en vertu d'un arrêté du Comité des ministres, confirmé par S. M. l'Empereur, M. l'Académicien extraordinaire *Langsdorff* a obtenu sa démission par cause de maladie. — Mgr. le ministre envoie le premier volume du traité de Chimie de M. Berzélius traduit en Russe par M. Yéréméïeff, employé à la Chancellerie du gouverneur général de la Sibérie occidentale. L'auteur de cette traduction, offrant son travail au gouvernement, et ne demandant d'autre rémunération que les moyens de le continuer, Mgr. le ministre en demande l'avis de l'Académie. M. *Hess* rapporte d'avoir parcouru cette traduction, et de l'avoir trouvée mériter l'approbation de l'Académie. Le traducteur est recommandé au ministère. — M. *Collins* lit 1. le mémoire *Sur le retour des suites* annoncé dans la séance du 15 Décembre passé, et 2. une *Note sur un théorème général concernant le développement d'une fonction suivant les puissances d'une autre fonction*, théorème dont la démonstration et l'application à plusieurs cas particuliers feront l'objet d'un mémoire que l'auteur

se propose de présenter sous peu à l'Académie. — M. *Kupffer* notifie à l'Académie qu'il a été assez heureux pour acquérir encore deux nouveaux correspondans pour les observations magnétiques; ce sont M. Fallows au Cap de Bonne-Espérance et M. Thomas Stanville à Madras, et il produit quelques observations qui lui ont été communiquées par M. Farquarson à Atford, connu par ses intéressantes observations d'aurores boréales. — MM. George Fuss et Bunge adressent à l'Académie des rapports sur leurs travaux en Chine. — M. Hansteen, de Christiania, envoie une carte lithographiée représentant les lignes isodynamiques pour la force magnétique totale. Dans une lettre adressée au Secrétaire perpétuel, ce savant mande d'avoir trouvé, par des observations faites à Christiania pendant dix années, que l'intensité totale diminue en Europe. Par des considérations individuelles, il est porté à croire que cette diminution doit être encore plus considérable plus à l'est, p. ex. entre Tobolsk et Tomsk, qu'elle n'a pas lieu à Irkoutsk; mais que dans la Sibérie orientale, comme à Iakoutsk, Okhotsk et au Kamtchatka l'intensité doit au contraire augmenter. M. Hansteen désire que l'Académie fasse vérifier cette suppositon, et indique les mesures à suivre que l'expérience lui a suggérées pour donner à ces sortes d'observations le degré de précision désirable. L'Académie recommande cette affaire à l'attention de M. *Kupffer.* — Le Secrétaire présente un troisième mémoire de concours au prix de technologie. Ce mémoire écrit en allemand et muni de la devise: *Nisi utile est quod facimus, stulta est gloria*, est renvoyé à la Commission. — On renvoie à la même Commission une lettre par laquelle un Anonyme prie l'Académie de remettre encore à un an le terme du concours au prix de technologie, s'il ne se trouve pas de mémoire à couronner, vu que la crise produite par les événemens politiques et le Choléra peut avoir empêché plusieurs personnes d'achever leurs travaux au terme requis. — Le Secrétaire lit une notice sur l'aurore boréale observée dans la nuit du 22 Juillet (3 Août). — M. Coulier, de Paris, adresse à l'Académie son ouvrage: *Guide des marins pendant la navigation nocturne*, Paris 1829; et dans une lettre adressée au Secrétaire il exprime le désir de voir son ouvrage critiqué pour la partie qui regarde les côtes de l'empire russe, et rectifié partout où il y aura lieu. Renvoyé au Dépôt hydrographique de l'Etat-major de la marine de S. M. — M. Paul Schmidt de Podgorze, en Gallicie, adresse à l'Académie un mémoire manuscrit sous le titre: *Enthüllung mannigfaltiger Naturgegenstäude* en 4 volumes. Or, comme à en juger par la lettre annexée à cet envoi, des découvertes en médecine font l'objet principal de ce mémoire volumineux, l'auteur disant que l'appel publié par le Conseil de médecine de Russie, relativement au traitement du Choléra, l'a principalement engagé d'envoyer son mémoire, celui-ci est renvoyé au Conseil de médecine.

24 *Août* (5 *Sept.*). Le Dépôt topographique de l'Etat major de S. M. mande à l'Académie que M. Fedoroff, de Dorpat, fera, aux frais du ministère de l'instruc-

tion publique, un voyage astronomique pour déterminer les positions des principaux lieux de la Sibérie occidentale, en partant d'Orenbourg et de Caterinebourg à l'est jusqu'au Iénisséï. Le Dépôt désire en conséquence que M. G. Fuss, à son arrivée à Kiakhta, soit chargé de diriger tous ses soins sur la détermination d'autant de points que possible situés dans la Sibérie méridionale à l'est du Iénisséï. M. *Wisniewsky* est chargé de dresser en conséquence une instruction pour M. G. Fuss. — M. *Kupffer* lit le résumé des observations météorologiques faites à l'observatoire de l'Académie en 1830, par MM. *Wisniewsky* et *Tarkhanoff*.*) — M. *Brandt* lit un rapport sur ses derniers travaux littéraires en Allemagne, et présente deux ouvrages qu'il a publiés conjointement avec M. le Dr. Ratzeburg. — Le même Académicien lit un mémoire sous le titre: *De nova insectorum multipedum seu myriapodum familia, Glomeridiorum nomine designanda.* — M. Stroïeff, voyageur archéographe, adresse à l'Académie une lettre de Moscou sur la récolte abondante que lui ont fournie les bibliothèques de l'Académie ecclésiastique et du monastère de la Trinité, surtout relativement à l'histoire de la législation du 14$^{me}$, 15$^{me}$ et 16$^{me}$ siècles. Il se réserve d'en rendre compte plus amplement dans une lettre prochaine.

31 *Août* (12 *Sept.*). Mgr. le ministre adresse à l'Académie trois ouvrages manuscrits en langue russe, intitulés 1. *Traité d'Economie politique;* 2. *Exposition des principes de l'Economie politique*; et 3. *Traité de Diplomatie* composés tous les trois par le professeur adjoint de l'Universite impériale de Moscou M. Nicolas Vassilieff, pour l'obtention du grade de professeur ordinaire des sciences politiques. Commissaires: MM. *Storch* et *Herrmann.* — M. *Wisniewsky* lit l'instruction qu'il a dressée pour M. George Fuss, et il évalue le tems qu'il lui faudra pour la remplir, à huit mois. L'Académie consent à fournir les frais de cette nouvelle expédition. — MM. *Trinius* et *Bongard* présentent le texte rédigé par eux et appartenant à la sixième Décade de la *Centuria plantarum Caucasi rariorum*, ouvrage commencé par Marschal-Bieberstein et que l'Académie a arrêté de continuer.**) — M. *Kupffer* propose à l'Académie de munir M. Fedoroff des appareils nécessaires pour des observations magnétiques à faire dans son voyage, relativement aux trois élémens du magnétisme terrestre. L'Académie s'en remet au ministère de l'instruction publique. — Une commission composée des membres de la classe d'Histoire naturelle est nommée pour dresser une liste de candidats pour la place vacante d'académicien pour la Zoologie.

7 (19) *Septembre.* M. *Frähn* lit un mémoire intitulé: *Die Münzen der Chane vom Ulus Dschutschi's oder von der goldenen Horde, nebst denen verschiedener an-*

---

*) Voy. ci-dessus pag. I et suiv de ce Bulletin.

**) L'annonce au sujet tant de cette continuation, que de la mise en vente de la Flora Rossica de Pallas est jointe à ce Bulletin, à l'article des *Annonces bibliographiques.*

*derer muhammedanischer Dynastieen im Anhange, aus der ehemaligen Sammlung des Herrn Professors Staatsrathes und Ritters C. v. Fuchs, in kurzen Andeutungen und Nachweisungen, mit* 18 *Kupfertafeln.* L'Académie ordonne la publication de ce mémoire, non seulement en allemand, mais aussi en russe, vu les éclaircissemens importans que les savans nationaux pourront y puiser relativement au période obscur de la domination des Mongols. — M. *Trinius* annonce l'acquisition d'une collection instructive de plantes de l'Amérique septentrionale, collection dont le musée botanique vient d'être enrichi et qui contient entr' autres une suite intéressante de 75 espèces de Carex recueillies en partie sur les Roky-mountains. — MM. *Kupffer*, *Lenz* et *Hess*, rapporteur, font un rapport favorable sur deux mémoires de M. Hermann de Moscou, l'un sur les eaux minérales du Caucase, l'autre sur l'action que produit le Choléra sur le sang et les secrétions de l'organisme humain. L'Académie en ordonne la publication dans le recueil des Mémoires des savans étrangers, si l'auteur n'en a pas disposé autrement. — M. *Kupffer* lit deux notes, l'une *Sur la température et la hauteur barométrique moyenne d'Iloulouk dans l'île d'Ounalachka*,*) et l'autre *Sur la température moyenne d'Irkoutsk.* Il observe que les données contenues dans la première de ces deux notes sont d'un intérêt tout particulier, en ce qu'elles paraissent confirmer le résultat qu'ont déjà fournies les observations de M. Adolphe Erman, savoir que la hauteur du baromètre est constamment plus basse sur les côtes de la mer d'Okhotsk que sur celles de l'Océan atlantique. Le même phénomène ayant été observé sur les isthmes de Panama et de Suez, ainsi que sur les côtes de la mer Caspienne et de la mer Noire, on a voulu en conclure que les niveaux de la mer du Sud, de la mer Rouge et de la mer Noire sont plus élevés que ceux de la mer des Antilles, de la Méditerrannée et de la mer Caspienne, respectivement. M. *Kupffer* cite plusieurs circonstances qui s'opposent à cette explication du phénomène, et préfère en attribuer la cause à quelques anomalies atmosphériques. Il pense que l'incertitude qui règne encore à ce sujet ne pourra être dissipée que par un nivellement trigonométrique.

21 *Sept.* (3 *Oct.*). M. *Gräfe* lit un mémoire sous le titre: *Inscriptiones graecae inter tropaea belli turcici nuper reportatae restituuntur.* — MM. *Parrot* et *Lenz* font un rapport favorable sur une nouvelle construction du corps électrique dans les machines de ce nom, inventée et présentée à S. M. l'Empereur par M. Seifert, mécanicien à Gross-Glogau en Silésie. Ils ne croient cependant pas que la médecine ou les arts techniques puissent en retirer quelque profit, comme l'inventeur paraît le supposer, et ils en concluent que les frais considérables que demanderait la construction d'une pareille machine ne seraient point proportionnés à son utilité. — M. Paucker de Mitau adresse à l'Académie un mémoire manuscrit

*) Voyez ci-dessus pag. V de ce Bullet n.

intitulé: *Vorschlag zur Einführung eines kirchlichen Kalenders und Oster-Kanons welche mit den Satzungen des nicaeischen Conciliums besser als die bisherigen übereinstimmen, nebst einer genauen Prüfung in wie fern der Gregorianische Kalender diesen Forderungen Genüge leistet.* Commissaires: MM. *Wisniewsky*, *Collins* et *Fuss*.

28 *Sept.* (10 *Oct.*). M. *Trinius* lit un mémoire: *Graminum novorum decades duas descripsit C. B. Trinius.* — MM. *Storch* et *Herrmann* font un rapport favorable sur les trois ouvrages de M. Vassilieff (voir ci-dessus). L'Académie recommande l'auteur au ministère.

---

## ANNONCES BIBLIOGRAPHIQUES.

1. L'Académie impériale des sciences de St.-Pétersbourg, ayant fait l'acquisition de toute la succession littéraire de feu le B^on^ Marschal-Bieberstein, a entrepris de compléter l'ouvrage commencé par ce célèbre botaniste, et dont la première moitié a paru sous le titre:

*Centuria plantarum Caucasi rariorum.*

Les planches appartenantes à la seconde moitié, et qui, pour la plupart, ont encore été gravées sous la direction même du défunt, par la main habile du même artiste qui a livré celles de la première moitié, garantissent à cette continuation la même précision et la même élégance qui distinguent la partie iconographique de la première demi-centurie, mais, d'un autre côté, elles n'admettent aucun changement considérable à l'égard des analyses, qu'on prendra soin au reste de suppléer dans le texte partout où il paraîtra convenable. Cette seconde partie sera publiée par livraisons, de dix planches coloriées gr. in-folio chacune, et dont cinq, par conséquent, compléteront l'ouvrage. Le prix de chaque livraison est fixé à 25 R. pour l'intérieur et à 14 écus de Prusse pour l'étranger. Dans le cas où l'on désirerait avoir encore des exemplaires de la première partie dont l'édition est épuisée, l'Académie est prête à en publier une seconde édition à raison de 80 R. l'exemplaire pour la Russie, et de 40 écus de Prusse pour l'étranger. L'Académie prie de lui en faire parvenir les commandes par l'intermédiaire de ses commissionnaires, les libraires W. Graeff à St.-Pétersbourg et Ch. Cnobloch à Leipsic.

2. L'Académie a de même fait depuis peu l'acquisition de l'édition presque complète de l'ouvrage de Pallas

*Flora Rossica.*

Le premier volume de cet ouvrage, (le seul qui ait paru), avec cent planches coloriées grand in-folio et texte latin, se vend, en Russie, à raison de 50 R. l'exemplaire, et de 20 écus de Prusse dans les pays étrangers, et les planches No. 1 à 50, de même coloriées, avec le texte russe à 25 R. l'exemplaire. On a joint aux planches 101 à 125, gravées du vivant de l'illustre auteur, les descriptions en langue latine,

et ce fascicule, formant la continuation de la *Flora Rossica*, se vend de même, à raison de 20 R. pour la Russie et de 8 écus pour l'étranger.

Les ouvrages suivans ont paru en 1831:

3. Mémoires de l'Académie Impériale des sciences de St.-Pétersbourg VI^me^ Série. Sciences mathématiques, physiques et naturelles Tome I. (18 R. pour la Russie, 24 R. pour l'étranger).

4. Même ouvrage, Tome II. 1^re^ livraison (On s'abonne au volume entier. Prix comme ci-dessus).

5. Mémoires présentés à l'Académie Impériale des sciences de St.-Pétersbourg par divers savans, et lus dans ses assemblées; Tome I. (15 Ro. pour la Russie, 20 Ro. pour l'étranger).

6. Species graminum iconibus et descriptionibus illustravit C. B. Trinius. fasciculi 21 — 26. 4° (24 R. p. l. R. 36 R. p. l'étr.)

7. Grammatik der mongolischen Sprache, von I. J. Schmidt 4° (5 R. p. l. R. 8 R. p. l'étr.)

8. Handbuch der rechnenden Krystallonomie, von Dr. A. T. Kupffer. 4° (15 R. p. l. R. 20 R. p. l'étr.)

9. Краткое изложеніе уроковъ о дифференціальномъ и интегральномъ исчисленіи, преподаваемыхъ въ королевской политехнической школѣ Г. А. Л. Коши. Перев. съ фр. В. Буняковскій. 4° (5 R.)

10. Положеніе о наградахъ учрежденныхъ камергеромъ П. Н. Демидовымъ 8° (40 Cop)

11. Acte de fondation des prix Démidoff. 8° (40 Cop.)

# BULLETIN SCIENTIFIQUE.

## N° 2.

*Note sur la température moyenne d'Irkoutsk, communiquée par M Kupffer, le 24 août 1831.*

M. Stchoukine à Irkoutsk m'a envoyé, il y a quelque tems le résumé de ses observations météorologiques, instituées pendant dix années consécutives, avec une persévérance d'autant plus louable, que l'exemple en est plus rare dans la contrée intéressante qu'il habite.

Tableau de la marche moyenne du thermomètre octogésimal à Irkoutsk en Sibérie.

| Mois. (vieux St.) | Années. 1820. 7h. mat. | 2h. ap. m. | 9h. soir. | moyenne. | 1821. 7h. mat. | 2h. ap. m. | 9h. soir. | moyenne. |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| Janvier | — | — | — | — | -15,°64 | — 4,37 | —12,63 | —10,88 |
| Février | — | — | — | — | 11,66 | 0,53 | 11,00 | 7,73 |
| Mars | — | — | — | — | 7,12 | + 3,55 | 4,14 | 2,57 |
| Avril | — | — | — | — | + 1,88 | 11,18 | + 3,38 | + 5,48 |
| Mai | — | — | — | — | 6,72 | 13,53 | 5,56 | 8,60 |
| Juin | — | — | — | — | 11,02 | 14,21 | 8,83 | 11,35 |
| Juillet | + 9,56 | +16,90 | +11,20 | +12,55 | 12,90 | 20,71 | 11,40 | 15,00 |
| Août | 7,00 | 14,60 | 9,45 | 10,35 | 10,68 | 15,80 | 9,55 | 12,01 |
| Septbr. | 1,53 | 11,63 | 4,33 | 5,83 | 0,78 | 8,40 | 0,50 | 3,23 |
| Octobre | — 5,71 | 2,06 | — 5,45 | — 3,03 | — 3,06 | 2,16 | — 2,76 | — 1,22 |
| Novbr. | 14,08 | — 6,33 | 13,41 | 11,27 | 12,43 | — 5,47 | 12,20 | 10,03 |
| Décbr. | 20,42 | 13,58 | 18,63 | 17,54 | 18,42 | 12,42 | 17,23 | 16,02 |

| Mois. (vieux St.) | Années. 1822. 7h. mat. | 2h. ap. m. | 9h. soir. | moyenne. | 1823. 7h. mat. | 2h. ap. m. | 9h. soir. | moyenne. |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| Janver | —21,93 | —12,4[illegible] | —20,85 | —18,41 | —18,66 | —11,04 | 18,00 | —15,91 |
| Février | 11,43 | 4,18 | 9,71 | 8,44 | 14,50 | 7,10 | 14,32 | 11,97 |
| Mars | 2,06 | + 4,76 | 0,66 | + 0,68 | 7,77 | + 2,00 | 6,30 | 3,99 |
| Avril | + 1,45 | 8,93 | + 2,40 | 4,26 | + 0,77 | 8,00 | + 2,00 | + 3,59 |
| Mai | 6,97 | 15,00 | 6,84 | 9,60 | 6,16 | 13,80 | 6,42 | 8,79 |
| Juin | 11,20 | 17,33 | 11,50 | 13,34 | 12,40 | 20,60 | 11,16 | 14,72 |
| Juillet | 12,79 | 20,20 | 13,21 | 15,40 | 13,03 | 19,39 | 12,32 | 14,91 |
| Août | 8,00 | 15,16 | 9,03 | 10,73 | 8,06 | 14,71 | 8,23 | 10,33 |
| Septbr. | 2,58 | 9,96 | 3,02 | 5,19 | 1,52 | 9,01 | 2,73 | 4,42 |
| Octbr. | — 3,06 | 2,16 | — 2,76 | — 1,22 | — 4,70 | 1,06 | — 4,58 | — 2,74 |
| Novbr. | 14,13 | — 7,73 | 13,43 | 11,76 | 10,40 | — 4,83 | 9,70 | 8,31 |
| Décbr. | 19,03 | 14,26 | 18,19 | 17,16 | 20,18 | 15,32 | 20,58 | 18,69 |

| Mois. (vieux St.) | Années. 1824. 7h. mat. | 2h. ap. m. | 9h. soir. | moyenne. | 1825. 7h. mat. | 2h. ap. m. | 9h. soir. | moyenne. |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| Janvier | —16,58 | —10,00 | —15,24 | —13,94 | —18,03 | —10,03 | —15,80 | —14,62 |
| Février | 13,20 | 4,27 | 12,40 | 9,96 | 16,00 | 7,67 | 13,71 | 12,46 |
| Mars | 6,75 | + 1,60 | 4,47 | 3,21 | 8,04 | + 1,48 | 5,19 | 3,92 |
| Avril | + 3,70 | 10,86 | + 4,56 | + 6,37 | + 0,76 | 12,10 | + 2,06 | + 4,97 |
| Mai | 8,09 | 13,73 | 8,51 | 10,11 | 8,90 | 16,42 | 8,29 | 11,20 |
| Juin | 11,70 | 16,63 | 12,57 | 13,63 | 12,80 | 20,53 | 12,36 | 5,23 |
| Juillet | 13,50 | 17,90 | 13,77 | 15,06 | 10,87 | 13,22 | 11,00 | 11,70 |
| Août | 9,45 | 13,77 | 10,11 | 11,11 | 9,16 | 14,16 | 9,95 | 11,09 |
| Septbr. | 3,13 | 8,00 | 3,46 | 4,86 | 2,30 | 9,16 | 2,96 | 4,81 |
| Octbr. | — 2,22 | 1,07 | — 1,51 | — 0,89 | — 2,85 | 1,93 | — 2,74 | — 1,22 |
| Novbr. | 10,78 | — 6,10 | 10,06 | 8,98 | 10,53 | — 3,56 | 8,16 | 7,35 |
| Décbr. | 13,16 | 8,61 | 11,68 | 11,15 | 21,58 | 13,93 | 20,09 | 18,53 |

| Mois. (vieux St.) | Années. 1826. 7h. mat. | 2h. ap. m. | 9h. soir. | moyenne. | 1827. 7h. mat. | 2h. ap. m. | 9h. soir. | Moyenne. |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| Janvier | —19,64 | —10.39 | —17,74 | —15,92 | —18,16 | —11,32 | —16,59 | —15,36 |
| Février | 18,17 | 7,60 | 15,32 | 13,70 | 13,14 | 4,52 | 9,42 | 9,03 |
| Mars | 8,53 | + 1,83 | 4,77 | 3,82 | 5,04 | + 5,00 | + 2,93 | 0,99 |
| Avril | + 3,43 | 12,60 | + 3,30 | + 6,44 | + 0,70 | 8,40 | 1,36 | + 3,49 |
| Mai | 6,48 | 15,24 | 6,95 | 9,62 | 8,52 | 17,17 | 8,26 | 11,32 |
| Juin | 14,33 | 20,23 | 13,60 | 16,05 | 13,93 | 20,60 | 13,00 | 15,84 |
| Jnillet | 12,23 | 18,39 | 12,26 | 14,30 | 13,00 | 20,43 | 12,87 | 15,43 |
| Août | 9,00 | 14,20 | 9,50 | 10,90 | 8,42 | 14,68 | 8,87 | 10,66 |
| Septbr. | 1,76 | 10,26 | 3,63 | 5,22 | 2,41 | 11,90 | 3,15 | 5,82 |
| Octbr. | — 2,25 | 3,58 | — 2,15 | + 0,27 | — 3,25 | 3,84 | + 2,80 | — 0,74 |
| Novbr. | 12,00 | — 6,23 | 10,93 | 9,72 | 10,90 | — 6,16 | 10,00 | 9,02 |
| Décbr. | 16,93 | 9,93 | 15,16 | 4,01 | 19,32 | 12,16 | 17,87 | 16,45 |

| Mois. (vieux St.) | Années. 1828. 7h. mat. | 2h. ap. m. | 9h. soir. | Moyenne. | 1829. 7h. mat. | 2h. ap. m. | 9h. soir. | Moyenne. |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| Janvier | —23,77 | —13,55 | —22,03 | —19,78 | —19,88 | —11,77 | —19,22 | —16,96 |
| Février | 17,08 | 3,24 | 14,15 | 11,49 | 18,12 | 4,22 | 14,16 | 12,17 |
| Mars | 7,64 | + 5,38 | 5,45 | 2,57 | 7,68 | + 3,88 | 5,73 | 3,18 |
| Avril | 0,25 | 10,03 | + 0,35 | + 3,38 | 1,11 | 8,22 | + 0,07 | + 2,39 |
| Mai | + 5,27 | 13,06 | 5,64 | 7,99 | + 5,31 | 14,76 | 6,40 | 8,82 |
| Juin | 11,16 | 19,63 | 11,30 | 14,03 | 10,47 | 17,03 | 11,38 | 12,96 |
| Juillet | 12,72 | 22,22 | 13,59 | 16,18 | 11,93 | 21,25 | 13,47 | 15,55 |
| Août | 9,00 | 14 20 | 9,50 | 10,90 | 6,89 | 14,27 | 8,82 | 9,99 |
| Septbr. | 1,76 | 10,26 | 3,63 | 5,22 | 1,16 | 9,78 | 3,36 | 4,77 |
| Octbr. | — 2,25 | 3,58 | — 2,15 | — 0,27 | — 2,73 | 3,84 | — 1,88 | — 0,26 |
| Novbr. | 12,00 | — 6,23 | 10,93 | 9,72 | 10,71 | — 4,87 | 10,10 | 8,56 |
| Décbr. | 16,93 | 9,93 | 15,16 | 14,01 | 16,25 | 9,03 | 18,22 | 14,50 |

| 1830. Mois. | 7h. du matin. | 2h. ap. midi. | 9h. du soir. | Moyenne. |
|---|---|---|---|---|
| Janvier . . . . . . . | — 16,40 | — 8,07 | — 14,60 | — 13,02 |
| Février . . . . . . . | 11,84 | 0,74 | 8,77 | 7,12 |
| Mars . . . . . . . . | 10,00 | + 3,00 | 5,65 | 4,22 |
| Avril . . . . . . . . | + 0,09 | 10,14 | + 1,40 | + 3,88 |
| Mai. . . . . . . . . | 5,83 | 15,46 | 7,47 | 9,59 |
| Juin . . . . . . . . . | 10,78 | 21,13 | 13,00 | 14,97 |

Moyennes de toutes les dix années consécutives:

| Mois. | 7h. du matin. | 2h. ap. midi. | 9h. du soir. | Moyenne. |
|---|---|---|---|---|
| Janvier . . . . . . . | — 18,87 | — 10,30 | — 17,27 | — 15,48 |
| Février . . . . . . . | 14,51 | 4,41 | 12,30 | 10,41 |
| Mars . . . . . . . . | 7,06 | + 3,26 | 4,53 | 2,78 |
| Avril . . . . . . . . | + 1,14 | 10,05 | + 2,09 | + 4,43 |
| Mai . . . . . . . . . | 6,83 | 14,84 | 7,03 | 9,57 |
| Juin . . . . . . . . | 11,98 | 18,79 | 11,87 | 14,21 |
| Juillet . . . . . . . | 12,25 | 19,06 | 12,51 | 14,61 |
| Août . . . . . . . . | 8,63 | 15,16 | 9,47 | 11,09 |
| Septembre . . . . . | 1,81 | 9,99 | 2,98 | 4,93 |
| Octobre . . . . . . . | — 3,79 | 2,51 | — 3,11 | — 1,46 |
| Novembre . . . . . | 11,50 | — 5,38 | 10,55 | 9,14 |
| Décembre . . . . . . | 18,30 | 12,00 | 17,06 | 15,79 |
| Moyennes . . . . . | — 2,61 | + 5,13 | — 1,57 | + 0,31 |

*Note sur la température moyenne de Nicolaïeff (près de la mer Noire, latitude 46°58½′, longitude orientale 32°0′ de Greenwich, élévation au-dessus de la mer Noire 20 toises environ), et de Sévastopol, (sur le bord occidental de la presqu'île de Crimée, latitude 44°35½′, longitude orientale de Greenwich 33°32′) élévation 25 toises environ. Communiqué par M. Kupffer le 19 Octobre 1831.*

M. Coumani, à Nicolaïeff, nous a communiqué à plusieurs reprises des observations météorologiques, instituées par lui et par ses soins, à Nicolaïeff et à Sévastopol, avec une persévérance bien digne d'être imitée, et rédigées avec beaucoup d'ordre; au registre de chaque mois est annexé un résumé graphique très élégant.

Voici les moyennes de ces observations. Il est à remarquer, que les mois sont comptés d'après le calendrier Julien, qui subsiste encore dans toute la Russie.

I. Tableau de la marche moyenne du thermomètre octogésimal à Nicolaïeff.

| Mois. | 1827. | | 1828. | | 1829. | | 1830. | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | I. | II. | I. | II. | I. | II. | I. | II. |
| Janvier | + 0,3 | — 0,5 | — 7,8 | — 7,7 | — 7,6 | — 6,0 | — 7,8 | — 7,5 |
| Février | — 0,5 | 0,8 | 1,1 | 1,4 | 1,2 | 0,5 | 2,7 | 2,5 |
| Mars | + 5,3 | 5,6 | + 5,2 | + 5,3 | + 4,9 | + 4,8 | + 2,8 | + 3,0 |
| Avril | 9,9 | 10,6 | 15,1 | 11,0 | 10,9 | 11,0 | 9,9 | 9,6 |
| Mai | 16,6 | 16,9 | 14,5 | 14,5 | 13,2 | 13,2 | 15,6 | 19,7 |
| Juin | 19,3 | 19,7 | 19,3 | 19,1 | 16,[illegible] | 16,9 | 16,8 | 16,8 |
| Juillet. | 19,9 | 20,5 | 18,7 | 18,9 | 18,2 | 18,4 | 18,3 | 18,0 |
| Août | 15,7 | 17,0 | 16,7 | 16,8 | 16,2 | 16,6 | 17,3 | 17,3 |
| Septembre | 11,4 | 11,6 | 10,9 | 10,9 | 13,6 | 13,7 | 10,9 | 10,9 |
| Octobre | 6,3 | 6,4 | 3,4 | 3,4 | 3,9 | 4,1 | 4,8 | 5,1 |
| Novembre | 1,1 | 1,0 | 0,4 | 0,5 | — 4,1 | — 4,2 | 3,3 | 3,3 |
| Décembre | — 2,6 | — 2,6 | — 6,4 | — 4,5 | 4,1 | 3,8 | 1,6 | 1,7 |
| Moyennes | + 8,5 | + 9,0 | + 7,4 | + 7,2 | + 6,6 | + 7,0 | + 7,6 | + 7,6 |

II. Tableau de la marche moyenne du thermomètre octogésimal à Sévastopol.

| Mois. | 1827. | | 1828. | | 1829. | | 1830. | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | I. | II. | I. | II. | I. | II. | I. | II. |
| Janvier | — 2,9 | + 2,7 | — 3,5 | — 3,3 | — 0,9 | — 0,7 | — 0,8 | — 0,7 |
| Février | 3,8 | 3,8 | + 3,0 | + 3,0 | + 2,7 | + 3,0 | + 0,3 | + 0,2 |
| Mars | 5,8 | 5,8 | 7,0 | 7,3 | 7,3 | 6,8 | 3,9 | 3,9 |
| Avril | 9,7 | 9,7 | 9,8 | 9,9 | 11,3 | 10,9 | 8,8 | 8,7 |
| Mai | 15,3 | 14,8 | 14,2 | 14,1 | 13,3 | 12,9 | 15,5 | 15,6 |
| Juin | 19,4 | 19,1 | 19,2 | 18,8 | 16,0 | 15,9 | 17,7 | 17,4 |
| Juillet | 19,3 | 18,3 | 19,1 | 18,5 | 18,8 | 18,8 | 18,7 | 18,3 |
| Août | 17,4 | 16,9 | 15,8 | 17,2 | 17,2 | 17,2 | 18,4 | 18,0 |
| Septembre | 12,7 | 12,8 | 11,9 | 11,9 | 14,6 | 14,7 | 13,0 | 13,3 |
| Octobre | 10,2 | 10,3 | 5,9 | 5,9 | 6,9 | 7,0 | 6,2 | 6,3 |
| Novembre | 6,3 | 5,1 | 3,8 | 3,0 | 0,7 | 0,8 | 5,8 | 6,0 |
| Décembre | 1,3 | 1,2 | 1,5 | 1,8 | 1,0 | 0,9 | 5,4 | 5,3 |
| Moyennes | +10,2 | +10,0 | + 8,9 | + 9,0 | + 9,1 | + 9,0 | + 9,4 | + 9,4 |

Les colonnes I contiennent les moyennes d'observations instituées deux fois par jour, à 10 heures du matin et à 10 heures du soir, et les colonnes II les moyennes des maxima et minima de chaque jour.

III. Tableau. Température moyenne d'une source à Sévastopol, pour tous les mois.

| Mois. | 1827. | 1828. | 1829. |
|---|---|---|---|
| Janvier | + 8,2 | + 7,6 | + 8,5 R |
| Février | 7,9 | 8,2 | 9,0 |
| Mars | 8,2 | 9,1 | 9,6 |
| Avril | 9,1 | 10,7 | 10,9 |
| Mai | 10,2 | 11,8 | 12,4 |
| Juin | 10,4 | 11,7 | 13,2 |
| Juillet | 11,2 | 11,6 | 12,8 |
| Août | 11,5 | 11,9 | 12,4 |
| Septembre | 11,4 | 11,3 | 12,4 |
| Octobre | 11,0 | 10,2 | 10,6 |
| Novembre | 10,1 | 9,8 | 8,1 |
| Décembre | 9,0 | 8,2 | 7,8 |
| Moyennes | 9,9 | 10,2 | 10,6 |

IV. Tableau. Température moyenne d'un puits à Nicolaïeff, pour tous les mois.

| Nicolaïeff. Mois. | 1827 | 1829 |
|---|---|---|
| Janvier | 6,2 | 2,5 |
| Février | 6,1 | 2,1 |
| Mars | 6,8 | 4,9 |
| Avril | 7,8 | 7,2 |
| Mai | 8,6 | 7,7 |
| Juin | 9,0 | 8,6 |
| Juillet | 9,0 | 8,8 |
| Août | 8,7 | 8,8 |
| Septembre | 8,3 | 8,8 |
| Octobre | 7,5 | 7,3 |
| Novembre | 5,9 | 4,5 |
| Décembre | 4,6 | 3,1 |
| Moyennes | +7,4 | 6,2 |

En 1828 les observations sur la température de ce puits furent interrompues; elles ne furent reprises qu'en 1829, et dans un autre puits. Une source donna, en 1830, les résultats suivans:

| | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| Janvier . . . | 9°,6 | Avril . . . . | 9°,4 | Juillet . . . | 9°,4 | Octobre . . | 9°,5 |
| Février . . . | 9,5 | Mai. . . . . | 9,5 | Août . . . . | 5,4 | Novembre . | 9,6 |
| Mars . . . . | 9,3 | Juin . . . . | 9,5 | Septembre . | 9,4 | Décembre . | 9,6 |

V. Tableau des variations extrêmes du thermomètre octogésimal, à Nicolaïeff dans chacun des mois des années 1827 — 1830.

| Mois. | 1827. | | | 1828. | | | 1828. Direction des vents, qui ont soufflé, durant le | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | Maxim. | Minim. | Differ. | Maxim. | Minim. | Differ. | Maxim. | Minim. |
| Janvier | + 7,°6 | —10,5 | 18,1 | + 4,2 | —24,5 | 28,7 | S.O. | N.E. |
| Février | 11,0 | 11,0 | 22,0 | 8,5 | 15,0 | 23,5 | S.S.E. | N.N.O. |
| Mars | 12,7 | 3,5 | 16,2 | 15,9 | 4,6 | 20,5 | S.O. | O. |
| Avril | 21,6 | + 1,7 | 19,9 | 20,9 | + 2,0 | 18,9 | S.S.E. | N.O. |
| Mai | 27,0 | 7,0 | 20,0 | 24,0 | 4,5 | 19,5 | N.E. | N.O. |
| Juin | 30,0 | 12,5 | 17,5 | 27,2 | 8,0 | 19,2 | S.O. | N.E. |
| Juillet | 29,5 | 11,0 | 18,5 | 27,3 | 10,0 | 17,3 | S.E, | O.S.O. |
| Août | 29,0 | 5,7 | 24,3 | 28,1 | 5,0 | 23,1 | O.N.O. | N.N.E. |
| Septembre | 20,5 | 2,8 | 17,7 | 21,6 | 2,5 | 19,1 | S.E. | N.O. |
| Octobre | 18,3 | — 2,0 | 20,3 | 14,1 | — 2,0 | 16,1 | O.N.O. | N. |
| Novembre | 10,4 | 10,5 | 20,9 | 8,0 | 12,6 | 20,6 | S.S.E. | N. |
| Décembre | 4,0 | 14,0 | 18,0 | 5,0 | 13,9 | 18,9 | S.O. | N. |

| Mois. | 1829. | | | 1830. | | | 1828. Direction des vents, qui ont soufflé, durant le | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | Maxim. | Minim. | Differ. | Maxim. | Minim. | Differ. | Maxim. | Minim. |
| Janvier | + 2,0 | —20,2 | 22,2 | + 3,4 | —21,0 | 24,4 | N.E. | N.O. |
| Février | 6,5 | 11,7 | 18,2 | 5,1 | 12,0 | 17,1 | S.O. | N.O. |
| Mars | 18,0 | 3,2 | 21,2 | 12,2 | 3,0 | 15,2 | S.S.E. | N.N.O. |
| Avril | 20,4 | + 2,0 | 18,4 | 21,2 | 1,0 | 22,2 | S.E. | N. |
| Mai | 25,0 | 4,7 | 20,3 | 27,5 | + 7,0 | 20,5 | O.S. | Calme. |
| Juin | 25,5 | 9,6 | 15,9 | 25,0 | 9,5 | 15,5 | S.O. | N.O. |
| Juillet | 29,0 | 8,9 | 20,1 | 28,5 | 8,4 | 20,1 | S.S.E. | — |
| Août | 24,5 | 8,0 | 16,5 | 28,6 | 7,7 | 20,9 | N.N.E. | N.N.O. |
| Septembre | 21,0 | 6,0 | 15,0 | 20,5 | 0,5 | 20,0 | S.O. | S.O. |
| Octobre | 16,3 | — 3,3 | 19,6 | 15,2 | — 3,0 | 18,2 | S.O. | O. |
| Novembre | 8,9 | 17,5 | 26,4 | 10,0 | 2,7 | 12,7 | S.O. | N. |
| Décembre | 4,6 | 19,5 | 24,1 | 9,5 | 11,0 | 20,5 | S.S.E. | N. |

**VI.** Tableau des plus grandes variations que le thermomètre octogésimal ait éprouvées à Nicolaïeff, dans les différens jours des années 1827, 1828, 1829 et 1830.

| Mois. | Plus grandes variations. | | | |
|---|---|---|---|---|
| | 1827. ? | 1828. | 1829. | 1830. |
| Janvier . . . . | 8,0 | 13,1 | 10,2 | 9,9 |
| Février . . . . | 14,3 | 8,8 | 10,7 | 3,5 |
| Mars . . . . . | 10,1 | 10,9 | 12,3 | 11,2 |
| Avril . . . . . | 14,9 | 12,9 | 11,9 | 14,2 |
| Mai . . . . . | 11,0 | 11,5 | 13,1 | 15,0 |
| Juin . . . . . | 14,0 | 11,2 | 13,0 | 11,5 |
| Juillet . . . . | 11,8 | 15,5 | 11,4 | 13,5 |
| Août . . . . . | 9,7 | 13,1 | 12,3 | 13,5 |
| Septembre . . | 10,8 | 13,7 | 12,4 | 12,0 |
| Octobre . . . | 13,5 | 9,1 | 9,8 | 11,7 |
| Novembre . . | 7,0 | 9,2 | 7,9 | 5,2 |
| Décembre . . . | 7,7 | 8,7 | 7,9 | 7,3 |

**VII.** Tableau des variations extrêmes du thermomètre octogésimal à Sévastopol, dans le courant de chaque mois.

| Mois. | 1828. | | | 1829. | | | 1830. | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | Maxim. | Minim. | Différ. | Maxim. | Minim. | Différ. | Maxim | Minim. | Différ. |
| Janvier | — | — | — | + 8,0 | —14,7 | 22,7 | + 9,3 | —13,4 | 22,7 |
| Février | +16,3 | 6,0 | 22,3 | 11,9 | 7,6 | 19,5 | 7,7 | 7,6 | 15,3 |
| Mars | 21,4 | 2,6 | 24,0 | 21,3 | 2,4 | 23,7 | 11,4 | 3,5 | 14,9 |
| Avril | 18,0 | + 2,0 | 16,0 | 18,5 | + 4,7 | 13,8 | 20,6 | + 2,0 | 18,6 |
| Mai | 23,3 | 5,0 | 18,3 | 26,0 | 3,8 | 22,2 | 23,7 | 8,4 | 15,3 |
| Juin | 27,0 | 11,3 | 16,3 | 25,3 | 8,0 | 17,3 | 26,8 | 11,6 | 15,2 |
| Juillet | 25,8 | 11,3 | 14,5 | 27,2 | 11,2 | 16,0 | 27,7 | 10,0 | 17,7 |
| Août | 29,9 | 7,3 | 22,6 | 25,6 | 10,4 | 15,2 | 26,8 | 11,0 | 15,8 |
| Septembr. | 21,0 | 4,8 | 16,2 | 23,4 | 9,4 | 14,0 | 21,6 | 6,6 | 15,0 |
| Octobre | 14,1 | — 0,7 | 14,8 | 18,6 | — 1,9 | 20,5 | 15,4 | — 1,1 | 16,5 |
| Novembre | 11,2 | 9,6 | 20,8 | 12,7 | 8,9 | 21,6 | 13,3 | 0,0 | 13,3 |
| Décembre | 7,0 | 8,0 | 15,0 | 11,8 | 9,7 | 21,5 | 13,8 | 7,0 | 20,8 |

| Mois. | Plus grandes variations. 1828. | 1829. | 1830. |
|---|---|---|---|
| Janvier | — | 13,0 | 10,1 |
| Février | 13,1 | 13,2 | 7,4 |
| Mars | 16,1 | 10,7 | 9,8 |
| Avril | 10,8 | 10,8 | 12,2 |
| Mai | 11,0 | 16,1 | 11,7 |
| Juin | 13,2 | 14,1 | 11,6 |
| Juillet | 12,6 | 11,2 | 13,7 |
| Août | 13,9 | 12,1 | 12,2 |
| Septembre | 10,9 | 11,6 | 10,2 |
| Octobre | 7,4 | 9,4 | 9,8 |
| Novembre | 8,4 | 9,3 | 9,6 |
| Décembre | 8,0 | 10,0 | 11,6 |

Tableau des moyennes des maxima et minima de chaque jour, pour tous les mois de l'année, et des différences de ces moyennes.
A. Nicolaïeff.

| Mois. | 1828. Moy. des Maxim. | 1828. Moy. des Minim. | 1828. Différ. | 1829. Moy. des Maxim. | 1829. Moy. des Minim. | 1829. Différ. | 1830. Moy. des Maxim. | 1830. Moy. des Minim. | 1830. Différ. |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| Janvier | — | — | — | — 4,9 | — 7,0 | 2,1 | — 4,9 | —10,1 | 5,2 |
| Février | + 0,9 | — 1,4 | 2,3 | + 1,9 | 2,9 | 4,8 | + 0,5 | 5,4 | 5,9 |
| Mars | 8,1 | + 2,4 | 5,7 | 8,0 | + 1,5 | 6,5 | 5,6 | + 0,5 | 5,1 |
| Avril | 15,7 | 6,3 | 9,4 | 15,4 | 6,5 | 8,9 | 13,9 | 5,2 | 8,7 |
| Mai | 19,0 | 10,1 | 8,9 | 17,3 | 9,0 | 8,3 | 20,5 | 10,8 | 9,7 |
| Juin | 23,6 | 14,6 | 9,0 | 21,1 | 12,7 | 8,4 | 21,1 | 12,5 | 8,6 |
| Juillet | 23,4 | 14,0 | 9,4 | 22,8 | 14,0 | 8,8 | 23,0 | 13,3 | 9,7 |
| Août | 21,5 | 12,1 | 9,4 | 21,3 | 11,9 | 9,4 | 21,7 | 12,7 | 9,0 |
| Septbr. | 15,1 | 6,8 | 8,3 | 18, | 9,1 | 9,1 | 15,4 | 6,7 | 8,7 |
| Octobre | 5,2 | 1,7 | 3,5 | 6,8 | 1,3 | 5,5 | 8,4 | 1,7 | 6,7 |
| Novembre | 2,4 | — 1,4 | 3,8 | — 2,0 | — 6,4 | 4,4 | 4,5 | 2,0 | 2,5 |
| Décembre | — 2,3 | 6,7 | 4,4 | 1,4 | 6,2 | 4,8 | 3,6 | — 0,2 | 3,8 |

## B. Sévastopol.

| Mois. | 1828. | | | 1829. | | | 1830. | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | Moy. des Maxim. | Moy. des Minim. | Differ. | Moy. des Maxim. | Moy. des Ninim. | Differ. | Moy. des Maxim. | Moy. des Minim. | Differ. |
| Janvier | — | — | — | + 2,0 | — 3,5 | 5,5 | + 1,8 | — 3,2 | 5,0 |
| Février | + 6,2 | 0,0 | 6,3 | 5,0 | + 0,8 | 4,2 | 2,7 | 2,3 | 5,0 |
| Mars | 10,3 | + 4,0 | 6,3 | 9,4 | 4,2 | 5,2 | 6,6 | + 1,1 | 5,4 |
| Avril | 13,9 | 5,9 | 8,0 | 14,4 | 7,4 | 7,0 | 12,0 | 5,3 | 6,2 |
| Mai | 18,3 | 9,8 | 8,5 | 16,9 | 8,6 | 8,2 | 19,4 | 11,7 | 7,7 |
| Juin | 22,9 | 14,6 | 8,3 | 20,1 | 11,6 | 8,5 | 21,0 | 13,7 | 7,3 |
| Juillet | 22,4 | 14,7 | 7,7 | 22,9 | 14,4 | 8,5 | 22,2 | 14,3 | 7,9 |
| Août | 21,2 | 13,2 | 8,0 | 21,3 | 13,0 | 8,3 | 21,8 | 14,2 | 7,6 |
| Septembr. | 15,0 | 8,7 | 6,3 | 18,6 | 10,7 | 7,9 | 16,5 | 10,2 | 6,3 |
| Octobre | 8,6 | 3,3 | 5,3 | 10,0 | 4,1 | 5,9 | 9,1 | 3,6 | 5,5 |
| Novembre | 5,8 | 0,3 | 5,5 | 3,1 | — 1,4 | 4,5 | 8,2 | 3,9 | 4,3 |
| Décembre | 3,2 | 1,1 | 4,3 | 3,2 | 1,4 | 4,6 | 9 ,0 | 0,0 | 5,2 |

## *Ueber die Existenz von sechs Arten vorweltlicher Elephanten, die im Zahnbau dem asiatischen Elephanten ähneln.* von J. F. BRANDT.

(Gelesen den 26. October 1831.)

---

Die Existenz zweier fossiler Elephanten, eines dem afrikanischen im Bau der Backenzähne ähnlichen (*Elephas priscus*), wurde neuerdings besonders durch die Beobachtungen von Nitzsch, Goldfuss und v. Bär, und eines dem asiatischen ähnlichen (*Elephas primigenius Blumenbach*) schon früher durch Blumenbach, Tilesius, Cuvier u. s. f. ausser Zweifel gesetzt.

Vor wenigen Jahren (1829) lieferte G. Fischer (*Nouveaux Mémoires de la Société Impériale des naturalistes de Moscou Tom. I. p.* 285 und *Bulletin de la Société Impériale des naturalistes de Moscou* 1[re] *année p.* 275) einen Aufsatz, worin er nach der Richtung der Backenzähne, der Lage, Zahl und Form der Platten derselben und nach Beschaffenheit ihrer Falten, die diagnostischen Merkmale von 6 Arten fossiler Elephanten aufgestellt. Die Backenzähne der Elephanten, deren Bildungsgeschichte wir durch die Untersuchungen von Pallas (*Nov. Comm. Petropol. XIII* p. 474) P. Camper (*Descript. anatom. d'un Eléphant*), Corse (*Philosophic. Transact.* 1799) Blake (*Essay on the structure and formation of the Teeth in Man and various Animals, Dublin* 1801.8) und G. Cuvier (*Recherches sur les ossemens fossiles 2de édit. T. I. p.* 31) kennen, zeigen aber, wie ich gleichfalls an einer grossen Menge, theils loser, theils noch in Kiefern festsitzender Zähne fossiler Elephanten der akademischen Sammlung beobachtet habe, nicht blos

nach dem Alter der Thiere Verschiedenheiten, sondern es kann derselbe Zahn in verschiedenen Tiefen eine verschiedene Richtung und Structur darbieten; ferner kann ein und dasselbe Thier kleinere und grössere Zähne tragen, auch können mehrere, in vielen andern Hinsichten sehr verschiedene Arten ganz ähnlich gebildete Zähne besitzen. Wenn nun aber auch die Backenzähne allein als Artkennzeichen nicht gelten können, so glaube ich doch in dem Museum der Kaiserlichen Akademie der Wissenschaften die Ueberreste von sechs Arten, die in der Bildung der Backenzähne und namentlich in der Form ihrer Schmelzfalten mit den Backenzähnen des asiatischen Elephanten die grösste, oft täuschendste Aehnlichkeit haben, mit Sicherheit nachweisen zu können. Keine derselben lässt sich aber auf eine der Fischerschen Arten reduziren.

Bei Aufstellung dieser Arten nahm ich blos auf ausgezeichnete, abweichende Bildungen im Schädelbau Rücksicht, und benutzte sieben einzelne Schädel und zwey Skelete, ferner sieben einzelne Unterkiefer und eine zahlreiche Collection von Zähnen, also ein sehr bedeutendes Material.

Da die ausführliche Darstellung aller beobachteten Differenzen in Begleitung der erforderlichen Zeichnungen den Gegenstand einer monographischen Arbeit ausmachen soll, bei deren Herausgabe ich mich des Beistandes der Kaiserlichen Akademie zu erfreuen haben werde, so mögen hier als Prodromen derselben nur die Hauptthatsachen meines Fundes Platz finden.

## 1. *Elephas brachyramphus. Mihi.*

Mit diesem Namen bezeichne ich diejenige fossile Elephantenart, die in der Vorwelt häufig und sehr verbreitet gewesen ist und von Sibirien bis an den Rhein, und selbst noch weiter sich fand.

Der Schädel derselben ist niedriger als beim Asiatischen Elephanten und der Jochfortsatz des Oberkiefers am Ende fast dreimal so breit als die sehr schmale äussere Wand des Unteraugenhöhlenkanals. Die Oeffnung des Unteraugenhölenkanals erscheint sehr bedeutend und der den beiden Gaumenbeine gemeinsame hintere Rand ihres Gaumentheils bogenförmig, aber er springt nicht so tief ein als beim asiatischen Elephanten. Die Gestalt des Unterkiefers zeichnet diese Form sehr aus, denn abgesehen von der starken Bogenkrümmung seines Körpertheils, charakterisirt ihn auch seine oben stark bogenförmig ausgeschnittene Symphyse, die etwa aus ihrer Mitte nach vorn einen etwas nach unten gewendeten, dreieckigen, am Ende sehr schwach verdickten,unterhalb fast geradrandigen, aber nur kurzen, schnabelähnlichen Fortsatz (daher der Name *brachyramphus*) ausschickt, welcher bei den jüngern Thieren äusserst schwach ist, ja fast fehlt. Dieser letztere Umstand, ebenso wie das leichte Abbrechen des Fortsatzes erklärt die falsche Angabe vieler Schriftsteller, dass das Mammuth eine *mandibula antice obtusa* besitze. Besonders charakteristisch ist auch der Mangel des Knochenstachels, der sich in

grösserer oder geringerer Entwickelung an der Oeffnung des *canalis inframaxillaris* bei *Elephas affinis*, *stenotoechus* und *homotaphrus* findet.

Das akademische Museum besitzt von dieser Art, die von den fossilen Arten hinsichtlich der Grösse zu den bedeutenderen gehört, ein ganzes Skelet von dem von Adams gefundenen Thier, einen einzelnen Schädel, fünf einzelne Unterkiefer von Thieren verschiedenen Alters, eine grosse Menge Backenzähne und mehrere einzelne Knochen der Extremitäten. Zu ihr gehören die Seitenansicht des in den *Philosoph. Transact. Vol. XL n.* 446. *Tab. I. Fig.* 2. abgebildeten und von Cuvier *Rech. Tom.* I. *pl. II. Fig.* 1. copirten Schädels: die Abbildung des Skelets von Tilesius (*Mémoires de l'Académie Impér. Tom. V. Tab. X.*) eines Unterkiefers von ebendemselben (ebd. *Taf. XI. Fig.* 2.), die beide von Cuvier (*Recherches Pl. XI. Fig.* 1. und *Pl. IX. Fig.* 10.) copirt wurden; ferner die von Cuvier *Pl. V. Fig.* 4, 5. *Pl. VIII. Fig.* 1; *Pl. IX. Fig.* 8, 10. abgebildeten Unterkiefer.

## 2. *Elephas giganteus. Mihi.*

Von dieser höchst ausgezeichneten Art, welche die grösste aller vorweltlichen Elephanten gewesen zu sein scheint, findet sich im Kaiserlichen akademischen Museum ein vollständiger, sehr voluminöser Schädel von 4′ 4″ Länge, leider ohne Unterkiefer. Es ist derselbe den Pallas (*Novi Comment. Petrop. T. XIII. p.* 472.) seiner Grösse wegen anführt. Er wurde an der Indigirka von Messerschmidt gefunden und an die Akademie gesandt. Bei dem Entwurf der Schädelaufsicht, die er Breyn mittheilte und die sich in den *Philos. Transact. Vol. XL. n.* 446. *Tab. I. Fig.* 1. und in der Copie bei Cuvier (*Recherches Tom. I. pl. IV. Fig.* 11.) findet, scheint Messerschmidt besonders ihn, doch nicht allein, benutzt haben.

Die Zwischenkiefer des genannten riesenhaften Schädels sind etwas verschmälert und sehr verlängert und übertreffen an Länge die Hälfte der Schädellänge. Der Jochbeinfortsatz des Oberkiefers, der fast ½ mal so breit als die schmale, äussere Wand des *canalis supramaxillaris* ist, die kräftigen, starken, mässig breiten Jochbeine und der, beiden Gaumenbeinen gemeinsame, hintere Rand ihres Gaumentheils, der spitzwinklich ist und weit nach vorn einspringt, ebenso wie die ansehnlichen, abgerundeten Höcker der Thränenbeine, machen diese Art sehr zu kenntlich.

## 3. *Elephas commutatus. Mihi.*

Das Beiwort *commutatus* soll andeuten, dass einige Schriftsteller diese Art mit *Elephas brachyramphus* und *giganteus* verwechselten und für identisch hielten.

Die Breite der äussern Wand des Unteraugenhölenkanals, die kaum etwas schmäler als das Jochbeinende des Oberkiefers ist, und der bogenförmige hintere

Rand des Gaumentheils der Gaumenbeine, nähern diese Art dem asiatischen Elephanten, während sie andererseits, namentlich durch die sehr verlängerten, in der Mitte des äussern Randes verschmälerten Zwischenkiefer, zwischen denen oben nur eine schmale, längliche, vorn kaum wenig verbreiterte Grube sich findet, und die mit einem starken, stumpfen Höcker versehenen Thränenbeine, sich *Elephas gigas* sehr nähert.

Das Museum der Kaiserlichen Akademie enthält davon einen Schädel ohne Zähne und leider auch ohne Unterkiefer, welcher aber mehr als hinreichend sich als Theil einer eigenen Elephantenart bewährt. Von diesem Schädel, welcher 3′ 6″ lang ist, hat Tilesius (*Mémoires de l'Académie Imper. Tom. V. Tab. XI. Fig.* 1.) eine Draufsicht gegeben, die Cuvier (*Recherches T. I. Pl. IX. Fig.* 7.) copirt hat. Eine Seitenansicht desselben wurde von Cuvier nach einer von der hiesigen Akademie ihm gesandten Zeichnung (ebd. *Pl. VIII. Fig.* 2.) geliefert. Es scheint auch der Schädel hieher zu gehören, wovon G. Fischer (*Fossilia Mosquensia Tab. I.*) eine sehr schöne collossale, aber in einzelnen Details nicht ganz deutliche Seitenansicht darstellt.

## 4. *Elephas stenotoechus: Mihi.*

Im Akademischen Museum wird hiervon ein Schädel von 2′ 9″ Länge, nebst dem Unterkiefer aufbewahrt. Dieser Schädel gehörte, wie der Mangel der Nähte zeigt, offenbar einem erwachsenen Thier. Es scheint demnach diese Art wohl kaum die Grösse des asiatischen Elephanten erreicht zu haben.

Im Vergleich mit dem Schädel des asiatischen Elephanten, erscheint der Schädel breiter, aber mit schmälern Jochbeinen versehen. Die Zwischenkiefer sind im Vergleich zu *E. commutatus* und *giganteus* nur sehr kurz, aber breiter. Ihre Alveolen sind ungemein klein, denn ihr Durchmesser beträgt kaum $\frac{1}{4}$ des Durchmessers von *E. giganteus*, was auf sehr kleine Hauer deutet. Die auf der Oberseite der Zwischenkiefer befindliche grosse Grube, zeigt zwar an ihrem hintern Theil Aehnlichkeit mit der ihr entsprechenden beim asiatischen Elephanten, wird aber nach vorn viel breiter und erstreckt sich allmälig verflachend bis zum vordern Rand der Zwischenkiefer. Ganz besonders zeichnet sich aber diese Art dadurch aus, dass der Jochfortsatz des Oberkiefers dreimal so breit ist als die ungemein schmale, äussere Wand des Unteraugenhölenkanals (von welcher Eigenthümlichkeit ich den specifischen Namen entlehnte) und dass ferner der den Gaumentheilen der Gaumenbeine gemeinsame hintere Rand spitzwinklich erscheint, obgleich weniger spitzwinklich als bei *Elephas giganteus*. Der Unterkiefer zeigt aber ebenfalls manches Bemerkenswerthe. Der Symphysenausschnitt und Fortsatz der Symphyse ähneln denen von *Elephas affinis*, allein die vom Ausschnitt der Symphyse zum Symphysenfortsatz gehenden Leisten sind stumpfer und ragen weniger hervor. Der Symphysenfortsatz erweitert sich vor seiner nicht verdickten Spitze und erscheint oberhalb gebogen und sehr tief gerinnt.

## 5. *Elephas platytaphrus. Mihi.*

Nach der Grösse des im Museum der Kaiserlichen Akademie vorhandenen, dieser Elephantenform angehörigen 2′ 6″ langen Schädels zu schliessen, an dem bereits die Nähte meist geschwunden sind, scheint diese Art, ebenso wie die Vorige, nur klein gewesen zu sein.

Der Schädel ist rundlicher und niedriger als beim asiatischen Elephanten. Die kurzen Zwischenkiefer sind kürzer als die Hälfte der Schädellänge. Die ihnen gemeinschaftliche Grube ist breiter als bei allen andern Elephanten, (daher der Name *platytaphrus*) und erscheint an ihrem vordern Ende so breit als an ihrem hintern, gleichzeitig ist sie aber auch flacher als bei den andern Elephantenarten. Die kleine Oeffnung für die Stosszähne hält kaum 2″ im Durchmesser und lässt auf Kleinheit derselben schliessen. Der Jochfortsatz des Oberkiefers erscheint etwas breiter als die Mitte der äussern Wand des Unteraugenhölenkanals. Der kleine Vorsprung der Thränenbeine endet spitz. Der hintere Rand des Gaumentheils der Gaumenbeine verläuft bogenförmig. Die Unterkiefer nähern sich durch die starke Bogenkrümmung den Kiefern von *Elephas brachyramphus*, ebenso durch den stark bogenförmigen Ausschnitt der Symphyse; allein der Fortsatz der Symphyse ist wesentlich von dem bei *Elephas brachyramphus* verschieden. Er erscheint länger, stärker und mehr gebogen und ist am Ende sehr stark verdickt. Die von dem Symphysenausschnitt zu seiner Basis verlaufenden Leisten sind niedrig, stumpf, aber ziemlich breit.

In der Form der Symphyse des Unterkiefers zeigt diese Art eine unverkennbare Aehnlichkeit mit der von Nesti an einem Unterkieferfragment, das Cuvier (*Recherches T. I. Pl. IX. Fig.* 5, 6.) copirt hat, dargestellten. Wenn aber, wie man annehmen muss, die Zeichnung jenes Fragmentes treu ist, so würde der Sympysenfortsatz des Nesti'schen Elephanten von dem bei *Elephas platytaphrus* durch ansehnlicher Breite, schwächere Krümmung und die sehr starke Rinne auf seiner Oberseite sich auszeichnen.

## 6. *Elephas affinis. Mihi.*

Diese Art, wovon die Kaiserliche Akademie ein bisher unbekannt gebliebenes, fast ganz vollständiges Skelet besitzt, welches bald dem Adams'schen zur Seite stehen wird, zeigt von allen bisher charakterisirten Elephantenarten die meiste Aehnlichkeit mit dem asiatischen Elephanten, wovon sie aber doch hinreichend verschieden ist.

Der 3′ 6″ lange Schädel ist breiter und voluminöser als beim asiatischen Elephanten. Die Zwischenkiefer sind beträchtlicher als beim asiatischen Elephanen, im Verhältniss zu denen bei *Eleph. giganteus* und *commutatus* aber nur

kurz, indem sie etwas kürzer als die Hälfte der Schädellänge sind, allein sie sind breiter als bei den beiden letztgenannten Arten. Die den Zwischenkiefern gemeinsame Grube ähnelt wegen ihrer Breite zwar mehr der des asiatischen Elephanten, aber sie verläuft, sich allmälig verflachend, bis zum vordern Rande der Zwischenkiefer. Der Jochbeinfortsatz des Oberkiefers erscheint um $\frac{1}{4}$ seiner Breite schmäler als die äussere Wand des Unteraugenhöhlenkanals. Der einen schwächern Bogen als beim Asiatischen Elephanten bildende hintere Rand des Gaumentheils der Gaumenbeine springt in seiner Mitte nach hinten etwas zurück. Die Bildung des spitz endenden, schwachen Thränenbeinhöckers mahnt an den asiatischen Elephanten. Die Knochen des Skelets stehen in ihrer Entwickelung zwischen denen des asiatischen Elephanten und des *Eleph. brachyramphus.* Die Bildung des Unterkiefers erinnert bei einer oberflächlichen Betrachtung zwar bis zur Täuschung an den asiatischen Elephanten, der genauere Vergleich zeigt aber, dass der Ausschnitt der Symphyse bei *Eleph. affinis* schmäler und mehr elliptisch erscheint, dass die von seinen Seitenrändern zum Fortsatz der Symphyse verlaufenden Leisten ganz gerade sehr ansehnlich und scharf sind und dass der Fortsatz der Symphyse dreieckig, platt und sehr lang und stark ist und an der Basis scharfe, stark vortretende Seitenränder, gegen die Spitze hin und auf der Spitze selbst aber einen stark gebogenen obern und schwach gebogenen untern Rand besitzt.

Damit die Charactere der aufgestellten Arten um so deutlicher hervortreten, mögen sich ihnen, die vergleichungsweis aufgestellten Merkmale einzelner Theile, welche die Osteologie des Schädels eines im Akademischen Museum befindlichen Skeletes von *Elephas asiaticus* darbietet, anreihen.

## *Elephas asiaticus. Blumenbach.*

Schädel in seinem hintern Theile sehr nach oben verlängert. Zwischenkiefer etwa $\frac{1}{2}$ so lang als die Länge des Schädels. Die den Zwischenkiefern auf der Oberfläche gemeinsame Grube sehr ansehnlich, nach vorn bedeutend breiter, fast keilförmig, noch einige Zoll vor dem vordern Ende der Zwischenkiefer aufhörend, in ihrer Mitte am tiefsten, und zwar sehr tief. Jochbeinende des Oberkiefers sehr breit, ein wenig breiter als die sehr breite äussere Wand des Unteraugenhöhlenkanals. Gemeinschaftlicher hinterer Rand des Gaumentheils der Gaumenbeine bogenförmig, in seiner Mitte nach vorn ein wenig vorspringend. Ausschnitt der Symphyse des Unterkiefers bogenförmig, doch schmäler als beim *Elephas brachyramphus.* Die vom Symphysenausschnitt zum Fortsatz der Symphyse gehenden Leisten gebogen, mässig vortretend. Der Fortsatz der Symphyse des Unterkiefers fast dreieckig, gerade, zusammengedrückt, am Ende abgestutzt aber nicht verdickt, der obere Rand dieses Fortsatzes zwar gerade, aber nach unten und vorn geneigt, schwach gerinnt, der untere Rand fast gerade.

# SEANCES DE L'ACADÉMIE.

SÉANCE du 5 (17) *octobre.* M. *Collins* lit un mémoire: *Sur le développement d'une fonction donnée suivant les puissances d'autres fonctions données. Première partie.* — M. Postels adresse à l'Académie un mémoire: *Bemerkungen über die Vulkane der Halbinsel Kamtschatka, gesammelt auf einer Reise um die Welt in den Jahren* 1826 — 1829 *auf der Brigg Seniavin, unter der Leitung des Russ. K. Flottekapitains und Ritters von Lütke.* Commissaires: MM. *Parrot* et *Lenz.*

12 (24) *octobre.* M. *Fuss* lit un mémoire intitulé: *Considérations générales sur les focales.* — Mgr. le Ministre envoie, pour être examiné, un ouvrage manuscrit sous le titre russe de *Description du gouvernement de Vologda.* Commissaire: M. *Herrmann.* — M. le Vice-Président annonce que Mgr. le Ministre, ayant l'intention d'inviter les maîtres des gymnases et écoles de recueillir et d'envoyer à l'Académie toutes sortes de productions naturelles propres aux provinces qu'ils habitent, Son Altesse désire les munir en même tems d'instructions à cet effet. MM. *Trinius*, *Kupffer* et *Brandt* se chargent de dresser ces instructions. — M. *Brandt* annonce que l'arrangement et l'examen soigné des ossemens fossiles que possède le musée de l'Académie lui a prouvé l'existence de *six* différentes espèces d'éléphants antidiluviens qui dans leur forme, et surtout dans la formation de leurs dents ont quelque ressemblance avec l'éléphant asiatique, et que l'on a compris jusqu'à ce jour, sans distinction, sous la dénomination générale de Mammouth. Outre le squelette trouvé par Adams, M. Brandt en a trouvé un autre presque tout complet d'une espèce différente qu'il a nommée *Elephas affinis.* M. Brandt demande la permission de faire monter ce squelette et d'en faire faire un dessin. Il se propose de traiter ce sujet plus amplement dans un mémoire séparé: en attendant il promet d'en livrer une notice succincte pour le Bulletin scientifique.*)

19 (31) *octobre.* M. Parrot lit un mémoire intitulé: *Théorie de la décomposition des forces relativement au problème de la bielle dans les machines à vapeur.* — Mgr. le Ministre fait part à l'Académie que dans le district de Bambak près des ruines de la forteresse de Lory au bord de la rivière Kamenka, on a trouvé une grande quantité d'anciennes monnaies orientales pesant 8 livr. 37 zolotniks. S. A. en transmet quelques échantillons d'un haut intérêt. L'Académie arrête d'acquérir le tout pour son compte. — M. *Kupffer* lit une *Note sur la température moyenne de Nicolaïeff et de Sévastopol* dont les résultats sont tirés des observations météorologiques communiquées régulièrement à l'Académie par M. Koumani, dirigeant le dépôt des cartes du département de la mer Noire.

---

*) Voir ci-dessus pag, X.

26 *octobre* (7 *novembre*) M. *Kupffer* lit un mémoire *Sur les variations horaires de l'inclinaison magnétique à St.-Pétersbourg.* — M. *Brandt* lit la note annoncée le 12 octobre sous le titre: *Ueber die Existenz von sechs Arten vorweltlicher Elephanten, die im Zahnbau dem asiatischen Elephanten ähneln.* — MM. George Fuss et Bunge annoncent par des lettres du 4 septembre leur retour à Troïtskosavsk (frontière de la Chine), et rendent compte sommairement de leurs observations et de leurs récoltes en objets d'histoire naturelle en promettant d'expédier bientôt des rapports circonstanciés.

9 (21) *novembre.* M. le gouverneur militaire d'Orenbourg Cte. Suchtelen envoie de la part de M. *Karéline*, ancien officier d'artillerie, le calcul des latitudes de différens lieux dans la steppe des Kirghises entre l'Oural et le Tobol et le long de la ligne d'Orenbourg. M. *Wisniewsky* est chargé d'examiner ce travail afin de savoir si les résultats fournis par l'auteur méritent de la confiance et peuvent être communiqués au dépôt topographique de l'état-major de S. M. — MM. *Trinius*, *Kupffer* et *Brandt* déposent les instructions qu'ils ont dressées pour guider les collecteurs dans les provinces (voir ci-dessus). — MM. *Kupffer* et *Ostrogradsky* annoncent qu'ils ont été nommés professeurs à l'institut des voies de communication, l'un pour la physique, l'autre pour la mécanique.

16 (28) *novembre.* M. *Tarkhanoff* présente le *Calcul de l'opposition de Jupiter observée en* 1831. — M. *Brandt* fait un rapport sur l'état du musée zoologique et dépose le catalogue systématique des mammifères.

23 *novembre* (5 *décembre*). M. *Bouniakowsky* lit une mémoire *Sur le mouvement dans la machine d'Atwood en ayant égard à l'élasticité du fil.* — Le secrétaire distribue le programme des prix de l'académie de Berlin pour 1833. — M. *Frähn* fait un rapport sur l'établissement d'une école militaire à Orenbourg fondée par M. Nepluyeff en 1824, et qui, outre son but spécial, est encore destinée à répandre des connaissances générales parmi les peuples asiatiques qui habitent le gouvernement d'Orenbourg et les provinces adjacentes. Se trouvant maintenant sous la direction éclairée de M. le gouverneur militaire Cte. Suchtelen, cet établissement promet de devenir éminemment utile pour la civilisation d'une partie intéressante de la population de la Russie, dans une contrée entièrement dépourvue de tous les moyens. Entre autres mesures d'amélioration, M. le Cte. Suchtelen a conçu l'idée de réunir à cette école un musée, et pour pouvoir en mettre le fondement il s'est adressé par des lettres circulaires à ses amis et à ceux de la civilisation, en les priant de contribuer par des dons gratuits à la formation de ce musée. M. *Frähn* engage l'Académie, comme étant particulièrement appelée à favoriser chaque entreprise tendant à la propagation des lumières dans ce vaste empire, de contribuer de son côté à mettre en oeuvre les vues libérales du fondateur du musée, et à en accélérer le succès par tous les moyens qui sont à sa portée. L'Académie invite MM. les directeurs des musées de lui présenter des catalogues des objets doubles qui se trouvent aux sections confiées à leur

direction et dont ils croient pouvoir se passer pour en faire un choix d'objets à envoyer au nouveau musée d'Orenbourg. — MM. *Parrot* et *Lenz* font un rapport favorable au sujet du mémoire de M. Postels *sur les volcans du Kamtchatka*. L'Académie en ordonne la publication. — M. le professeur Eichwald de Vilna adresse à l'Académie deux mémoires intitulés: 1. *Neue Darstellung des Kiemendeckels der Fische, nebst vergleichend anatomischen Bemerkungen über das Zungenbein der Wirbelthiere;* 2. *Sur les productions naturelles de la Volhynie et de la Podolie*, sous le rapport de leur usage dans les arts et métiers. Cet envoi est accompagné de 35 espèces de coquilles fossiles et d'une suite de roches recueillies par l'auteur dans son voyage. Commissaires pour l'examen des mémoires: MM. *Kupffer*, *Hess* et *Brandt*. — M. de Kittlitz envoie un mémoire: *Bekanntmachung einiger noch unbeschriebener Vögel von der Insel Luzon, den Carolinen und den Marianen*. — M. *Brandt* en ayant fait un rapport approbatif, la publication en est ordonnée. — Le secrétaire dépose sur le bureau 1. la liste des membres honoraires externes distribués par ordre des sections de sciences et 2. la liste des candidats aux quatre classes de membres telle qu'elle se trouvait composée après les élections du 8 décembre 1830. L'Académie arrête d'admettre des propositions de nouveaux candidats dans les séances du 30 novembre, du 7 et du 14 décembre, et fixe la séance du 21 décembre pour les élections tant par la voie du ballottement, que par celle du scrutin par billets pliés. Les propositions pour l'admission à la liste des candidats se feront par écrit avec indication des titres littéraires des candidats proposés. — L'Académie charge sa section mathématique composée de MM. *Wisniewsky*, *Collins*, *Fuss*, *Tarkhanoff*, *Bouniakovsky* et *Ostrogradsky* de proposer un sujet pour un prix de mathématiques.

30 *novembre* (12 *décembre*). M. *Lenz* lit un mémoire *Ueber die Veränderungen der Höhe welche das Niveau des Kaspischen Meeres bis zum April des Jahres* 1830 *erlitten hat*. — M. le Vice-Président annonce d'avoir reçu 51 portefeuilles contenant la correspondance littéraire de Müller et qui, sur la réclamation de l'Académie et à la suite d'un ordre de S. M. l'Empereur lui ont été transmis par la direction des archives du collège des affaires étrangères à Moscou. — M. *Herrmann* fait un rapport sur la description statistique du gouvernement de Vologda par M. Fortounatoff. Ce travail contient des données intéressantes, mais il demande à être retouché avant l'impression. — M. *Brandt* fait un rapport très favorable sur la collection des coquilles fossiles envoyée par M. Eichwald. — Le secrétaire dépose aux archives un paquet cacheté contenant les journaux des observations de son frère, M. George Fuss. — M. Eichwald annonce d'avoir découvert en Volhynie et en Podolie des dépôts très considérables de la pierre lithographique, dont il envoie un échantillon de très bonne qualité trouvé à Chonkowce, au sud de Kamenetz-Podolsk, à quelques verstes de la rive du Dniestre. Des essais faits avec cette pierre prouvent qu'elle ne le cède en rien à celles qu'on fait venir à grands frais de l'étranger.

7 (19) *décembre.* M. *Hess* présente un exemplaire du premier volume de son traité de chimie théorique sous le titre: Основанія чистой Химіи С. Петерб. 1831. 8°, et lit un rapport sur le but et le plan de cet ouvrage qui sera composé de trois volumes. — M. Bunge adresse à l'Académie, de Troïtskosavsk, une caisse avec des semences qu'il a recueillies en Chine.

14 (26) *décembre.* M. *Ostrogradsky* lit un mémoire *Sur les inégalités séculaires des moyens mouvemens des planètes.* — La commission composée de MM. *Zakharoff, Hamel* et *Hess* et chargée d'examiner les trois pièces de concours au prix de technologie proposé en 1829, fait son rapport, en vertu duquel l'Académie adjuge l'accessit de 100 ducats au mémoire coté No. 3 avec la devise: *Nisi utile est quod facimus, stulta est gloria,* et accorde une mention honorable à M. Joachim-Etienne-François Férand, directeur d'une fabrique de soudes près Toulon en France, et auteur du mémoire No. 2. Ces deux mémoires seront publiés aux frais de l'Académie. — La section mathématique propose pour sujet de prix le problème du flux et du reflux. Approuvé.*) — M. *Kupffer* lit un rapport sur une lettre que lui a adressée de Troïtskosavsk M. George Fuss et dans laquelle ce voyageur lui a communiqué un extrait de ses observations magnétiques à Pékin. — M. *Ostrogradsky* présente les douze premières leçons de son Cours de Mécanique céleste rédigées et publiées par M. Yanouchevsky. — La liste des candidats pour les classes des membres honoraires et correspondans est déclarée close, en vertu de l'arrêté du 23 novembre, et l'Académie procède aux élections. Au dépouillement du scrutin sont nommés *Membres honoraires du pays:* M. le Prince *Menchikoff*, Chef de l'état-major général de la marine, M. *Daschkoff*, Ministre de la justice, et M. *Boulgakoff*, Directeur du département des postes; *Membre honoraire étranger,* en remplacement de M. Niebuhr, M. *Cauchy*, membre de l'institut de France, actuellement à Genève. L'élection des correspondans est remise à la prochaine séance.

21 *decembre* (2 *janvier* 1832) M. *Schmidt* lit un mémoire *Ueber die sogenannte dritte Welt der Buddhaisten*, mémoire faisant suite aux deux mémoires du même auteur sur quelques doctrines principales du bouddhaïsme. — M. le Vice-Président engage l'Académie d'aviser aux moyens de remplacer dignement les cinq places vacantes d'Académiciens: 1. pour les mathématiques appliquées 2. l'astronomie, 3. la géographie et la navigation, 4. la zoologie et 5. la littérature et les antiquités orientales. La section mathématique déclare que la première de ces places ne peut être mieux remplie que par M. *Ostrogradsky,* Académicien extraordinaire, et propose de passer de suite au balottement. M. *Ostrogradsky* est élu avec 16 voix affirmatives sur 17. Une commission composée de tous les membres de la section mathématique est chargée de présenter à l'Aca-

*) Voir le programme de cette question ainsi que le rapport et le jugement sur les pièces de concours au prix de technologie, ci-dessous.

démie, dans le terme de six mois à dater de ce jour, deux listes de candidats, l'une pour la place d'astronomie, l'autre pour celle de géographie et de navigation. Pour la place de zoologie, une commission a déjà été nommée dans la séance du 31 août, et quant à celle de la littérature et des antiquités orientales, l'expectative en a été donnée à M. Schmidt, lors de son élection au grade d'Académicien extraordinaire, elle ne peut par conséquent pas être considérée comme vacante. S. A. I. Mgr. le Grand-Duc Michel envoie une notice sur le chronothermomètre inventé par M. Ph. de Girard, ingénieur-mécanicien en chef des mines du royaume de Pologne et exécuté au palais de la banque de Varsovie. S. A. I. demande l'avis de l'Académie sur cet instrument. Commissaires: MM. *Wisniewsky*, *Parrot* et *Kupffer*. — M. *Kupffer* présente une suite d'observations météorologiques faites à Taganrog pendant 15 années consécutives par le directeur du gymnase de cette ville, M. Manne. — M. *Hess* lit une note *Sur la décomposition de l'hydrate de l'acide sulfurique par la chaleur.* L'Académie en ordonne l'insertion au Bulletin scientifique. — On procède à l'élection de cinq nouveaux membres correspondans, dont trois du pays et deux de l'étranger: MM. Herrmann, chimiste, Polévoï, auteur d'une histoire du peuple russe, tous les deux à Moscou, Weinmann, botaniste à Pavlovsk, Freytag, professeur de langues orientales à Bonn, et Sérullas, membre de l'Académie des sciences de Paris, réunissent la pluralité des voix et sont proclamés élus.

## *Séance publique du* 29 *décembre* (10 *janvier*) 1831.

Le secrétaire ouvre la séance par la lecture du compte rendu de l'année 1831. — M. *Kupffer* lit un mémoire sous le titre d'*Observations générales sur quelques peuplades du Caucase.* — M. *Brandt* prononce son discours de réception dans lequel il donne un aperçu des progrès et des enrichissemens dont la zoologie, l'anatomie comparée et la physiologie animale sont redevables à l'Académie de St.-Pétersbourg. — Le Secrétaire reprend la parole 1. pour proclamer les membres honoraires et correspondans nouvellement reçus et 2. pour faire la lecture des deux pièces suivantes:

### *I. Prix de technologie proposé en* 1829.

Dans sa séance publique du 29 Décembre 1829, l'Académie avait publié, pour le concours d'un prix de technologie, la question suivante:

> Indiquer une méthode fondée sur la connaissance des localités, sur des expériences chimiques exactes et sur des calculs rigoureux, pour préparer en grand, en Russie, la *soude*, soit en l'extrayant du sel marin ordinaire, soit du sel de Glauber (sulfate de soude) natif, soit enfin des mélanges de ces sels entr'eux ou avec d'autres, tels que le natron

ou sous-carbonate de soude natif qui se trouvent dans les lacs et les marais salans, afin que cette soude brute ou purifiée puisse être employée *avec avantage* dans le pays, ou même devenir un article d'exportation.

L'Académie s'était offerte de décerner un prix de cents ducats de Hollande à la meilleure solution de cette question, si l'auteur appropriait aux localités une méthode déjà connue; et un prix de deux cents ducats, s'il proposait un moyen entièrement nouveau de son invention, et qui surpassât en utilité tous ceux que l'on connaît jusqu'à présent. Le terme de concours était fixé au 1 Août 1831. L'Académie a reçu avant la clôture du concours, trois mémoires, savoir:

No. 1. En allemand, avec la devise: Non omnis fert omnia tellus.

No. 2. En français, sans devise et avec le nom de l'auteur: M. Joachim-Etienne-François Férand, directeur d'une fabrique de soudes près Toulon en France.

No. 3. En allemand avec la devise: Nisi utile est quod facimus, stulta est gloria.

Le jugement que l'Académie a porté sur ces trois mémoires, en se basant sur le rapport qui lui en a été fait par une commission composée de MM. *Zakharoff*, *Hamel* et *Hess*, peut être résumé ainsi qu'il suit:

1. Aucun de ces trois mémoires ne répond entièrement aux conditions de la question proposée, en ce qu'aucun n'offre de méthode appropriée aux localités.

Les méthodes de fabriquer la soude proposées par les auteurs des mémoires No. 1 et 2 ne sont pas nouvelles. Celle du No. 1. est, en ce qui concerne la décomposition du sel commun, la même sur laquelle on trouve, dans le 19$^{me}$ Vol. des Annales de Chimie, un rapport détaillé fait au gouvernement français (au commencement de la république) par ses commissaires MM. Lelièvre, Pelletier D'Arcet et Giroud; le moyen proposé par l'auteur pour décomposer le sulfate de soude, ne sera guère avantageux à cause de la grande quantité de bois qu'il demande, et dont nommément le sud de l'empire, qui contient les dépôts les plus considérables de sel commun et de sel de Glauber, est entièrement dépourvu.

L'auteur du No. 2 s'est nommé, et n'aspire point au prix. Il décrit dans ce mémoire la méthode de Leblanc, méthode dont on se sert dans la fabrique confiée à sa direction. Mais la description qu'il en livre étant très satisfaisante et très complète, l'Académie croit, que la publication d'une traduction russe de ce mémoire pourrait devenir utile à nos fabricans, surtout si elle était accompagnée de notes relatives à la fabrication indigène, notes que M. Hamel s'est offert de fournir. En accordant donc au mémoire de M. Férand une mention honorable, l'auteur sera remercié de l'envoi de son mémoire, et ce dernier sera imprimé en russe aux frais de l'Académie.

Le mémoire coté No. 3 a pour auteur un fabricant de produits chimiques en Bavière. Il donne la description d'un procédé de son invention et qu'il as-

sure avoir pratiqué avec avantage depuis quelque tems. Ce procédé est tout à fait nouveau, il intéresse non seulement le technologue, mais aussi le Chimiste, puisqu'aucun des meilleurs ouvrages connus n'indique le moyen fourni par l'auteur, pour caustiser les alcalis. Mais comme ce mémoire ne remplit pas non plus la condition d'avoir égard aux localités, l'Académie ne peut lui décerner que le prix simple de cent ducats à titre d'accessit. Il sera inséré dans sa langue originale au Recueil des mémoires des savans étrangers et une traduction russe en sera publiée séparément conjointement avec le mémoire de M. Férand. Et comme l'application de l'une ou de l'autre de ces différentes méthodes aux différentes localités du pays doit être abandonnée à l'esprit spéculatif des fabricans nationaux qui seuls peuvent livrer les données nécessaires pour compléter et achever la solution de la question proposée par l'Académie, on a arrêté finalement:

2. de mettre un certain nombre d'exemplaires des deux mémoires approuvés, dès qu'ils seront imprimés, à la disposition du ministère des finances qui protége avec tant de succès tout ce qui peut contribuer à l'avancement et au perfectionnement de l'industrie nationale. La question est retirée du concours.

A l'ouverture du billet cacheté appartenant au mémoire couronné, on trouve que l'auteur en est M. *Chrétien-Philippe Prückner*, chimiste et propriétaire d'une fabrique de produits chimiques à Hof dans le royaume de Bavière.

## *II. Programme du prix de mathématiques.*

L'élévation et l'abaissement successifs des eaux de l'océan a occupé les savants dans tous les âges de la philosophie; cependant l'explication des phénomènes des marées est due aux modernes. *Kepler* le premier avait soupçonné que leur cause devait résider dans le pouvoir attractif de la lune. *Newton*, rattachant le mouvement de l'océan à sa grande loi de la pesanteur universelle, en a commencé une théorie mathématique. Les successeurs de ce grand géomètre, jusqu'à *Laplace*, n'ont que peu ajouté à sa théorie. Mais elle a reçu de ce dernier un grand perfectionnement.

Cependant, depuis que *Laplace* a publié ses recherches sur les marées, l'analyse et surtout la physique mathématique ont fait des progrès qui demandent une théorie plus conforme aux idées actuelles sur la constitution des liquides, et qui permettra peut-être de mieux accorder le calcul et l'observation, particulièrement en ce qui regarde le retard de la plus haute marée sur l'instant de la syzygie.

L'Académie propose aux savants de tous les pays la question suivante:

*Déterminer le mouvement de l'océan, en considérant toutes les forces dont l'influence peut être sensible, et comparer à l'observation les hauteurs des marées et les instants de leurs arrivées déduits de la théorie.*

La chaleur du soleil et l'inégale température du fond de l'océan ont, sans doute, une influence sensible sur les marées; il serait très important d'y avoir égard; mais alors la grande difficulté du problème pourrait forcer les auteurs de renoncer à l'espérance de la vaincre. C'est pourquoi l'Académie n'exige pas que l'on considère l'influence de la chaleur sur le mouvement de l'océan, mais elle exige que les équations différentielles de ce mouvement soient formées en supposant les liquides composés de molécules disjointes; la démonstration de ces équations est une partie essentielle de la question. Quant à leur intégration, l'Académie verrait avec plaisir que les auteurs tinssent compte des termes divisés par la quatrième puissance de la distance de la lune; cependant la considération de ces termes n'est pas absolument exigée. L'Académie verrait avec plus de plaisir encore des méthodes d'intégration supérieures à celles qui sont connues, méthodes par lesquelles on éviterait le développement ordinaire en série de fonctions qui dépendent des forces attractives.

---

On distribue à toutes les personnes présentes des exemplaires du Recueil des actes de 1830, et de l'Analyse des travaux de l'Académie pour 1829 et 1830, section des sciences historiques, philologiques et politiques, en langue russe. — La séance est levée à 2 heures.*)

## ANNONCES BIBLIOGRAPHIQUES.

Nouvelles publications:

1. Recueil des actes de la séance publique tenue par l'Académie Impériale des sciences de St.-Pétersbourg le 29 Décembre 1830. St.-Pétersbourg 1831 4°
2. Чтенія Императорской С. Петербургской Академіи Наукъ за 1829 и 1830 годы. Отдѣленіе Наукъ историческихъ, филологическихъ и политическихъ. Книжка I. С. Петерб. 1831. 8°.
3. Cours de mécanique céleste fait par M. Ostrogradsky et rédigé par M. Yanouchevsky. St.-Pétersbourg. 1831. 4°.
4. Основанія чистой Химіи Г. Гесса часть I. С. Петерб. 1831. 8°.
5. Species graminum iconibus et descriptionibus illustravit C. B. Trinius; fasciculus 27mus.
6. Verzeichniss der Pflanzen, welche während der, auf *Allerhöchsten* Befehl, in den Jahren 1829 und 1830 unternommenen Reise im Caucasus und in den Provinzen am westlichen Ufer des Caspischen Meeres gefunden und eingesammelt worden sind. von Dr. C. A. Meyer. St.-Petersb. 1831. 4°.
7. Грамматика Монгольскаго языка сочиненная Я. Шмидтомъ. Переводъ съ нѣмецкаго. С. Петерб. 1832. 4°.

---

*) Les pièces lues dans cette séance seront réunies et paraîtront, comme à l'ordinaire, sous la titre de Recueil des actes de la séance publique de 1831.

# BULLETIN SCIENTIFIQUE.

## N° 3.

### *Sur la décomposition de l'hydrate de l'acide sulfurique par la chaleur, par M. Hess.*

(Lu le 21 décembre 1831.)

Il y a long-temps qu'on avait observé, et entr' autres Mr. C.-G. Gmelin, que par la distillation de l'acide sulfurique hydraté, on pouvait obtenir de l'acide anhydre. Il paraît cependant que cette observation, qui est intéressante sous plusieurs rapports, a échappé à l'attention de beaucoup de chimistes, puisqu'on ne la trouve pas consignée dans la plupart des ouvrages. Il n'y a que peu de temps que j'ai eu l'occasion de faire la même observation dont voici les particularités.

Je faisais distiller de l'acide hydraté dans une cornue en verre qui se trouvait échauffée par un bain de sable. La distillation qui ne s'opère que lentement d'après cette méthode, se trouvait encore ralentie par la grande capacité de la cornue qui n'était nullement en proportion avec la quantité d'acide, et par la température du laboratoire qui montait à peine à $+4°$. En outre la distillation fut souvent interrompue. Les $\frac{2}{3}$ de l'acide, dont la quantité totale était de 10 livres, étant passé dans le récipient, il se forma dans le col de la cornue une masse blanche et cristalline dont la quantité augmentait de plus en plus. Cependant lorsque le col de la cornue fut parvenu à une certaine température, la substance commença à diminuer de volume. A cette époque le récipient fut mis de côté, et puis l'acide solidifié fut enlevé et renfermé dans un tube qui était fermé par un bout, et qui le fut ensuite par l'autre. Cet acide solidifié était blanc, cristallin, et exposé au contact de l'air, il répandait d'épaisses fumées.

Il avait été impossible d'éviter qu'une petite quantité d'acide liquide ne s'introduisît dans le tube avec l'acide solidifié. De cet acide liquide se déposèrent par le repos, des cristaux blancs d'acide solidifié qui, par quelques secousses imprimées au verre, se disséminèrent sur les parois internes du tube, et y formèrent des cubes et des octaëdres.

Une petite quantité de cet acide, qui avait été mis de côté pour en faire l'analyse, fut étendue d'eau et précipitée par le chlorure barytique. Il ne se trou-

va manquer qu'une très petite quantité d'eau, pour que l'acide analysé ne se trouvât composé d'après la formule $\dot{H} + \dddot{S}$. Il résulte de là que, quand même on admettrait que l'acide eût attiré une certaine quantité d'humidité avant la fin de la pesée, une petite quantité d'acide $\dot{H}\,\dddot{S}^{2}$ suffit pour faire solidifier l'acide hydraté.

Le tube scellé qui contenait l'acide, ayant été tenu pendant quelques jours dans une position verticale, il fut ouvert par son extrémité supérieure, et je retirai un morceau d'acide solidifié dont tout l'acide liquide devait s'être écoulé. L'analyse de cet acide, dont la quantité totale était de 0,648 gm. donna 1,627 gm. de sulfate barytique. Il suit de là que les 0,648 gm. étaient composés d'acide

sulfurique 0,559 . . . 0,334 oxigène
eau . . 0,089 . . . 0,079 —
0,648

Ce résultat met hors de doute que cet acide solidifié soit un composé de $\dot{H}\,\ddot{S}^{2}$ et d'acide hydraté ordinaire. Entre 35° et 40°, cet acide se transforme en un liquide incolore qui ne se solidifie que quand on l'expose à la température de 0°. Dans ce cas l'acide prend la forme d'aiguilles fort déliées qui forment une houpe soyeuse au fond du tube, jusqu'à ce que toute la masse se trouve solidifiée.

En dernier lieu une partie de cet acide ayant été enfermée dans un tube recourbé comme ceux dont on se sert pour opérer la condensation des gaz, la moitié de cet acide fut distillé. La partie distillée et aussitôt solidifiée, ayant été enlevée avec le bout du tube qui la contenait et qui fut scellé à la lampe, fut analysée avec beaucoup de soin; voici le résultat de l'analyse:

Acide sulfurique 0,0976 gm. . . . . 0,0584 oxigène
Eau . . . . 0,0089 . . . . . . 0,0079 —

Ce qui confirme pleinement que l'acide sulfurique hydraté, étant exposé pendant long-temps à une température approchante de celle de l'ébullition de l'acide hydraté, passe dans le récipient, tandis que, dans la cornue, il se forme un mélange d'acide hydraté avec de l'acide anhydre.

---

## *L'Ouvarovite, nouveau minéral.*
### *par M. Hess.*

(Lu le 29 février 1832.)

On a trouvé, il y a près de deux ans, aux environs de Bissersk, dans l'Oural, un minéral qu'on a généralement pris pour du Dioptae, quoique celui-ci n'ait jamais été trouvé que dans une matrice de carbonate de chaux, tandis que celui dont il s'agit ici, se trouve sur du fer chromaté. J'ai essayé cette substance au chalumeau, et j'ai trouvé qu'elle ne contient ni eau, ni oxide de cuivre, et qu'elle se distingue de tous les minéraux connus. Voici comment elle se comporte.

Elle est moins dure que le quartz; infusible au chalumeau. Le borate de soude ne l'attaque que difficilement, et donne une belle perle verte transparente, à l'exception de la partie du minéral qui reste non dissoute. Le phosphate double de soude et d'ammoniaque ne l'attaque que quand elle se trouve réduite en poudre très fine; la perle se trouvant saturée, a une belle couleur verte, et laisse entrevoir un squelette de silice. La soude l'attaque avec effervescence, ne la dissout nullement, mais forme une scorie verte infusible.

Cette substance affecte la forme d'un dodécaëdre rhomboïdal, comme le grenat; il se distingue de celui-ci par sa belle couleur verte, provenant du chrome, et par son infusibilité. Si cette substance appartient au grenat, il est sûr au moins qu'elle formera une espèce particulière. Sa belle couleur, sa transparence, sa dureté et sa stabilité au feu lui assurent une place parmi les pierres précieuses, et il paraît que, si l'on en trouve des échantillons d'une plus grande dimension, elle rivalisera avec la plus belle émeraude. Je propose de donner à cette pierre le nom d'*Ouvarovite* en l'honneur de notre Président.

---

## *Rapport fait à l'Académie relativement à une lettre de M. Georges Fuss, datée de Troïzko-Savsk (près de Kiachta, frontière de la Chine) le 23 septembre 1831; par M. A.-Th. Kupffer.*

(Lu le 14 décembre 1831.)

Avant de quitter la frontière de la Chine, M. *Fuss* m'a communiqué les résultats de quelques observations intéressantes, relatives à l'inclinaison et à la déclinaison magnétiques de Pékin, capitale de la Chine. Muni par l'Académie d'excellens instrumens, sortis de l'atelier de M. Gambey à Paris, il a été en état de donner à ses observations magnétiques un degré de précision, qu'il est difficile d'atteindre, lorsqu'on est en voyage, exposé à toute sorte de causes fortuites d'erreurs d'autant plus difficiles à éviter, qu'on n'a pas le tems de les approfondir.

Pour sentir toute l'importance de ces observations, il faut se rappeler que la déclinaison magnétique n'a été observée à Pékin qu'une seule fois, en 1755, par le père Amiot, lorsque l'art d'observer étoit encore dans l'enfance. L'inclinaison y a été observée pour la première fois par M. *Fuss*.

Pour déterminer l'inclinaison de Pékin, M. *Fuss* a employé deux méthodes distinctes, celle de Borda qui est, à ce qu'il paraît, la plus usitée actuellement, et une méthode nouvelle, que j'ai développée dans mon mémoire sur l'inclinaison de St.-Pétersbourg, et qui consiste à observer les inclinaisons de l'aiguille dans plusieurs azimuts arbitraires et équidistans; cette méthode présente l'avantage de pouvoir faire concourir, dans la détermination de l'inclinaison, un grand nombre de valeurs différentes qui, combinées par une formule très simple, donnent l'inclinaison de l'aiguille dans le méridien magnétique.

*

Par ces méthodes qui, dans des circonstances favorables, permettent de déterminer l'inclinaison à une minute près*), M. *Fuss* a trouvé, à Pékin,

le 30 décembre 1830,

par la méthode de Borda, aiguille A . . . 54°.51',1 } moy. 54. 52,1
aiguille B . . . 54°.53',2 }

le 6 avril 1831,

par la méthode des azimuts arbitraires, aig. A . . . 54°.50',7
au mois de mai, par la même méthode, aig. A . . . 54°.45',6
au mois de juin, par la méth. de Borda, aig. A . . . 54°.47',9 } moy. 54. 48,9
aig. B . . . 54°.49',9 }

Ces observations m'ont conduit à quelques considérations que j'ai l'honneur de présenter à l'Académie comme des conjectures qui nécessitent de plus amples vérifications, et que je communique seulement parce qu'elles me semblent propres à diriger l'attention des physiciens sur un point important de la théorie du magnétisme terrestre, dont la connaissance approfondie ne pourra être amenée que par le concours d'un grand nombre d'observateurs.

On voit, par les observations citées, que la valeur de l'inclinaison magnétique à Pékin a diminué depuis le mois de décembre jusqu'au mois de juin, et a augmenté ensuite vers le mois de juin. Comme cette ville est située à l'est du point culminant de l'équateur magnétique, il est probable que l'inclinaison y augmente pendant le reste de l'année, car la latitude magnétique de Pékin doit continnellement augmenter à cause de la rétrogradation des noeuds de l'équateur magnétique; et les accroissemens, que l'inclinaison y éprouve dans le cours d'une année, doivent toujours l'emporter sur les décroissemens.

J'ai prouvé, dans le mémoire cité plus haut, que les variations mensuelles de l'inclinaison de St.-Pétersbourg suivent en général la même règle, seulement dans un ordre inverse; l'inclinaison de St.-Pétersbourg, qui décroit d'une année à l'autre, augmente depuis le mois de décembre jusqu'au mois de mai, et diminue ensuite pendant le reste de l'année.

Cette marche de l'aiguille d'inclinaison présente une grande analogie avec la marche de l'aiguille de déclinaison. Mes observations sur la déclinaison de St.-Pétersbourg, dont je publierai les détails dans un mémoire qui fera suite au mémoire cité, m'ont appris que l'aiguille y marche vers l'ouest depuis l'équinoxe du printems jusqu'au mois d'août, et vers l'est depuis cette dernière époque jusqu'à l'équinoxe du printems prochain, de sorte que, dans le cours d'une année entière, les déviations vers l'est l'emportent sur les déviations vers l'ouest:

---

*) En faisant abstraction toutefois des erreurs constantes, et surtout de celle, qui peut provenir d'un défaut dans la forme de l'axe de l'aiguille; cette erreur ne peut être éliminée complètement et avec certitude par aucune des méthodes actuellement employées.

on voit effectivement que la marche séculaire de l'aiguille est, dans ce moment, orientale à St.-Pétersbourg.

A Paris, des observations exécutées par Cassini et en dernier lieu par M. Arago présentent des résultats analogues. D'après les observations de Cassini, le pôle boréal de l'aiguille de Paris marchait vers l'ouest depuis le solstice d'été jusqu'à l'équinoxe du printems prochain, et vers l'est depuis l'équinoxe du printems jusqu'au solstice d'été, de sorte que, dans le cours de l'année entière, les mouvemens vers l'ouest l'emportaient sur les mouvemens vers l'est: la marche annuelle de l'aiguille fut alors (du tems de Cassini) occidentale.

Plus tard, c'est-à-dire depuis 1818, l'aiguille de Paris a rétrogradé, et M. Arago a observé que, dès lors, la marche mensuelle de l'aiguille a également changé. L'aiguille marche maintenant vers l'ouest pendant trois mois de l'année, et vers l'est pendant les autres neuf mois; cependant cette rétrogradation de l'aiguille (causée, comme j'ai fait voir dans un mémoire inséré dans les Annales de Chimie, Tome XXXIV p. 237, par l'approche de la ligne sans déclinaison qui traverse la Russie européenne), ayant eu lieu à une époque plus reculée à St.-Pétersbourg qu'à Paris, (car déjà depuis long-tems, l'aiguille de St.-Pétersbourg marche vers l'est), la marche de l'aiguille de St.-Pétersbourg est bien plus prononcée, et il est bien plus facile d'y découvrir la règle que j'ai indiquée tout-à-l'heure.

Si l'on combine les mouvemens que l'aiguille exécute dans le sens horizontal et vertical, on arrive à ce résultat remarquable, que l'aiguille décrit, à St.-Pétersbourg, une espèce d'épicycloïde (voir la fig. 1$^{re}$).

A Pékin, la forme de son orbite (si je puis m'exprimer ainsi) est semblable, seulement elle est ascendante (voir la fig. 2$^{e}$).

Lorsque les noeuds de l'équateur magnétique auront rétrogradé de toute la différence des longitudes de St.-Pétersbourg et Pékin, l'aiguille de St.-Pétersbourg aura la même marche que l'aiguille de Pékin suit maintenant; comme ce changement d'un mouvement oriental et descendant en un mouvement occidental et ascendant ne peut se faire brusquement, on peut présumer que le mouvement descendant de l'aiguille de St.-Pétersbourg diminuera peu à peu, disparaîtra et se changera enfin en un mouvement ascendant et rétrograde vers l'ouest. Nous obtiendrons de cette manière la figure 3$^{me}$ pour l'orbite du pôle nord de l'aiguille de St.-Pétersbourg.

Pour voir encore mieux, combien cette figure exprime exactement les observations, on n'a qu'à jeter un coup d'oeil sur la figure 4$^{me}$, qui représente cette partie de la courbe précédente, que le pôle nord de l'aiguille de St.-Pétersbourg décrit annuellement.

On voit par cette figure

1) que l'inclinaison diminue jusqu'au solstice d'hiver, et augmente depuis cette époque jusqu'à la moitié environ de l'intervalle entre l'équinoxe du printems et le solstice d'été, et ensuite diminue de nouveau. Mes observations ont ap-

pris qu'en 1830, l'inclinaison de St.-Pétersbourg a diminué depuis le mois de septembre, où les observations furent commencées, jusqu'au mois de décembre; qu'elle s'accrut ensuite jusqu'au 21 mai 1831, et qu'elle diminua de nouveau depuis cette dernière époque.

2) que l'aiguille marche vers l'ouest depuis l'équinoxe du printems jusqu'au solstice d'été, et vers l'est pendant le reste de l'année; ce qu'on peut également regarder comme suffisamment confirmé par l'expérience.

Pour Pékin, nous aurons la figure 5$^{me}$:

Cette figure satisfait, non seulement aux observations de M. *Fuss* relatives à l'inclinaison, mais aussi à celles qu'il a instituées pour déterminer la déclinaison, dont voici les résultats qu'il m'a également communiqués dans sa dernière lettre:

Décembre 1830 . . . . . . . . . . . . . . . . 1°. 38′ ouest.
Mai 1831 . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 1°. 55′ —
Juin 1831 . . . . . . . . . . . . . . . . . . 1°. 48′ —

Toutes ces observations ont été instituées à la même heure du jour, c'est-à-dire à 6$^h$ du soir, (heures, où l'aiguille affecte ordinairement une position moyenne) et sont liées à des observations horaires sur les variations de la déclinaison, prolongées pendant deux jours et nuits consécutifs: de sorte qu'elles représentent avec une grande exactitude la déclinaison moyenne des jours où l'on a observé.

Comme les variations de la déclinaison sont beaucoup plus grandes que les variations de l'inclinaison, on pourrait croire que l'orbite du pôle nord de l'aiguille aimantée devrait être plus aplatie dans le sens vertical que je ne l'ai représenté; mais il est évident que, pour réduire les variations de la déclinaison à la direction de l'aiguille d'inclinaison, qui est sa direction naturelle, il faut les multiplier par le cosinus de l'inclinaison, ce qui les réduit au tiers environ. A Paris, la plus grande variation que l'aiguille de déclinaison ait éprouvée dans le cours des siècles, paraît avoir été de $34°\frac{1}{2}$: car Sennertus et Offucius observèrent en 1580 une déclinaison de $11°\frac{1}{2}$ vers l'est; et en 1818, où l'aiguille atteignit sa plus grande déviation occidentale, la déclinaison fut de 23° environ. La plus grande variation de l'inclinaison n'est pas connue, car les observations relatives à l'inclinaison ne remontent pas si haut; cependant, Richer la trouva en 1671 égale à 75°, tandis qu'elle est moindre que 68° maintenant; et comme le point culminant de l'équateur magnétique est encore bien éloigné de Paris, l'inclinaison doit encore y décroître beaucoup. On voit, que la plus grande variation que l'inclinaison ait éprouvé dans le cours des siècles, pourrait bien une fois s'élever à 11°,5, c'est-à-dire au tiers de $34°\frac{1}{2}$. S'il est permis de conclure la forme de l'orbite séculaire du pôle nord de l'aiguille aimantée, de la forme de son orbite journalière, cette orbite doit être à peu près circulaire; car, selon mes observations, la plus grande variation diurne de l'inclinaison, (au milieu de l'été) est de 6′ à

8', tandis que la plus grande variation diurne de la déclinaison est de 20' à 24'; il faut diviser par 3 ces deux derniers nombres, pour avoir les déviations, en sens horizontal, des pôles de l'aiguille d'inclinaison, mesurées à son centre.

Il est plus naturel de s'imaginer que le pôle nord de l'aiguille d'inclinaison (dont le centre est supposé immobile) se meut dans une orbite presque circulaire, dans l'espace d'une année, autour d'un point imaginaire qui décrit également, dans le cours des siècles, un cercle autour d'un autre point imaginaire.

M. *Fuss* m'a encore communiqué quelques observations sur les variations diurnes de la déclinaison: ces observations sont correspondantes à des observations de la même nature, exécutées ici à St.-Pétersbourg, les mêmes jours et aux mêmes heures.

A Pékin, le 21 décembre, la différence entre le minimum et le maximum de déviation occidentale, entre $10^h$ du matin et midi et demi, a été de 4'. 35".

Le 22 décembre, le minimum a eu lieu à $8^h$ du matin, le maximum à midi, différence = 4' 40".

Le 20 mars, le minimum a eu lieu à $8^h$ 30' du matin, le maximum à $2^h$ après midi, différence = 3' 47".

Le 21 mars, minimum à $9^h \frac{1}{2}$ du matin; maximum à midi et demi, différence 7' 35".

A St.-Pétersbourg, le 21 décembre, le minimum a eu lieu à $4^h$ 40' du matin, le maximum à midi; la différence a été de 13',5. La première position de l'aiguille est évidemment une anomalie. Depuis dix heures du matin jusqu'à midi, l'aiguille a parcouru ce jour là, un arc de 6'.

Le 22 décembre, l'aiguille de St.-Pétersbourg, après avoir oscillé pendant toute la nuit, s'est enfin arrêtée vers les huit heures du matin, et a atteint sa plus grande élongation vers l'ouest à $11^h$; dans cet intervalle, elle s'est avancée de 2' environ.

Le 20 mars, l'aiguille de St.-Pétersbourg a atteint sa plus grande élongation orientale à $8^h$ 40' du matin, et s'est ensuite avancée vers l'ouest, jusqu'à $2^h$ après midi, de 9'.

Le 21 mars, le minimum a eu lieu à $9^h$ 20' du matin, le maximum à $1^h$ 20' après midi; l'aiguille s'est avancée dans cet intervalle de 12'.

Les observations de M. *Fuss*, relatives aux variations irrégulières de la déclinaison, semblent venir à l'appui d'une conjecture que j'ai émise dans un mémoire inséré dans les Annales de Chimie T. XXXV p. 251, savoir que les variations irrégulières de la déclinaison sont liées à une rétrogradation brusque et momentanée des lignes sans déclinaison, ou ce qui revient au même, à un changement brusque et momentané dans la distribution des forces magnétiques terrestres, et que ce phénomène n'est nullement local. Dans ce cas, lorsque l'aiguille éprouve en Europe (où toutes les aiguilles marchent actuellement dans la même direction, c'est-à-dire vers l'est) une déviation irrégulière vers l'est, elle doit au

contraire avancer vers l'ouest, partout où la variation séculaire de la déclinaison fait marcher l'aiguille dans le même sens (vers l'ouest), et vice versâ: en un mot, les déviations irrégulières de l'aiguille doivent s'effectuer en sens contraire, sur deux points, où les variations séculaires de la déclinaison sont également de signe contraire.

L'aiguille de Pékin, aux deux époques où sa marche a été observée par M. *Fuss*, n'a éprouvé qu'une seule fois une déviation irrégulière assez considérable vers l'est. Ce fut à $2^h\ 30'$ après minuit, du 22 au 23 décembre; dans ce moment, l'aiguille se trouva de $5'\ 6''$ à l'est de sa position moyenne.

A St.-Pétersbourg, dans le même instant à quelques minutes près, c'est-à-dire à $8^h\ 40'$ le soir du 22 décembre (la différence des longitudes de St.-Pétersbourg et de Pékin est de $5^h\ 36'$) l'aiguille s'est avancée considérablement vers l'ouest, de sorte qu'elle se trouva, à l'heure citée, environ de $7'$ à l'ouest de la position qu'elle avait eue à $11^h$, c'est-à-dire à l'heure du maximum de déviation occidentale.

Dans la nuit du 20 au 21 mars, à $1^h$ l'aiguille de Pékin éprouva une faible déviation irrégulière vers l'est; à St.-Pétersbourg, le 20 mars au soir, l'aiguille marcha vers l'est, comme à l'ordinaire, jusqu'à $7^h$; mais à $7^h\ 20'$ elle dévia tout d'un coup, quoique en verité faiblement, vers l'ouest, c'est-à-dire, elle prit une marche opposée à celle qu'elle affecta dans le même instant à Pékin: car lorsqu'il est $1^h$ à Pékin, il est $7^h\ 24'$ à St.-Pétersbourg.

---

## *Vorschlag zur Construction eines Thermometers, welcher sich die Curve seines täglichen Steigens und Fallens selbst aufzeichnet.*

*von* E. LENZ.

(gelesen den 11. Januar 1832.)

Bei dem grossen Interesse, welches sich in unseren Zeiten für meteorologische Beobachtungen und vorzüglich für die Vertheilung der Wärme auf der Oberfläche der Erde überall regt, ist es vor Allem wünschenswerth die Methode der darauf Bezug habenden Beobachtungen so viel als möglich zu vervollkomnen. Es ist bekannt, dass diese Beobachtungen zu den ermüdendsten gehören, die überhaupt angestellt werden, weil sie Jahre lang mit gleicher Pünktlichkeit fortgesetzt werden müssen, ehe sie ein belohnendes Resultat geben können. Betrachten wir hier ins Besondere die Bestimmung der mittleren Temperatur eines Ortes, so ist es klar, dass man dieselbe nur alsdann mit genügender Bestimmtheit ausmitteln können wird, wenn die dazu veranstalteten thermometrischen Beobachtungen wenigstens alle Stunden des Tages und der Nacht, während mehrerer Jahre hinter einander fortgesetzt werden. Allein eine solche Reihe von Beobachtungen ist in der That unausführbar, wenn nicht besondere Umstände sie begünstigen; wir haben bis jetzt, so viel mir bekannt ist, nur ein einziges Beispiel der Art, ich meine die von Brewster veranlassten und bekannt gemachten meteorologischen Be-

obachtungen, welche in dem Fort Leith 2 Jahre lang unausgesetzt von Stunde zu Stunde angestellt wurden.

Ich schlage daher hier ein Thermometer vor, welches sich die Curven seines Steigens und Fallens innerhalb 12 oder 24 Stunden selbst vorzeichnet und auf diese Weise nur ein einmaliges oder höchstens zweimaliges Beobachten innerhalb dieses Zeitraums nöthig macht; dabei kann man die Angaben der Thermometerhöhen in beliebig kleinen Intervallen erhalten.

Der durch seine Ausdehnung*) die jedesmalige Temperatur anzeigende Körper, ist eine runde Metallstange von einem Meter Länge und einem Centimeter im Durchmesser. Am besten ist hierzu eine Zinkstange anzuwenden, weil die Ausdehnung dieses Metalls am bedeutendsten ist; seine Linearausdehnung beträgt circa 0,003 der Länge zwischen den festen Punkten. Die Stange wird ausserhalb des Gebäudes, in welchem die Beobachtungen angestellt werden sollen, am besten auf dem ausserhalb befindlichen Fensterbrette vertikal aufgestellt und mit ihrem untern Ende auf irgend eine Art stark befestigt, ausserdem aber durch ein Paar horizontale Arme, die dieselbe in Oesen fassen, in vertikaler Richtung gehalten, so dass sie nur an einem Punkt, nämlich unten, fest steht. Am obern Ende ist ein messingener Ansatz der Stange gezähnt und treibt einen Drilling, welcher an der Axe eines Rades von 10mal grösserem Durchmesser fest sitzt und daher an der Peripherie dieses letztern eine 10mal grössere Bewegung, als er selbst an seinem Umfange hat, hervorbrigt. Mit dieser 10mal vergrösserten Bewegung greift das Zahnrad in das ebenfalls gezähnte Ende einer horizontalen Welle von etwa 1½ Centimeter Dicke und dreht sie folglich mit derselben Geschwindigkeit um sich selbst. Die Welle geht durch die Mauer oder besser durchs Doppelfenster hindurch und trägt an ihrem andern, im Zimmer befindlichen Ende, ein Zahnrad von 10mal grösserm Durchmesser, so dass an dessen Peripherie eine 100 mal grössere Bewegung als die ursprüngliche hervorgebracht wird. Mit derselben bewegt dieses letzte Rad einen gezähnten Schieber vertikal auf und ab, welcher den Bleistift oder Schieferstift, der zur Aufzeichnung der Temperatur dienen soll, trägt. Um diese Aufzeichnung zu bewirken, bringt man an einer gewöhnlichen Wanduhr statt eines Zeigers eine Scheibe an, die sich, wie jener, in 12 Stunden um ihren Mittelpunkt dreht. Gegen dieselbe wird der zeichnende Stift (ein Blei- oder Schieferstift, je nachdem man zur Scheibe eine Papp- oder Schieferplatte nimmt) angedrückt, so dass er beim allmählichen Fortrücken der Scheibe seinen jedesmaligen Stand anzeichnet und so eine Curve beschreibt, deren Abscissenlinie ein Kreis ist. Hat die Scheibe sich einmal herumgedreht, so muss sie mit einer neuen vertauscht werden; bei einer gewöhnlichen Uhr würde diese Mühe zweimal am Tage erfordert, hätte man aber eine Uhr, deren Stundenzeiger sich in 24 Stunden einmal herumdreht, so würde sie nur einmal nöthig sein.

*) Eigentlich durch den Unterschied seiner Ausdehnung und der der Mauer, an welcher er befestigt wird.

Die beiliegenden Zeichnungen dienen zur Verdeutlichung dieser so eben auseinandergesetzten Idee, nur muss man sich die Peripherie der Räder und Drillinge überall gezähnt denken, was ich in der Zeichnung, um Zeit und Mühe zu ersparen, nicht ausgeführt habe, was aber auch zum Verständniss der Sache nicht wesentlich beiträgt. Fig. 6. enthält die Zeichnung der ausserhalb des Zimmers, Fig. 7. die der innerhalb befindlichen Theile. Der Maassstab ist ungefähr der dritte Theil der natürlichen Grösse.

A in Fig. 6 stellt den obern Theil der Zinkstange, die das eigentliche Thermometer abgiebt, vor; mit ihrem obern messingenen gezähnten Ansatz greift sie in den Drilling B, der mit dem 10mal grössern Zahnrade C eine Axe hat und dieses treibt die horizontale Stange D, deren zweites im Zimmer befindliches ungezähntes Ende in Fig. 7. zu sehen und ebenfalls mit D bezeichnet ist. An diese rWelle sitzt das Rad E und bewegt den Schieber F, welcher mittelst des federnden Stücks G den Stift M trägt und ihn gelinde gegen das Zifferblatt eindrückt. Dieses dreht sich in 12 oder besser noch in 24 Stunden um seine Axe und die Wärmegrade müssen daher auf demselben in Kreisen verzeichnet werden, wie die Figur es zeigt; nur muss bei der Ausführung die Ebene des Zifferblattes nicht mit der des Rades E parallel, sondern rechtwinklig dagegen gestellt sein, sonst würde die Welle D dieselbe durchbrechen und daher seine Bewegung verhindern. Der Schieber F muss entweder an sich so schwer sein oder wenn nicht anders durch ein Gewicht H so beschwert werden, dass es das ganze Getriebe immer nach der Seite seiner Last hinziehe; dadurch wird jeder todte Gang beim Eingriff der Zähne verhindert, welches sonst bei den Wendepunkten der Temperatur einen Fehler verursachen würde. In den Zeichnungen sind alle Stücke, die blos zur Haltung des Instrumentes dienen, nicht ausgeführt; sie bleiben dem Künstler überlassen, da sie doch der Localität, in welcher das Instrument aufgestellt werden soll, angepasst werden müssen.

Um den wirklichen genauen Werth der Grade dieses Instrumentes zu haben, muss man zu einer unmittelbaren Vergleichung desselben mit einem daneben hängenden guten Quecksilberthermometer seine Zuflucht nehmen. Wenn man diese einmal täglich, etwa bei der jedesmaligen Erneuerung der Scheibe, vornähme, so würde man 365 Vergleichungen für das Jahr haben, und wäre dadurch im Stande, eine Correctionstabelle für das Thermometer zu entwerfen, durch welche auch die Unregelmässigkeiten im Gange desselben, die durch die Unvollkommenheit der Zähne der Getriebe entstehen könnten, eliminirt werden würden.

Zum Schlusse bemerke ich noch, dass es leicht sein müsste die Veränderung der Barometerhöhe auf eine ähnliche Weise sich selbst graphisch darstellen zu lassen; man brauchte nur ein auf dem offnen Quecksilber schwimmendes Gewicht den verzeichnenden Stift herauf und herunter bewegen zu lassen.

# SÉANCES DE L'ACADEMIE.

*SÉANCE du* 11 (23) *janvier*. M. *Lenz* lit une note intitulée: *Vorschlag zur Construction eines Thermometers, welches sich die Curve seines täglichen Steigens und Fallens selbst aufzeichnet*. L'Académie en ordonne l'insertion au bulletin sientifique. — M. Stroïeff, invité à assister à cette séance, fait un rapport verbal sur ses dernières récoltes et en présente une partie. L'Académie arrête de fournir les frais à la continuation du voyage archéographique de ce savant. — M. Postels envoie un rapport très satisfaisant sur ses travaux au musée minéralogique depuis son entrée au service jusqu'au 1r janvier de cette année.

18 (30) *janvier*. M. *Bongard* lit la première suite de son *Essai monographique sur les espèces d'Eriocaulon du Bresil*. — M. le Vice-Président annonce à l'Académie que Mgr. le Ministre vient d'approuver le projet relatif à l'expédition géographique de M. George Fuss pour la détermination astronomique de différens points situés à l'est du Baïkal et jusqu'au confluent de la Schilka et de l'Argoun. — M. le Vice-Président annonce la confirmation suprème de M. Ostrogradsky dans le grade d'Académicien ordinaire pour les mathématiques appliquées. — La Commission chargée de dresser une liste de Candidats pour la place vacante de second Académicien ordinaire pour l'Astronomie, propose pour cette place M. Struve, directeur de l'observatoire de Dorpat. M. Struve est élu unanimement. — M. *Sjögren* lit un mémoire intitulé: *Wann und wie wurden Sawolotschje und die Sawolokschen Tschuden russisch? Ein kritischer Versuch zur Aufklärung der Geschichte des russischen Nordens. Erste Abhandlung*. — M. Dzondi, président de la société des naturalistes de Halle, adresse à l'Académie son mémoire imprimé: *Die Functionen des weichen Gaumens beym Athmen, Sprechen, Singen, Schlingen, Erbrechen* u. s. w., mémoire qu'il soumet au jugement de l'Académie. Commissaires: MM. *Zagorsky* et *Brandt*.

25 *janvier* (6 *février*). M. *Brandt* lit un mémoire: *Ueber den Zahnbau der Steller'schen Seekuh, nebst Bemerkungen zur Charakteristik der in zwey Familien zu zerfällenden pflanzenfressenden Cetaceen*. — M. *Schmidt* présente à l'Académie le manuscrit d'un Dictionnaire mongol-allemand contenant plus de 10,000 mots, et lit un rapport sur le plan et la constitution de cet ouvrage qui doit servir de complément à la grammaire mongole du même auteur. L'Académie en ordonne la publication à ses frais. — M. *Brandt* fait un rapport sur la succession littéraire de feu M. Mertens. Il propose à l'Académie de publier les découvertes de ce savant dans des mémoires isolés qu'il s'offre de rédiger au fur et à mesure à côte de ses autres travaux. Ce projet est approuvé. — M. le Président propose de tenir plusieurs séances dans l'année auxquelles seraient admis tous les membres honoraires et correspondans de l'Académie. Le secrétaire est chargé de coucher par écrit les articles, qui doivent composer les règlemens de ces séances, après quoi ce projet sera pris en délibération difinitive à l'une des prochaines séances.

1 (13) *février*. M. *Wisniewsky* lit une lettre que lui a adressée d'Irkoutsk en date du 24 décembre M. G. Fuss et dans laquelle ce voyageur rend compte en détail de ses observations tant magnétiques qu'astronomiques faites à Pékin et durant le voyage. Dans un rapport qui accompagne cette lettre M. *Wisniewsky* signale l'importance des observations astronomiques faites à Pékin même, et surtout de celles qui ont été instituées, en allant et en revenant, sur la route de Kiachta à Pékin, vu que ces dernières forment une base essentielle pour la levée topographique de cette route. M. Wisniewsky soumet de plus à l'Académie un plan qu'il a rédigé pour régler les opérations ultérieures de M. G. Fuss dans son expédition pojetée. L'Académie approuve ce plan, elle ordonne l'insertion de la lettre de son astronome voyageur au bulletin scientifique et abandonne à M. Wisniewsky d'en communiquer un extrait à M. Schumacher pour les Astronomische Nachrichten. — M. Ménétriès adresse à l'Académie un aperçu de la récolte zoologique qu'il a faite dans son voyage au Caucase et le long de la côte occidentale de la mer Caspienne jusqu'aux frontières de la Perse. Commissaires: MM. *Kupffer* et *Brandt*. — Le secrétaire présente le projet des règlemens pour les séances *générales*. L'Académie l'approuve et fixe la première séance au mois de Mars.

8 (20) *février*. M. le Président annonce à l'Académie que S. M. l'Empereur a daigné confirmer M. Schmidt dans le grade d'Académicien extraordinaire avec l'expectative sur la place vacante de second Académicien ordinaire pour la littérature et les antiquités orientales. — M. le Conseiller privé actuel Novosiltzoff, Curateur de l'arondissement universitaire de Vilna, transmet le resumé des observations astronomiques et météorologiques faites à l'observatoire de l'université par M. Slavinsky, professeur d'astronomie. M. Wisniewsky en recommande la publication dans le bulletin scientifique. — M. *Trinius* fait un rapport très favorable sur l'ouvrage de M. Brandt: *Abbildung und Beschreibung der in Deutschland wildwachsenden und in Gärten im Freyen ausdauernden Giftgewächse*. M. *Trinius* croit que la publication d'une traduction russe de cet ouvrage pourrait devenir éminemment utile et propose à l'Académie d'en fournir les moyens à l'auteur. L'Académie recommande cet ouvrage aux Ministères de l'instruction publique et de l'intérieur ainsi qu'à la société économique de St.-Pétersbourg. — M. *Sjögren* lit un rapport sur les trouvailles qu'il a faites dans les archives de l'hôtel de ville de Vibourg lors de son dernier séjour dans cette ville.

15 *février* (8 *mars*). M. *Zagorsky* lit un mémoire: Описаніе и изображеніе близнецовъ лбами между собою сросшихся. M. *Zagorsky* prétend que si ces jumelles eussent vécu on aurait pu les séparer sans danger et il demande la permission d'en faire l'essai sur l'exemplaire qui se trouve au musée pour voir si sa supposition est fondée. L'Académie l'y autorise. — M. *Lenz* lit un mémoire: *Ueber die Bewegungen des Wagebalkens einer Drehwage wenn derselben andere Körper von verschiedener Temperatur genähert werden*. — M. *Schultén*,

professeur de mathématiques à Helsingfors et membre correspondant de l'Académie, envoie au mémoire: *In quaestionem de collisione corporum solidorum latissimo sensu acceptam disquisito.* Commissaires MM. *Collins*, *Fuss*, *Ostrogradsky* et *Bouniakovsky*.

29 *février* (12 *mars*). M. Wisniewsky lit un mémoire: *Considérations sur la réforme du Calendrier.* — M. le Président annonce que le 19 de ce mois S. M. l'Empereur a daigné confirmer M. *Struve* dans la fonction d'Académicien ordinaire pour l'Astronomie. — Le département pour les constructions navales adresse à l'Académie la description et les dessins d'un paratonnerre de construction particulière dont on a le projet de munir les phares et en demande l'avis de l'Académie. Commissaire M. *Kupffer*. — MM. *Wisniewsky*, *Parrot* et *Kupffer* font leur rapport sur le Chronothermomètre de M. Girard dont une description et un dessin ont été envoyés par ordre de Mgr. le Grand-Duc Michel pour être examinés par l'Académie. Le but de cet instrument étant d'indiquer de lui même d'heure en heure les degrés de température, son utilité est incontestable, mais pour savoir s'il remplit ce but il aurait fallu envoyer une description de son mécanisme et des données comparatives sur les observations faites pendant un certain tems tant au moyen de cet instrument qu'au moyen d'un bon thermomètre ordinaire. La notice envoyée n'ayant rapport qu'à l'extérieur de l'appareil, les Commissaires déclarent ne pas pouvoir en porter un jugement. — M. *Hess* lit une note *Sur l'Ouvarovite*, *nouvelle substance minérale de l'Oural.* (Un extrait de cette note a été communiqué dans les papiers publics). L'Académie en ordonne l'insertion au bulletin scientifique.*) — M. *Brandt* fait son rapport sur la partie scientifique de l'aperçu de la récolte zoologique faite dans le voyage au Caucase par M. Ménétriès. Il en recommande la publication. — M. le Président communique une lettre que lui a adressée M. le professeur Nordmann de Finlande, actuellement à Berlin, et dans lequelle ce savant prie l'Académie d'agréer la dédicace d'un ouvrage qu'il vient de publier sous le titre: *Micrographische Beyträge zur Naturgeschichte der niedern Thiere* et qu'il promet d'envoyer sous peu. L'auteur y traite des animaux microscopiques qu'il a découverts lui-même et examinés anatomiquement et physiologiquement. Le premier mémoire se rapporte exclusivement aux animaux que l'on découvre au moyen du microscope dans les liqueurs de l'oeil animal et dont M. Nordmann a observé un grand nombre. L'Académie accepte l'hommage qui lui est offert et arrête d'en remercier M. Nordmann.

*) Voir ci-dessus.

# ANNONCES BIBLIOGRAPHIQUES.

1. Mémoires de l'Académie Impériale des sciences de St.-Pétersburg VI$^e$ Série. Section des sciences mathématiques, physiques et naturelles. Tome II. livr. 2$^e$.
2. Même ouvrage. Section des sciences politiques, historiques et philologiques. Tom I. livr. 4$^e$ et 5$^e$.
3. Recueil des Actes de la séance publique du 29 Décembre 1831. 4°.
4. Die Münzen der Chane vom Ulus Dschutschi's oder von der goldenen Horde u. s. w. von *C. M. Frähn*, mit 18 Kupfertafeln und 4 Vignetten. 4°.

## № 4.

# BULLETIN SCIENTIFIQUE.

*Note sur l'équilibre d'un fil élastique par M.* OSTROGRADSKY.

Lu le 16. Mai 1832.

M. le professeur *Schultén* a le premier publié qu'une inexactitude a échappé à *Lagrange* dans l'application de sa méthode des variations à l'équilibre d'un fil élastique [1]; mais M. *Schultén* n'a pas expliqué d'où pouvait venir cette inexactitude, car il n'a pas dit par quelle raison on ne pouvait pas faire, comme *Lagrange* l'avait fait, $\delta ds = o$? [2])

J'observe que les différentielles qui se rapportent aux espaces virtuels d'un système, et qui sont désignées par $\delta$ dans la Mécanique analytique, changent leur nature quand on fait usage de la *méthode des multiplicateurs* [3]), et ne se rapportent plus aux mouvements virtuels; ainsi d'une équation de condition telle que $L = o$, il résultera dans l'équation de l'équilibre du système, auquel $L = o$ se rapporte, un terme $\lambda\delta L$ où $\delta L$ ne sera pas nul; car $\delta L$ n'est nul que quand $\delta$ est relative aux espaces virtuels; or $\delta$ dans $\lambda\delta L$ désigne une différentiation arbitraire. C'est ainsi que, dans la Mécanique analytique, il n'est pas permis de supposer $\delta ds = o$, ni $\delta d^2 s = o$ dans la différentielle $\delta$ de la quantité

$$e = \frac{\sqrt{(d^2x^2 + d^2y^2 + d^2z^2 - d^2s^2)}}{ds}. \;^{4)}$$

A la place de

$$\delta e = \frac{d^2x\delta d^2x + d^2y\delta d^2y + d^2z\delta d^2z}{ds\sqrt{(d^2x^2 + d^2y^2 + d^2z^2 - d^2s^2)}},$$

il faut écrire

$$\delta e = \frac{d^2x\delta d^2x + d^2y\delta d^2y + d^2z\delta d^2z - d^2s\delta d^2s}{ds\sqrt{(d^2x^2 + d^2y^2 + d^2z^2 - d^2s^2)}} - \frac{e\delta ds}{ds},$$

Cette dernière valeur de $\delta e$ conduira aux véritables équations d'un fil élastique en équilibre, ou plutôt à la véritable expression de la tension $\lambda$, car il est facile de voir que la variabilité de $ds$ ne changera nullement les équations relatives à tous les points de la courbe, et qu'elle ne portera que sur la valeur de $\lambda$. Cette remarque est générale, et en même tems facile à expliquer.

En effet, si l'on avait une équation de condition $L = o$, donnée par la nature d'un système, et s'il fallait ajouter en même tems aux moments virtuels des forces appliquées au même système, une quantité telle que $\mu\delta M$, $M$ étant une

1) Mécanique analytique, Tome I, page 152.
2) Astronomische Nachrichten, Tome VII, page 185.
3) Mécanique analytique, Tome I, page 74.
4) Ibidem page 152.

fonction de $L$, $dL$, $d^2L\ldots$, l'équation générale d'équilibre de ce système renfermerait la quantité

$$S\,(\mu\delta M+\lambda\delta L)$$

laquelle, en supposant $\delta M=\delta P+Q\delta L+R\delta dL+S\delta d^2L+\ldots$ et ne tenant compte que des quantités sous le signe $S$, deviendra

$$S\,[\mu\delta P+(\lambda+\mu Q-d(\mu R)+d^2(\mu S)-\ldots)\delta L]$$

Cette même quantité, dans l'hypothèse $\delta M=\delta P$, c'est-à-dire quand $\delta L=o$, serait

$$S\,(\mu\delta P+\lambda\delta L)$$

en sorte que la variabilité de $L$, $dL$, $d^2L\ldots$ change seulement $\lambda$ en $\lambda+\mu Q-d(\mu R)+d^2(\mu S)-\ldots$ Or qu'on écrive $\lambda$ ou $\lambda+\mu Q-d(\mu R)+d^2(\mu S)-\ldots$ l'élimination donnera toujours le même résultat.

---

## *Ancien monument mongol.*

Par ordre de S. E. M. le ministre des finances, le département des mines a annoncé à l'Académie qu'il a reçu de Nertchinsk une table de granit de 2 archines 13 verchoks (2 mètres) de long, sur 15 verschoks (0,666) de large et 5 verchoks (0,222 mètres) d'épaisseur, cassée en deux, et portant une inscription en caractères mongols. Cette pierre a été trouvée parmi les ruines d'un ancien édifice sur le bord de la petite rivière de *Kondouï* près de la frontière chinoise. M. Schmidt, délégué par l'Académie pour examiner cette pierre, lui fit, dans la séance du 23 janvier, le rapport suivant:

L'Académie m'ayant chargé d'examiner la pierre envoyée de Nertchinsk, et qui se trouve actuellement au corps des mines, j'ai l'honneur de lui rapporter que j'ai réussi à déchiffrer l'inscription qui s'y trouve gravée, à l'exception d'un seul mot qui reste douteux. Me réservant de faire sous peu à l'Académie un rapport circonstancié sur cette trouvaille intéressante, je me contente aujourd'hui de lui communiquer au préalable le résultat suivant de mes recherches: D'après l'inscription, on voit que la pierre a été érigée par *Tchinghis-Khan* après la soumission de l'empire de Sartaghol, plus connu dans l'histoire sous le nom de *Kharakitaï*, et lorsque le conquérant, après la mort de son ennemi principal *Goutchlouk*, eut non seulement soumis à sa domination toutes les tribus mongoles, mais encore anéanti l'empire des *Kharakitaï*, l'un des siéges principaux de la discorde entre les Mongols et de leurs fréquentes révoltes contre la puissance du conquérant. L'époque de l'érection de ce monument peut par conséquent être reportée à l'an 1219 ou 1220. Il devait servir de ban, comme l'inscription l'indique, contre les *Eljés*, espèce d'esprits malins ou de harpies ailées qu'on supposait exciter la discorde et la vengeance. Cette inscription est non seulement le seul monument existant de *Tchinghis-Khan*, mais elle nous offre encore le plus ancien échantillon de l'écriture mongole, vu qu'il a été même douteux jusqu'à ce jour si les Mongols du tems de *Tchinghis-Khan* ont eu leur propre écriture, ou non.

---

*Observations astronomiques faites à l'Observatoire academique de Wilna en 1829 et 1830 n. s.*

## U r a n u s.

Positions apparentes des étoiles de comparaison calculées par les tables: *New Tables for facilitating the computation of Precession, Aberration and Nutation of two thousand eight hundred and eighty-one principal fixed Stars. London* 1827*)

| Pour 1829 | Nom de l'étoile. | AR. apparentes. | | | Déclin. austr. appar. | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 10 Octobre. | 2393 — 7 Capricorni — — 5.6 | 20$^h$ | 9′ | 33″9 | 19° | 38′ | 22.″5 |
| 18 " | " " " " " | " | " | 33.8 | " | " | 22.9 |
| 25 " | " " " " " | " | " | 33.7 | " | " | 23.1 |

## P o s i t i o n d e l a P l a n è t e.

| Jour de l'observation. | Tems moy. du passage à Wilna. | | | AR. apparentes. | | | Declin. austr. appar. | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 1829. | | | | | | | | | |
| 10 Octobre. | 7$^h$ | 3′ | 24.″0 | 20$^h$ | 19′ | 33.″6 | 20° | 13′ | 43.″6 |
| 18 " | 6 | 32 | 0.5 | " | " | 37.4 | " | " | 7.0 |
| 20 " | " | 24 | 11.6 | " | " | 40.5 | " | " | 1.3 |
| 21 " | " | 20 | 18.3 | " | " | 42.7 | " | " | 49.4 |
| 22 " | " | 16 | 24.4 | " | " | 44.4 | " | " | 39.4 |
| 23 " | " | 12 | 30.6 | " | " | 46.7 | " | " | 35.6 |
| 25 " | " | 4 | 44.0 | " | " | 51.9 | " | " | 15.5 |

On a employé l'obliquité de l'écliptique = 23° 27′ 32″.

*) On a aussi calculé par les mêmes tables les positions apparentes des étoiles pour les planètes suivantes

| Jour de l'observation. | Longitudes géocentriques. Tables de Bouvard 1821. | Longitudes géocentriques. Observées. | Différ. en long. | Latitudes géocentriques australes. Tables de Bouvard 1821. | Latitudes géocentriques australes. Observées. | Différ. en latit. | Logar. du ray. vect. ♅ Tables de Bouvard 1821. | Lieu de la terre lors du passage. Tables du Bureau des longitudes | Logar. du ray. vecteur. Tables du Bureau des longitudes |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | 10ˢ | 10ˢ | | | | | | 0ˢ | |
| 10 Octobre. | 2° 28′ 6″.7 | 2° 27′ 40″.7 | + 26″.0 | 0° 37′ 16″.8 | 0° 37′ 7″.0 | + 9″.8 | 1.2974343 | 17° 8′ 9″.7 | 9.9989565 |
| 18 „ | „ 29 4.7 | „ 28 41.7 | + 23.0 | „ „ 3.8 | „ 36 43.5 | + 20.3 | 1.2974568 | 25 3 5.1 | 9.9979797 |
| 20 „ | „ 29 49.5 | „ 29 25.6 | + 23.9 | - „ 0.6 | „ „ 48.0 | + 12.6 | 1.2974625 | 27 2 10.9 | 9.9977449 |
| 21 „ | „ 30 16.5 | „ 29 57.1 | + 19.4 | „ 36. 59.0 | „ „ 43.3 | + 15.7 | 1.2974650 | 28 1 47.7 | 9.9976285 |
| 22 „ | „ 30 46.6 | „ 30 22.8 | + 23.8 | „ „ 57.5 | „ „ 39.0 | + 18.5 | 1.2974680 | 29 1 26.6 | 9.9975114 |
| | | | | | | | | 1ˢ | |
| 23 „ | „ 31 19.7 | „ 30 56.7 | + 23.0 | „ „ 55.7 | „ „ 43.0 | + 12.7 | 1.2974706 | 0 1 7.8 | 9.9973953 |
| 25 „ | „ 32 35.1 | „ 32 11.4 | + 23.7 | „ „ 52.7 | „ „ 39.8 | + 12.9 | 1.2974761 | 2 0 36.6 | 9.9971627 |
| | | | Moyenne + 23.2 | | | Moyenne + 14.6 | | | |

La quadrature d'Uranus tirée des tables de Bouvard corrigées des erreurs, eut lieu à Wilna en 1829 le 25 Octobre n. s. à $18^h$ 52′ 10″.1 t. m. astr.

Lors de la quadr. { longitude géocentrique d'Uranus . . 10ˢ 2° 32′ 32″.04
celle de la Terre . . . . . . . . 1. 2. 32. 32.04
latitude géoc. austr. d'Uranus . . . 0. 36. 37.3

# *Mars.*

## *Position des étoiles de comparaison.*

| Pour 1830 | Noms des étoiles. | | | AR. apparentes. | | | Déclin. austr. appar. | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 27 Septembre | 2877 — | 33 Piscium — | 5 | 23ʰ | 56′ | 40″.8 | 6° | 39′ | 9″.8 |
| 30 〃 | 〃 | 〃 | 〃 | 〃 | 〃 | 40.8 | 〃 | 〃 | 9.6 |
| 21 Octobre | 2855 — | Piscium — | 7 | 〃 | 20 | 47.0 | 5 | 26 | 59.4 |
| 4 Novembre | 〃 | 〃 | 〃 | 〃 | 〃 | 46.9 | 〃 | 27 | 0.3 |
| 21 Octobre | 2842 — | Aquarii — | 6.7 | 〃 | 39 | 51.1 | 7 | 19 | 4.9 |
| 4 Novembre | 〃 | 〃 | 〃 | 〃 | 〃 | 51.0 | 〃 | 〃 | 5.8 |

## *Position de la Planète.*

| Jour de l'observation. | Tems moy. du passage à Wilna. | | | AR. apparentes. | | | Déclin. austr. appar. | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 1830. | | | | | | | | | |
| 27 Septembre | 11ʰ | 20′ | 37″.8 | 23ʰ | 45′ | 16″.2 | 6° | 44′ | 33″.2 |
| 28 〃 | 〃 | 15 | 41.4 | 〃 | 44 | 15.5 | 〃 | 46 | 28.3 |
| 29 〃 | 〃 | 10 | 46.0 | 〃 | 43 | 15.8 | 〃 | 48 | 29.8 |
| 30 〃 | 〃 | 5 | 52.5 | 〃 | 42 | 18.0 | 〃 | 49 | 58.4 |
| 21 Octobre | 9 | 32 | 35.9 | 〃 | 31 | 35.0 | 〃 | 11 | 31.5 |
| 22 〃 | 〃 | 28 | 41.1 | 〃 | 31 | 35.9 | 〃 | 6 | 26.2 |
| 24 〃 | 〃 | 21 | 1.1 | 〃 | 31 | 46.9 | 〃 | 55 | 28.8 |
| 31 〃 | 8 | 55 | 36.8 | 〃 | 33 | 55.1 | 〃 | 9 | 20.8 |
| 3 Novembre | 〃 | 45 | 24.2 | 〃 | 35 | 30.4 | 〃 | 46 | 6.7 |
| 4 〃 | 〃 | 42 | 5.7 | 〃 | 36 | 7.6 | 〃 | 38 | 0.8 |

On a employé l'obliquité de l'écliptique = 23° 27′. 32″.8

| Jour de l'observation. | Longitudes héliocentriq. Observées. | Longitudes héliocentriq. Berliner Astron. Jahrbuch für 1830. | Diff. en long. | Latitudes héliocentriques. Observées. | Latitudes héliocentriques. Berliner Astron. Jahrbuch für 1830. | Diff. en latit. | Berliner Astronomisches Jahrbuch für 1830. Logar. rayon vecteur de Mars. | Berliner Astronomisches Jahrbuch für 1830. Longit de la Terre. | Berliner Astronomisches Jahrbuch für 1830. Logar. rayon vecteur de la Terre. |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 1830. | | $11^s$ | | | | | | $11^s$ | |
| 19 Septembre | . . . | 26° 20′ 55″.4 | . . | . . . | 1° 27′ 19″.1 | . . | 0.1434685 | 26° 26′ 44″.3 | 0.0016135 |
| 21 „ | . . . | 27 35 45.0 | . . | . . . | 1 25 53.1 | . . | 0.1437908 | 28 23 48.6 | 0.0013675 |
| | $0^s$ | $0^s$ | | | | | | $0^s$ | |
| 27 „ | 1° 19′ 28″.6 | 1 19 25.9 | −2″.7 | 1° 21′ 10″.8 | 1 21 6.1 | −4″.7 | 0.1448841 | 4 15 44.7 | 0.0006147 |
| 28 „ | 1 56 40.6 | 1 56 36.1 | − 4.5 | 1 20 14.5 | 1 20 16.8 | + 2.3 | 0.1450770 | 5 14 30.2 | 0.0004886 |
| 29 „ | 2 33 44.4 | 2 33 36.9 | − 7.5 | 1 19 34.5 | 1 19 27.5 | − 7.0 | 0.1452679 | 6 13 17.7 | 0.0003628 |
| 30 „ | 3 10 47.9 | 3 10 38.0 | − 9.9 | 1 18 44.2 | 1 18 36.2 | − 8.0 | 0.1454752 | 7 12 7.3 | 0.0002371 |
| 21 Octobre | 16 0 46.5 | 16 0 40.2 | − 6.3 | 0 59 12.1 | 0 59 11.6 | − 0.5 | 0.1505056 | 27 56 6.3 | 9.9976637 |
| 22 „ | 16 36 58.4 | 16 36 54.5 | − 3.9 | 0 58 11.7 | 0 58 13.2 | + 1.5 | 0.1507785 | 28 55 43.8 | 9.9975412 |
| | | | | | | | | $1^s$ | |
| 24 „ | 17 49 17.1 | 17 49 12.6 | − 4.5 | 0 56 10.8 | 0 56 12.9 | + 2.1 | 0.1533346 | 0 55 6.1 | 9.9972992 |
| 31 „ | 22 0 50.7 | 22 0 49.9 | − 0.8 | 0 49 1.6 | 0 49 3.7 | + 2.1 | 0.1533654 | 7 53 48.9 | 9.9964845 |
| 3 Novembre | 23 47 55.6 | 23 47 48.9 | − 6.7 | 0 45 53.6 | 0 45 55.4 | + 1.8 | 0.1542812 | 10 53 44.8 | 9.9961568 |
| 4 „ | 24 23 34.9 | 24 23 29.1 | − 5.8 | 0 44 52.8 | 0 44 52.6 | − 0.2 | 0.1545861 | 11 53 47.3 | 9.9960507 |
| | | Moyenne = | − 5.3 | | Moyenne = | − 1.1 | | | |

L'opposition de Mars tirée de *Berliner Astr. Jahrbuch* 1830 corrigé des erreurs, eut lieu à Wilna en 1830 le 19 Sept. à $5^h$ 31′ 49″.7 t. m. astr.

Lors de l'oppos. { Longit. hélioc. de Mars et celle de la Terre = $11^s$. 26° 10′ 52″.1
{ Latitude hélioc. austr. de Mars . . = 1 27 31.9

## *Jupiter.*

### *Position des étoiles de comparaison.*

| Pour 1830 | Noms des étoiles. | | | AR. apparentes. | | | Déclin. austr. appar. | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 22 Septembre | 2152 — Sagittarii — — | | 6 | 18h | 38′ | 12″.6 | 23° | 38′ | 30″.0 |
| 22 „ | 2181 — 35 Sagittarii — | | 5 | „ | 44 | 52.8 | 22 | 52 | 14.2 |
| 27 „ | „ | „ „ | „ | „ | „ | 53.0 | „ | „ | 14.0 |
| 30 „ | „ | „ „ | „ | „ | „ | 53.1 | „ | „ | 14.0 |
| 4 Octobre | „ | „ „ | „ | „ | „ | 52.6 | „ | „ | 14.4 |

### *Position de la Planète.*

| Jour de l'oobservatin. | Tems moy. du passage à Wilna. | | | AR. apparentes. | | | Déclin. austr. appar. | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 1830. | | | | | | | | | |
| 22 Septembre | 6h | 32′ | 47″.2 | 18h | 36′ | 56″.3 | 23° | 26′ | 41″.6 |
| 27 „ | „ | 14 | 32.6 | „ | 38 | 21.6 | „ | 25 | 50.5 |
| 28 „ | „ | 10 | 55.5 | „ | „ | 40.5 | „ | „ | 32.2 |
| 29 „ | „ | 7 | 19.1 | „ | 39 | 0.2 | „ | „ | 23.0 |
| 30 „ | „ | 3 | 44.1 | „ | „ | 2[illegible].1 | „ | „ | 7.7 |
| 3 Octobre | 5 | 53 | 1.8 | „ | 40 | 27.1 | „ | 24 | 4.8 |
| 4 „ | „ | 49 | 29.5 | „ | „ | 50.6 | „ | 23 | 54.1 |

On a employé l'obliquité de l'écliptique = 23° 27′ 32″.9.

| Jour de l'observation. | Longitudes géocentriques. Observées. | Longitudes géocentriques. Berliner Astron. Jahrbuch für 1830. | Differ. en long. | Latitudes géocentriques australes. Observées. | Latitudes géocentriques australes. Berliner Astron. Jahrbuch für 1830. | Differ. en long. | Berliner Astronomisches Jahrbuch für 1830. Logar. rayon vecteur de Jupiter. | Berliner Astronomisches Jahrbuch für 1830. Longitude de la Terre. | Berliner Astronomisches Jahrbuch für 1830. Logar. rayon vecteur de la Terre. |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 1830. 22 Septembre | $9^s$ 8° 27′ 59″.2 | $9^s$ 8° 27′ 57″.6 | + 1″.6 | 0° 15′ 25″.1 | 0° 15′ 37″.0 | −11″.9 | 0.7121781 | $11^s$ 29° 9′ 36″.9 | 0.0012705 |
| 27 " | " 47 33.7 | " 47 21.9 | + 11.8 | " " 50.5 | " " 57.7 | − 7.2 | 0.7120264 | $0^s$ 4 3 13.2 | 0.0006421 |
| 28 " | " 51 54.8 | " 51 46.0 | + 8.8 | " " 49.5 | " 16 0.8 | − 11.3 | 0.7119927 | 5 2 0.5 | 0.0005159 |
| 29 " | " 56 26.3 | " 56 21.2 | + 5.1 | " " 58.6 | " " 5.9 | − 7.3 | 0.7119674 | 6 0 50.9 | 0.0003897 |
| 30 " | 9 1 14.2 | 9 1 6.2 | + 8.0 | " 16 2.8 | " " 10.0 | − 7.2 | 0.7119337 | 6 59 43.3 | 0.0002639 |
| 3 Octobre | " 16 25.0 | " 16 22.3 | + 2.7 | " " 2.7 | " " 21.4 | − 18.7 | 9.7118410 | 9 56 31.9 | 9.9998887 |
| 4 " | " 21 48.8 | " 21 47.3 | + 1.5 | " " 14.7 | " " 25.5 | − 10.8 | 0.7118072 | 10 55 33.4 | 9.9997647 |
| | | Moyenne = | + 5.6 | | Moyenne = | − 10.6 | | | |

La quadrature de Jupiter tirée de *Berliner Astronomisches Jahrbuch* 1830 corrigé des erreurs, eut lieu à Wilna en 1830 le 2 Octobre n. s. à $12^h$ 4′ 13″.8 t. m. astron.

Lors de la quadr. { Longit. géoc. de Jupiter = $9^s$ 9° 12′ 40″.73
Celle de la Terre . . = 0 9 12 40.73
Latit. géoc. austr. de Jup. = 0 16 7.94

# *Vesta.*

## *Positions des étoiles de comparaison.*

| Pour 1830 | Noms des étoiles, | AR. apparentes. | Déclin. austr. appar. |
|---|---|---|---|
| 1 Octobre | 137 — 39 Ceti — — 6 | $1^h$ 8′ 1.″7 | 3° 23′ 29″.3 |
| 10 = | 129 — 34 Ceti — — 6.7 | = 3 7.7 | 3 9 3.3 |
| 11 = | = = = = | = = 7.7 | = = 3.3 |
| 20 = | 104 — 25 Ceti — — 6 | 0 54 29.6 | 5 44 30.3 |
| 8 Novembre | = = = = | = = 29.5 | = = 31.7 |
| 1 Octobre | 190 — Ceti — — — 6 | 1 37 30.2 | 6 34 54.7 |
| 24 = | = = = = | = = 30.4 | = = 56.1 |

## *Position de la Planète.*

| Jour de l'observation. | Tems moyen du passage à Wilna. | AR. apparentes. Observées. | AR. apparentes. Berliner Astron. Jahrbuch für 1830. | Differ. | Déclin. austr. apparentes. Observées. | Déclin. austr. apparentes. Berliner Astron. Jahrbuch für 1830. | Differ. |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 1830. | | | | | | | |
| 1 Octobre | $12^h$40′32″.3 | $1^h$21′11″.21 | $1^h$21′10″.78 | —0″.43 | 4° 16′34″.3 | 4° 16′38″.8 | + 4″.5 |
| 10 = | 11 56 47.5 | = 12 48.11 | = 12 47.58 | — 0.53 | 5 8 34.9 | 5 8 41.4 | + 6.5 |
| 11 = | = 51 54.6 | = 11 50.96 | = 11 50.66 | — 0.30 | 5 13 41.8 | 5 13 50.3 | + 8.2 |
| 20 = | = 8 9.6 | = 3 29.56 | = 3 29.65 | — 0.09 | 5 52 22.4 | 5 52 32.4 | + 10.0 |
| 21 = | = 3 22.7 | = 2 36.57 | = 2 36.62 | — 0.05 | 5 55 46.7 | 5 55 53.8 | + 7.1 |
| 24 = | 10 49 0.7 | = 0 2.29 | = 0 2.17 | — 0.12 | 6 4 32.1 | 6 4 43.3 | + 11.2 |

# Uranus.

## Positions des étoiles de comparaison.

| Pour 1830 | Noms des étoiles. | | | | AR. apparentes. | | | Déclin. austr. appar. | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 22 Octobre | 2432 — | 15 Capricorni | — | 5 | 20h | 30′ | 23″.8 | 18° | 43′ | 28″.6 |
| 8 Novembre | = | = | = | = | = | = | 23.4 | = | = | 29.4 |
| 22 Octobre | 2484 — | 20 Capricorni | — | 6 | = | 49 | 58.4 | 19 | 40 | 58.1 |
| 8 Novembre | = | = | = | = | = | = | 58.1 | = | = | 59.0 |

## Position de la Planète.

| Jour de l'observation. | Tems moy. du passage à Wilna. | | | AR. apparentes. | | | Déclin. austr. appar. | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 1830. | | | | | | | | | |
| 22 Octobre | 6h | 33′ | 59″.9 | 20h | 36′ | 26″.0 | 19° | 16′ | 39″.0 |
| 24 = | = | 26 | 11.0 | = | = | 28.9 | = | = | 23.4 |
| 28 = | = | 10 | 34.9 | = | = | 36.6 | = | 15 | 46.4 |
| 31 = | 5 | 58 | 56.1 | = | = | 45.5 | = | = | 12.7 |
| 3 Novembre | = | 47 | 19.1 | = | = | 55.5 | = | 14 | 26.4 |
| 4 = | = | 43 | 25.5 | = | = | 59.0 | = | = | 13.8 |
| 7 = | = | 31 | 51.3 | = | 37 | 11.7 | = | 13 | 25.0 |
| 8 = | = | 27 | 59.5 | = | = | 16.2 | = | = | 4.9 |

On a employé l'obliquité de l'écliptique = 23° 27′ 32″.5

| Jour de l'observation. | Longitudes géocentriques. | | Différ. en long. | Latit. géoc. australes. | | Différ. en lat. | Berliner Astronomisches Jahrbuch für 1830. | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | Observées. | Berliner Astron. Jahrbuch für 1830. | | Observées. | Berliner Astron. Jahrbuch für 1830. | | Logar. rayon vecteur d'Uranus. | Longitude de la Terre. | Logar rayon vecteur de la Terre. |
| 1830. 22 Octobre | $10^s$ 6° 32′ 43″.2 | $10^s$ 6° 33′ 5″.3 | + 22″.1 | 0° 38′ 45″.2 | 0° 38′ 59″.2 | + 14″.0 | 1.2984364 | $0^s$ 28° 48′ 28″.8 | 9.9975559 |
| 24 » | » 33 26.9 | » 33 48.0 | + 21.1 | » » 40.4 | » » 55.7 | + 15.3 | 1.2984415 | $1^s$ 0 47 49.8 | 9.9973139 |
| 28 » | » 35 21.7 | » 35 49.8 | + 28.1 | » » 31.9 | » » 49.0 | + 17.1 | 1.2984519 | $1^s$ 4 46 51.9 | 9.9968401 |
| 31 » | » 37 30.8 | » 37 53.2 | + 22.4 | » » 30.7 | » » 43.9 | + 13.2 | 1.2984594 | 7 46 27.3 | 9.9964980 |
| 3 Novembre | » 40 0.8 | » 40 24.2 | + 23.4 | » » 21.9 | » » 38.8 | + 16.9 | 1.2984670 | 10 46 17.8 | 9.9961699 |
| 4 » | » 40 52.0 | » 41 19.6 | + 27.6 | » » 22.2 | » » 37.1 | + 14.9 | 1.2984697 | 11 46 19.5 | 9.9960637 |
| 7 » | » 43 58.3 | » 44 25.5 | + 27.2 | » » 20.4 | » » 32.0 | + 11.6 | 1.2984771 | 14 46 35.0 | 9.9957536 |
| 8 » | » 45 5.1 | » 45 33.8 | + 28.7 | » » 17.0 | » » 30.4 | + 13.4 | 1.2984797 | 15 46 43.0 | 9.9956530 |
| | | Moyenne = | + 25.1 | | Moyenne = | + 14.5 | | | |

La quadrature d'Uranus tirée de *Berliner Astron. Jahrbuch für* 1830 corrigé des erreurs, eut lieu à Wilna en 1830 le 30 Octobre n. s. à $2^h$ 4′ 48″.1 t. m. astron.

| | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| Lors de la quadr. | Longitude géoc. d'Uranus . . | = | $10^s$ | 7° | 47′ | 15″.24 |
| | Celle de la Terre . . . . . . | = | 1 | 7 | 47 | 15.24 |
| | Latitude géoc. austr. d'Uranus | = | | 0 | 38 | 31.4 |

*Occulations observées en 1829 et 1830 n. s.*

| | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 1829 | 17 Mars | Immersion de *Π du Lion*, sous le bord obscur de la Lune . | à | $7^h$ | 45′ | 30″.8 | t. m. astron. | bonne. |
| | 19 Juin | Emersion du premier satellite de Jupiter . . . . . . . | à | 13 | 0 | 35.7 | " | dout. |
| | 5 Juillet | Emersion du premier satellite de Jupiter . . . . . . . . | à | 10 | 17 | 38.9 | " | bonne. |
| | 9 Decembr. | Immersion *d'Aldebaran* sous le bord obscur de la Lune . . | à | 7 | 37 | 58.6 | " | bonne. |
| | " " | Emersion *d'Aldébaran* . . . . . . . . . . . . . . . . | à | 8 | 43 | 16.9 | " | bonne. |
| 1830 | 6 Juin | Immersion du premier satellite de Jupiter . . . . . . . | à | 14 | 29 | 17.6 | " | bonne. |
| | 25 Juin | Immersion de σ′ *Sextantis* — 6 sous le bord obscur de la Lune | à | 9 | 54 | 28.2 | " | bonne. |
| | 17 Septem. | Emersion du premier satellite de Jupiter . . . . . . . . | à | 8 | 32 | 12.6 | " | bonne. |
| | 27 " | Immersion de (194) *Capric.* — 7 sous le bord obscur de la Lune | à | 10 | 48 | 20.7 | " | passable. |
| | 30 " | Immersion de (1596) *Aquarii* — 7 sous le bord obscur de la Lune | à | 9 | 18 | 47.9 | " | bonne. |
| | 29 " | Immersion de γ *Tauri* — 3.4 sous le bord obscur de la Lune | à | 8 | 37 | 53.3 | " | bonne. |

*Extrait des Observations météorologiques faites pendant les années* 1829 *et* 1830 *à l'Observatoire de Wilna, à* 375.6 *pieds de Paris au-dessus du niveau de la mer.*

| Année 1829 nouveau style. | Baromètre[1]). maximum | | minimum | | moyenne | Thermomètre[2]). maximum | | minimum | | moyenne | Vent dominant. |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| Janvier | 28^p 5^l.4 | le 14 | 27^p 5^l.9 | le 31 | 27^p 11^l.48 | 0^d | le 28 | — 22^d | le 22 | — 8^d.36 | Sud. |
| Février | 28 4.0 | le 11 | 27 2.0 | le 18 | » 8.61 | + 4 | le 23 | — 23.2 | le 13 | — 6.26 | Est. |
| Mars | 28 3.4 | le 1 | 26 11.6 | le 10 | » 7.51 | + 3.5 | le 31 | — 14.5 | le 18 | — 3.19 | Ouest. |
| Avril | 27 10.4 | le 4 | 26 10.2 | le 2 | » 5.89 | + 12 | le 21 | — 3.2 | le 4 | + 3.87 | Ouest. |
| Mai | 28 0.9 | le 23 | 27 0.8 | le 1 | » 8.75 | + 12 | le 29 | + 1.2 | le 4 | + 9.51 | Ouest. |
| Juin | 27 11.9 | le 9 | 26 11.3 | le 3 | » 7.98 | + 26 | le 30 | + 1 | le 2 | + 13.62 | Ouest. |
| Juillet | 27 11.0 | le 15 | 27 4.6 | le 6 | » 8.26 | + 24.5 | le 28 | + 10.2 | le 8 | + 16.80 | Ouest et Sud. |
| Août | 27 11.4 | le 27 | 27 4.3 | le 20 | » 9.05 | + 21.5 | le 15 | + 8 | le 9 | + 14.82 | Sud et Ouest. |
| Septembre | 28 2.5 | le 30 | 27 5.5 | le 15 | » 8.73 | + 21 | le 1 | + 5 | le 28 | + 12.82 | Sud. |
| Octobre | 28 3.0 | le 20 | 26 4.1 | le 8 | » 8.16 | + 13.2 | le 6 | — 5 | le 24 | + 4.20 | Sud. |
| Novembre | 28 2.0 | le 26 | 27 2.0 | le 1 | » 8.39 | + 4 | le 6. 8 | — 11 | le 26 | — 1.78 | Sud et Ouest. |
| Décembre. | 28 8.3 | le 6 | 27 7.4 | le 18 | 28 1.49 | + 0.7 | le 15 | — 20 | le 26 | — 8.51 | Sud et Ouest. |

Maximum, Minimum, Moyenne de l'année:

- Maximum: 28^p 8^l.3 le 6 Décembre à 9^h du soir. | + 26^d le 30 Juin à 2^h du soir.
- Minimum: 26. 4.1 le 8 Octobre à 2^h du soir | — 23.2 le 13 Février à 7^h du matin.
- Moyenne: 27. 8.86 | + 3.96

Vent dominant Ouest et Sud.

1) Sa division est en pouces et lignes du pied de Paris.
2) Divisé selon l'echelle de Réaumur.

| Année 1830 nouveau style. | Baromètre. | | | Thermomètre. | | | Vent dominant. |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | maximum | minimum | moyenne | maximum | minimum | moyenne | |
| Janvier | $28^p$ $7^l.2$ le 23 | $27^p$ $1^l.8$ le 11 | $27^p$ $10^l.35$ | + $1^d$ le 15 | — $22^d.2$ le 24 | — $7^d.93$ | Est |
| Février | » 2.3 le 13 | 26 10.5 le 18 | » 7.51 | + 2.5 le 27 | — 21.7 le 3 | — 5.62 | Sud et Ouest. |
| Mars | » 4.1 le 3 | 27 1.9 le 13 | » 9.27 | + 9 le 30 | — 16 le 3 | + 0.45 | Ouest. |
| Avril | » 1.0 le 29 | » 3.7 le 7 | » 8.19 | + 13 le 25 | — 2.3 le 6 | + 5.93 | Sud et Ouest. |
| Mai | » 1.1 le 5 | » 4.2 le 27 | » 8.91 | + 18.5 le 26 | 0 le 10 | + 9.46 | Sud et Ouest. |
| Juin | » 0.9 le 1 | » 3.8 le 15 | » 8.66 | + 22 le 7 | + 6 7 le 26 | + 13.98 | Sud et Ouest. |
| Juillet | » 2.2 le 27 | » 3.9 le 4.5 | » 9.20 | + 23.8 le 18 | + 8 le 8 | + 14.86 | Ouest. |
| Août | » 0.5 le 5 | » 5.3 le 19 | » 8.50 | + 25 le 6. 16. 17 | + 7.8 le 31 | + 15.96 | Sud et Ouest. |
| Septembre | » 3.7 le 27 | » 4.1 le 5 | » 9.17 | + 16 le 26 | + 2.5 le 18 | + 10.40 | Sud. |
| Octobre | » 1.1 le 3 | 26 10.3 le 29 | » 9.59 | + 13.7 le 1 | — 1.7 le 17 | + 5.93 | Sud et Ouest. |
| Novembre | » 3.4 le 25 | » 10.9 le 2 | » 10.81 | + 7.4 le 12 | — 4.5 le 30 | + 2.76 | Sud. |
| Décembre. | » 3.8 le 16 | 27 1.6 le 24 | » 7.29 | + 4.6 le 27 | — 6.7 le 4 | — 0.69 | Sud. |

Maximum ⎫ de l'année $28^p$ $7^l.2$ le 23 Janvier à midi | + 25 le 6. 16. 17 Août à $2^h$ du soir.
Minimum ⎬ de l'année 26 10.3 le 29 Octobre à $9^h$ du soir | — 22.2 le 24 Janvier à $7\frac{3}{4}^h$ du matin.
Moyenne ⎭ de l'année 27. 8.88. | + 5.46.

Vent dominant Sud et Ouest.

---

*Avis.* La difficulté d'observer une certaine périodicité dans la publication des livraisons de ces Mémoires et du Bulletin scientifique qui y est joint, ne permet plus d'y faire entrer le BULLETIN DES SÉANCES de l'Académie. Comme d'ailleurs nous aurons bientôt un journal scientifique, destiné proprement à répandre à l'étranger des connaissances plus exactes sur l'état de la littérature en Russie — nous parlons des *Annales littéraires de Dorpat*, — l'Académie n'a point hésité d'accepter l'offre du bureau de rédaction de ce journal qui a bien voulu se charger de la publication régulière des bulletins de ses séances.

# № 5.

# BULLETIN SCIENTIFIQUE.

## *Fr. Goebel's Experimentirtisch.*

(Gelesen d. 27. Februar 1833.)

Wenn ich mir erlaube, eine kurze Beschreibung von einem Theile meines Experimentir-Apparates der Oeffentlichkeit zu übergeben, so glaube ich damit jungen Chemikern und vielleicht auch solchen, die gewohnt sind, mit kleinen Quantitäten pneumatisch und pyrochemisch zu experimentiren, und sich dabei mit einem beschränkten Raume begnügen müssen, einen nicht unwillkommenen Dienst zu erzeigen.

Mein Experimentirtisch ist hinreichend gross zu fast allen wissenschaftlich-chemischen Uebungen, vorausgesetzt, dass diese nicht in einem zu grossen Maassstabe ausgeführt werden sollen; er kann in jedem Prunkzimmer aufgestellt werden und enthält die zu chemischen Forschungen nothwendigsten Reagentien und Geräthschaften. Seine Einrichtung gestattet nicht nur ein reinliches und bequemes, sondern auch ein rasches, fast ununterbrochenes Arbeiten, indem der Experimentator, auf einem beweglichen Stuhle sitzend, alles zur Erforschung unbekannter Körper Erforderliche augenblicklich zur Hand hat und benutzen kann.

Ueber der Experimentirplatte befindet sich ein, mittelst einer Rolle an der Zimmerdecke, auf und nieder zu lassender und mit dem Stubenofen in Verbindung stehender Dampfableiter von lakirtem Blech. (Ist bei der Zeichnung weggelassen worden, da er jedem Chemiker aus Berzelius Lehrbuch der Chemie hinlänglich bekannt ist).

Da der Experimentirraum aus einem, statt des Amalgams, auf der untern Fläche weiss angestrichenen, geschliffenen, einen halben Zoll dicken Spiegelglase besteht, und an den Seiten mit einem Rand umgeben ist: so geht beim Arbeiten mit Quecksilber und andern Flüssigkeiten, das darauf Verschüttete nicht

verlohren, beschmutzt den übrigen Theil des Tisches und den Arbeiter nicht, und kann durch einen Ausfluss an der vordern Seite, leicht wieder entfernt werden.

Den Werth des reinlichen und bequemen Arbeitens auf einer Glasfläche, so wie die Möglichkeit, bei Forschungen durch die Nähe aller dazu erforderlichen Materialien, ohne Unterbrechung fortarbeiten zu können, wissen gewiss alle diejenigen zu schätzen, die mit ihrer Zeit zu geizen und daher jedes zeitraubende Umherlaufen zu vermeiden suchen.

Der ausserhalb der Experimentirplatte befindliche Tischraum kann beliebig benutzt werden.

Das an der Seite befindliche auf- und abzuschraubende Messingstativ enthält eine mit einem zirkelförmigen Dochte versehene Weingeistlampe, und ist nicht nur an den Armen mit Ringen von verschiedener Grösse, sondern auch mit Röhrenhaltern versehen, um Röhren in jeder beliebigen Richtung bei pyrochemischen und hydrargyro-pneumatischen Arbeiten aufzunehmen und festzuhalten, wie diess ja jedem Experimentator hinlänglich bekannt ist.

Zu Quecksilberwannen benutze ich eine Garnitur Schalen von Krystallglas mit und ohne Füsse, mit und ohne Untersätze, wie sie eben die Art des Experiments erfordert.

Zu pneumatisch wissenschaftlichen Untersuchungen dienen ein Dutzend genau graduirte Glasröhren von 6 Rheinländischen d. d. Kubikzollen bis zu 0, 1 Kz. Inhaltsraum.

Die Fig. *I.* und *II.* geben perspectivische Ansichten des aus polirtem Holze gefertigten Experimentirtisches, und zwar die Fig. *I.* mit offenem Experimentirraume, die Fig. *II.* aber mit durch eine Kapsel bedecktem.

Fig. *III.* zeigt die obere Tischfläche im Aufriss. Auf dieser bezeichnet:

*a*) den Experimentirraum, der wie schon erwähnt, aus einer ½ Zoll dicken, geschliffenen, auf der untern Fläche weiss angestrichenen Glasplatte besteht. Diese Glasplatte ist von allen Seiten mit einem ½ Zoll hohen hölzernen Rande umgeben, wodurch beim Verschütten von Flüssigkeiten u. s. w, diese stets auf der Platte zurückgehalten werden und bei

*b*) wo sich eine 1¼ Zoll breite Oeffnung befindet, abgelassen werden können. Diese Oeffnung wird durch eine an der einen Seite mit einem Scharnier versehene, an der andern aber eingefalzte Holzscheibe verschlossen, welche, wenn sie geschlossen ist, mit dem Rande des Experimentirtisches ein Continuum bildet. Der Experimentirraum ist 2 Fuss 4½ Zoll breit und 1 Fuss 9½ Zoll tief.

Unmittelbar hinter dem Rande befinden sich 32 Stück Reagensgläser. Sie sind in den Tischraum eingesenkt, ragen nur mit den Hälsen hervor, haben gut eingeschmirgelte, oben flach geschliffene Stöpsel und tragen ihre Signaturen auf der mit Chromgelb angestrichenen und lackirten obern Fläche der Stöpsel in schwarzer Schrift.

Um Verwechselung der Glasstöpsel zu verhindern, enthält jeder eine Nummer, die mit der Nummer des Glases, zu welchem er gehört, correspondirt. Auf der untern Seite sind diese Glasstöpsel ebenfalls abgeschliffen, so dass sie beim Abnehmen bequem gestellt werden können.

Die Fig. *V.* zeigt ein solches Glas, ohngefähr von zwei Drittheilen der natürlichen Grösse. Die Gläser sind von weissem Krystallglase, viereckig, auf zwei Seiten schmal, auf zwei Seiten breiter, haben abgeschliffene Böden und fassen ohngefähr anderthalb Unzen Flüssigkeit. Die Fig. *VI.* zeigt die Tiefe der Einsenkung der Reagensgläser.

Diese Reagenssammlung beginnt zur linken Hand mit den Säuren, geht zu den Salzen, dann zu den mehr indifferenten Auflösungen über und schliesst rechts, mit dem chemischen Gegensatze der Säuren, mit den Alkalien.

Hinter der Reagenssammlung befindet sich eine Reihe Probirgläser von verschiedener Grösse von 2 Unzen bis zu 2 Drachmen Inhaltsraum. Kleinere von verschiedener Grösse aus Glasröhrchen geblasen, werden besonders in einem der Kästen des Tisches aufbewahrt. Die erwähnten Probirgläser sind ebenfalls eingesenkt, so dass sie nur mit ihrem Rande hervorragen. Beim Nichtgebrauch sind sie mit einer Kapsel bedeckt, deren obere Fläche in unten schwarz angestrichenem Glase besteht und die zugleich zum Aufstellen der Gläser dient, wenn in irgend einem das Resultat eines Versuchs weiter beobachtet werden soll S. die Fig. *VII.* Diese Kapsel besteht aus drei an einander schliessenden Stücken, um immer nur eine beliebige Anzahl Probiergläser zur Benutzung bloszustellen, die übrigen aber, welche gerade nicht gebraucht werden, gegen Staub u. s. w. zu schützen.

Zur linken Seite ist bei *c.* eine Karaffe mit destillirtem Wasser eingesenkt; bei *d.* liegt die Schraubenmutter zum Messingstative; bei *e.* befindet sich ein Spitzglas: bei *n.* ein kleines Phosphorfeuerzeug und neben diesem zwei kleine Gläser, von welchen das eine Schwefelhölzchen enthält, das andere aber zur Hälfte mit Sand gefüllt ist, um die gebrauchten Schwefelhölzchen darin zu verlöschen.

Zur rechten Seite befindet sich bei *h.* ein becherförmiges Glas von ohngefähr einem Maass Inhaltsraum eingesenkt, als Spühlnapf dienend, um gebrauchte Flüssigkeiten u. s. w. hineinzubringen. Bei *i.* ist eine ziemlich grosse brillantirte mit Glaskapsel versehene Weingeistlampe eingesenkt; bei *k.* eine kleinere: *l.* ist ein ebenfalls im Tischraum eingesenktes Schreibzeug, welches mit einer Platte bedeckt werden kann, so dass die Tischfläche beim Nichtgebrauch des Schreibzeugs dadurch nicht unterbrochen wird. *m. m.* sind zwei Tischklappen, die beliebig auf- und niedergelassen werden können, die eine zur rechten Hand, enthält gewöhnlich eine Lage Papier zur Anmerkung der bei den Versuchen erhaltenen Resultate; die Linke ist bestimmt, gebrauchte, zu reinigende, oder sonst nicht mehr zu beachtende Geräthschaften u. s. w. aufzunehmen.

Der übrige Tischraum ist entweder versehen mit einer pneumatischen Glaswanne, einigen Büchern, den zu verarbeitenden Materialien u. s. w., oder er dient auch bei etwa zu gebenden Privatvorträgen zum Auflegen der Hefte der Zuhörer, von welchen bequem 3 bis 6 am Tische Platz haben und, ohne dass sie den Lehrer hindern, oder von ihm behindert werden, gleichgut alle Experimente wahrnehmen können.

An der vorderen Seite des Tisches befinden sich 9 zu verschliessende Kästen folgenden Inhalts. (S. Fig. *I.*)

N°. 1. ist in der Mitte mit einem Schied versehen, enthält in der vordern Abtheilung kleine mit Füssen versehene, aus Glasröhren an der Lampe gefertigte Probirgläser und Glastrichterchen und in der zweiten Abtheilung aus schwedischem Fliesspapier gefertigte Filter. Ich halte gewöhnlich 4 — 6 Dutzend dieser kleinen Filter in mehren Paquetchen, wo jedes mit einem Papierstreifen umgeben und verlackt ist, vorräthig; sie nehmen auf diese Weise einen nur kleinen Raum ein und sind beim Gebrauch sogleich zur Hand.

N°. 2. enthält in der ersten Abtheilung kleine Röhrenkölbchen von verschiedener Grösse, theils zu Gasentbindungen, theils zum Auflösen, Kochen u. s. w. bestimmt. In der zweiten Abtheilung befinden sich Porzellanschälchen, Uhrgläser, ein Agatmörser und eine kleine gläserne Reibschale.

N°. 3. enthält Pincetten, Spätel, Schälchen, Tiegel, Drath u. s. w. von Platin, Gold und Silber; Hammer, Ambos, Drathkörbchen, Feilen u. dergl. metallische und pyrochemische Geräthschaften mehr.

N°. 4. ist mit vier Abtheilungen versehen. Die erste Abtheilung, welche sich vorn, längs des ganzen Kastens befindet, enthält Loupen, Diamantfeder, Scheere, Papier- Feder- und Korkmesser; eben so einen kleinen Vorrath von Korkstöpseln; auch ist diese Abtheilung bestimmt zur Aufnahme des Stativs, wenn der Experimentirraum verschlossen werden soll. Die zweite Abtheilung enthält Fliess- und Schreibpapier; die dritte, kleine Papierblätter zu Notizen; und die vierte endlich, ist zur vorläufigen Aufbewahrung von kleinen Löthrohrproben, Präcipitaten u. s. w. die noch fernerweit geprüft werden sollen, bestimmt.

N°. 5. enthält graduirte Glasröhrchen, Glasheber, Retörtchen, Kugelröhren, Gasentbindungsröhren, mehrere Kölbchen- und Röhrenapparate zur Entbindung von Sauerstoff- Wasserstoff- Kohlensäure- Amoniak- und Schwefelwasserstofgas.

N°. 6. ist zur Aufnahme von Manuscripten und Notizen bestimmt.

N°. 7. enthält in der vordern Abtheilung gläserne, an der Lampe an beiden Enden rundgeschmolzene Rühr- und Reagensstäbchen; in der zweiten Ahtheilung pyrochemische Glasröhren von verschiedener Grösse.

N°. 8. In der vordern Abtheilung liegen Probirtafeln (Reagenstafeln) von weissem Spiegelglase*); in der hintern Reactionspapiere.

N°. 9. enthält in der vordern Abtheilung sechs kleine mit weiten Mündungen und Glasstöpseln versehene Krystallfläschchen, mit chlorsaurem Kali, kohlensäuerlichem Natron, ameisensaurem Natron, Schwefeleisen, Aetzkali und Borax. In der hintern befindet sich in einer Blechkapsel Kohle zu Löthrohrversuchen, ferner zu gleichem Behuf, Platinblech, Drath u. s. w. und das Löthrohr selbst.

Der ganze Experimentirraum kann beim Nichtgebrauch, nebst Reagentien und andern Gläsern, durch eine elegante Kapsel, welche mit Schliesshaken und Schloss versehen ist, bedeckt werden. Diese Kapsel ist bis auf einen $2\frac{1}{2}$ Zoll breiten Rand mit grünem Leder überzogen und dient, da sie pultähnlich, hinten höher, vorn niedriger ist, zugleich zum Schreibtisch. Fig. *II.* liefert eine perspektivische Ansicht, des mit der Kapsel bedeckten Tisches und herabgelassenen Seitenklappen.

Diess ist der Experimentirtisch, bei dessen Einrichtung mich Erfahrung und Gewohnheit mit kleinen Quantitäten zu arbeiten, leiteten. Ich gebrauche ihn nicht nur bei meinen wissenschaftlichen Untersuchungen, sondern auch beim Privatunterrichte junger Chemiker und werde durch denselben in den Stand gesetzt, die zu wissenschaftlichen Versuchen bestimmten Instrumente und Reagentien nicht nur beisammen, sondern auch unter Verschluss zu halten, und nicht in die Hände Ungeweihter kommen zu lassen.

Die nähern Bestimmungen der Dimensionen des Tisches sind nachstehende nach dem Rheinländischen Fuss:

| | |
|---|---|
| Die Länge des Tisches mit aufgeschlagenen Klappen beträgt . . | 5′ $4\frac{1}{2}$″ |
| Die Länge des Tisches ohne Klappen . . . . . . . . . . | 3′ $10\frac{1}{2}$″ |
| Die Breite der Tischklappen . . . . . . . . . . . . . . | 8″ |
| Die Breite der Tischplatte . . . . . . . . . . . . . . . | 3′ $5\frac{3}{4}$″ |
| Die Höhe des Tisches . . . . . . . . . . . . . . . . | 2′ $5\frac{3}{4}$″ |
| Die Länge der Glasplatte . . . . . . . . . . . . . . . | 2′ $4\frac{1}{2}$″ |
| Die Breite der Glasplatte . . . . . . . . . . . . . . . | 1′ $9\frac{1}{2}$″ |
| Die Breite des Vorstosses zum Einsenken der Reagensgläser . . | 4″ |
| Die Länge der Löcher zum Einsenken der Reagensgläser . . | 1″ $4\frac{1}{2}$‴ |
| Die Breite derselben . . . . . . . . . . . . . . . . . | 1″ |
| Durchmesser der Löcher zum Einsenken der grössern Probirgläser | 1″ 4‴ |
| Durchmesser der Löcher für die grössere Lampe, den Spühlnapf und die Wasserflasche . . . . . . . . . . | 3″ |

*) Bei qualitativen Untersuchungen stelle ich die Reactionsversuche gewöhnlich nur mit Tropfen der zu prüfenden, aufgelösten Substanz auf Glastafeln mit Glasstäbchen an. Es gewährt diese Art zu experimentiren, wenn man sich daran gewöhnt hat, eine grosse Zeitersparniss und Genauigkeit.

| | | | |
|---|---|---|---|
| Die Länge des Schreibzeugs . . . . . . . . . . . . | | 6″ | |
| Die Breite des Schreibzeugs beträgt . . . . . . . . . | | $3\frac{1}{2}$″ | |
| Die Entfernung des Schreibzeugs vom vordern Rande des Tisches | 1′ | $7\frac{1}{2}$″ | |
| Die Breite der Seitenschiebladen . . . . . . . . . . . | | 4″ | 5‴ |
| Die Höhe derselben . . . . . . . . . . . . . . . . | | 2″ | |
| Die Tiefe derselben . . . . . . . . . . . . . . . . | 1′ | 2″ | |
| Der Rand des Vorstosses der Reagensgläser ragt über die Glastafel um 5‴ hervor. | | | |
| Die Höhe der Füsse des Tisches . . . . . . . . . . . | 2′ | $5\frac{3}{4}$″ | |
| Der Rand des Schreibpults . . . . . . . . . . . . | | $2\frac{1}{2}$″ | |

---

### *Anleitung die Barometer vollkommen Luft- und Dampffrei zu erhalten; von Hrn. Professor Marx in Braunschweig.*

(Mitgetheilt von Hrn. *Kupffer* d. 6. März 1833.)

1) Schon bei dem Ausziehen der Röhren auf der Glashütte muss man darauf bedacht sein, dass die durch das Blasen hineingebrachte Feuchtigkeit sogleich wieder herausgeschafft werde. Dieses geschieht indem man die Luft mit dem Munde auszieht oder noch besser, wenn man vermittelst eines Blasebalgs einen Strom trockner Luft hindurchtreibt. Sodann sind die Röhren an beiden Enden genau zu verschliessen und möglichst bald zu verarbeiten. Auch ein kleiner Antheil Feuchtigkeit setzt sich mit der Zeit fest in die Röhre und greift die Oberfläche so an, dass späterhin keine Erhitzung sie wieder vertreiben kann.

2) Die an einem Ende zugeschmolzene Röhre wird mit Quecksilber grösteutheils gefüllt, dann von unten eine Luftblase hineingelassen, welche die an den Seitenwänden sitzenden kleinen Luftbläschen in sich aufnimmt und beim Umdrehen der Röhre wieder als eine grössere Blase heraustritt.

3) An die Röhre wird dann vorn ein kleines Gefäss angesetzt, etwa von folgender Form

4) Dann wird sie, unter beständigen Umdrehen über glühenden Kohlen erwärmt. Diese liegen in einem V förmig gebogenen, unten mit einem schmalen Einschnitt versehenen, etwa $\frac{1}{2}$ Fuss hohen und $1\frac{1}{2}$ Fuss langen Eisenblech, das vorn mit einer Wand geschlossen ist; in dieser befindet sich ein Ausschnitt, um die Röhre durchzustecken und ein kleiner eiserner Halter, worauf sie beim Fortschieben ruht. Die ganze Röhre werde nach und nach, aber nicht bis zum Kochen des Quecksilbers erwärmt.

5) Bei dem Erwärmen trennen sich die sonst fest an dem Quecksilber und der Röhre haftenden Luft- und Dunst-Bläschen; man lässt sie durch gehöriges Steigen der Röhre allmählig an einander zu grösseren Blasen und endlich heraustreten.

6) Nun erst wird die Röhre ausgekocht, von dem geschlossenen Ende an, und zwar vorsichtig so, dass sie nicht eher weiter geschoben und ein neues Stück zum Kochen gebracht wird, als bis auch das kleinste Bläschen von unten her sich hinaufwärts begeben hat. Diese Operation dauert lange, ist aber unerlässlich; denn so wie man ohne die früheren Blasen fortgeschafft zu haben weiter kocht, so kann man jene bei nachherigem Erhitzen kaum mehr wegbringen. Auch muss man sich hüten das Quecksilber zu stark aufwallen zu lassen, weil es sonst, in die Höhe fahrend die entfernten Bläschen wieder herabreisst. Das bei dem Kochen etwa 1 Zoll hoch hervorgetriebene Metall sammelt sich in dem angeschmelzten Gefässe.

7) Wenn die Röhre kalt geworden, wird sie, mit Quecksilber ganz angefüllt, in solchem umgekehrt. Die noch immer vorhandenen kleinen Bläschen sammeln sich, steigen hinauf und können bei der nachfolgenden Behandlung als Eine grössere Blase leichter entfernt werden.

8) Nun wird das Gefäss an seinem offenen Ende zu einer langen, noch immer offenen Spitze ausgezogen; dann das Quecksilber in dem zur Hälfte damit gefüllten Gefäss zum Sieden gebracht und nachdem mit dessen Dämpfen alle Luft ausgetrieben worden, die Spitze schnell zugeschmelzt.

9) Das Auskochen wird nun nochmal, gerade wie bei N°. 6 vorgenommen. Da jetzt der Luftdruck auf das Quecksilber von aussen aufgehoben ist, so siedet es schneller, die noch verhandenen Luft- und Dampf-Bläschen entwickeln sich leichter, und nehmen bei ihrem Aufsteigen ein weit grösseres Volumen ein. Bei ihrem Anblicke muss man sich wundern, dass noch viele davon da, wo keine Spur mehr vorhanden zu sein schien, hervorkommen. Sie werden auf dieselbe Art wie früher fortgeschafft. Mit ihrer Entwickelung ist nun ein heftiges in die Höhe schleudern des Quecksilbers verbunden, was leicht die Röhre zerschlägt, wenn man nicht bei dem Erhitzen, Halten und Wenden der Röhre vorsichtig verfährt. Wenn die Röhre nicht sehr stark von Glase ist, so möchte es gerathen sein nur $\frac{2}{3}$ ihrer Länge auf diese Art auszukochen, dann die Spitze abzubrechen und das letzte $\frac{1}{3}$ (wo jenes Heraufwerfen, wegen des geringen Quecksilberdrucks, am stärksten sein würde) noch bei offener Röhre auszukochen. Deshalb ist es auch zweckmässig bei Heberbarometern ein ähnliches Gefäss, als oben angegeben, anzuschmelzen, damit das heraufgetriebene Quecksilber sich darinnen ausbreite. Ausserdem würde es schon hinreichend sein, den kürzern Schenkel in eine Spitze auszuziehen, luftleer zu machen, und dann wie bisher gezeigt, weiter damit zu verfahren.

10) Wenn eine auf diese Art ausgekochte Röhre vorsichtig umgekehrt wird, so sinkt das Queksilber nicht sogleich herab sondern haftet fest am Glase, mit dem es Eine blanke spiegelnde Fläche zu bilden scheint. Nur nach einigem Anklopfen fällt es herab, aber hier geschieht es zuweilen, dass es, wenn es von der Glaskuppe sich losgetrennt und etwas gesunken, wiederum plötzlich von selbst hinaufgezogen und festgehalten wird. Auch tritt das Festhängen später so oft ein, als man es wieder oben anschlagen lässt. Die Oberfläche desselben zeigt nur eine schwache Convexität, die bei weiteren Röhren sich fast in das Ebene verliert.

## № 6.

# BULLETIN SCIENTIFIQUE.

*Sur le traitement métallurgique de l'argent tellure de Kolyvan*, par M. *Hess*.

(Lu le 24. mai 1833.)

On avait trouvé aux mines de Kolyvan un minérai d'argent fort riche qui fut pris pour du sulfure d'argent. Lorsqu'en 1828, quelques échantillons de ce minérai parvinrent à St.-Pétersbourg, M. Kaemmerer remarqua tout de suite que ce n'était point du sulfure d'argent, mais devait, à en juger d'après les caractères extérieurs, former une espèce particulière. Il me consulta à ce sujet, mais je négligeai alors d'en faire l'analyse. C'est à M. G. Rose que nous devons la connaissance plus particulière de la composition de ce minérai. Au retour de son voyage en Sibérie, il le soumit à une analyse détaillée qui nous enrichit de deux espèces minéralogiques particulières, savoir du tellurure d'argent et du tellurure de plomb.

Les échantillons de minérai que possédait M. Rose ne donnaient aucun indice sur la cristallisation du tellurure d'argent. M. Sobolevski m'en donna l'hiver dernier un morceau qui contenait beaucoup de petits cristaux à sa surface. La plupart d'entr'eux étaient des pyrites. Traités au chalumeau ils répandent une forte odeur de sélénium. Deux autres cristaux plus distincts, furent reconnus à leur malléabilité, pour être du tellurure d'argent. La forme de ces cristaux est rhomboédrique, à angles obtus, en sorte qu'ils ne diffèrent que peu du cube, cependant assez pour être reconnus à la vue simple. La surface de ces cristaux est terne, leur côté mesure à peu près trois millimètres.

M. Kaemmerer, s'étant procuré une partie du minérai qui avait échappé au traitement par le haut fourneau, le prix éléve du tellure lui fit désirer de connaître une méthode facile pour opérer le départ de l'argent et du tellure. Je ne donnerai point ici la description de tous les essais que j'ai faits, mais simple-

ment la méthode que je trouve la plus commode, et telle que je l'ai pratiquée le mois de mars passé et que je l'ai communiquée à M. Kaemmerer.*)

Le procédé tel que je lai employé se divise en trois opérations:

I. Le minérai est réduit au plus petit grain, autant que le permet sa malléabilité. On fait fondre du carbonate de potasse dans un creuset réfractaire, et puis on y introduit par petites portions une quantité du minérai égale à la quantité de potasse employée. Quand le creuset se trouve rempli, on donne un coup de feu, et on laisse refroidir le tout. On casse ensuite le creuset pour retirer la masse solidifiée. Si l'on veut épargner le creuset, il faut après le premier coup de feu retirer au moyen d'une cuillère en fer, la moitié du contenu du creuset. On ajoute ensuite, d'abord de la potasse (bien sèche), ensuite du minérai en raison de la quantité de potasse, et l'on continue ainsi. Je crois cependant que pour le moment, il vaut mieux ne pas recharger le même creuset, car s'il venait à crever, le haut prix du tellure rendrait la perte très considérable.

Le but de cette première opération est d'obtenir une matte-crue. En effet, on trouve tout le tellurure d'argent déposé au fond du creuset. Une petite partie cependant est décomposée, de façon que l'on trouve toujours au fond du creuset un petit régule d'argent. Le tellure qui était combiné avec cet argent se retrouve dans la masse saline. Si on veut l'extraire en entier, on pourra procéder comme il sera dit plus bas pour l'extraction du tellure; mais en général, si l'on a beaucoup de minérai à traiter, cela n'en vaut guère la peine.

La quantité de la matte-crue obtenue a été de 9 onces par livre ou de 0,75 du minérai. Le tellurure d'argent qui s'est rassemblé au fond du creuset, se cristallise par le refroidissement et ressemble alors beaucoup au sulfure d'antimoine natif. Il est gris de couleur et toute la masse se trouve composée de cristaux en forme d'aiguilles. Il est malléable comme à l'état naturel.

II. Le tellurure d'argent ainsi dégagé de la gangue, est réduit en petits grains. On fait fondre de la potasse comme pour la première opération, et on y introduit ensuite le tellurure d'argent par petites portions avec addition de salpètre. Une seconde addition de ce mélange ne se fait que quand toute effervescence produite par la première cesse; on continue jusqu'à ce que le creuset soit plein, et l'on termine par un coup de feu. Le creuset étant refroidi, on le casse. Tout l'argent se trouve au fond rassemblé en un

*) J'ai lu dans le journal de M. Schweigger-Seidel la traduction d'une analyse du tellurisel de Nagiag par M. Berthier, le cahier des Annales de chimie qui contient l'original ne m'étant pas encore parvenu. M. Berthier est arrivé à peu près au même résultat que moi, opérant sur une plus petite échelle.

culot; il est tout à fait pur. Le tellure se trouve dans la masse saline à l'état de tellurate potassique. Dans cette opération le tellure en s'oxidant, aux dépens du salpêtre, en chasse l'acide nitreux qui se dégage avec effervescence.

III. La masse saline, contenant le tellurate de potasse est refondue avec addition de charbon. La quantité de charbon doit se diriger d'après la quantité du tellure qu'on sait se trouver dans la masse saline. Il faut toujours en employer moins que la quantité nécessaire pour opérer la réduction totale. On peut ensuite si l'on veut que tout le tellurate soit réduit, projeter un charbon sur la masse fondue. On aura soin de n'introduire le mélange qu'en très petites portions dans un creuset échauffé; et de n'en ajouter une nouvelle quantité que quand toute effervescence aura cessé; car dans cette opération, il se dégage beaucoup d'acide carbonique. La masse ainsi fondue, est un mélange contenant principalement du carbonate potassique et du tellurure de potassium. On la concasse et on la jette dans l'eau avec laquelle elle donne une belle dissolution cramoisie, mais dès que cette dissolution se trouve en contact avec l'air, le potassium est oxidé, et le tellure se précipite à l'état métallique. Cette décomposition est si prompte qu'il n'est pas possible d'obtenir une dissolution pure de tellurure potassique que dans des flacons bien bouchés, mais ni par filtration ni par décantation, vu qu'elle devient instantanément trouble par le tellure qui se précipite. Pour accélérer cette décomposition, il est bien d'exposer la dissolution dans de grands vases plats où elle puisse présenter une grande surface au contact de l'air.

Lorsque la dissolution est complètement décomposée, elle devient incolore. On décante ensuite la liqueur, on filtre à travers du papier double, et on lave à l'eau.

Le tellure ainsi obtenu est pur si on le lave encore avec de l'acide hydrochlorique faible. On le sèche ensuite. Il se trouve à l'état pulvérulent et il faut le fondre pour l'obtenir en culot.

Dans l'essai que j'ai fait, j'ai traité quatre livre du minérai par la méthode indiquée.

## *Calcul du passage de Mercure observé à St.-Petersbourg le 5 mai 1832, par M. Tarkhanoff.*

Lu le 24. mai 1833.

Les passages des planètes inférieures devant le soleil sont très importants, tant par rapport aux éléments des orbites des planètes, que pour la théorie du système solaire entier. Ils sont relativement aux planètes inférieures ce que sont les oppositions pour les planètes supérieures. Ils procurent l'unique moyen d'observer immédiatement la conjonction, et par conséquent une longitude héliocentrique. D'ailleurs la planète inférieure étant nécessairement près de son noeud, les passages sont très favorables pour déterminer la position de son orbite relativement à l'écliptique. Kepler fut le premier qui s'aperçut de l'importance des passages, et les calcula pour la première fois en 1629. Il annonça pour 1631 des passages de Vénus et de Mercure, dont le dernier fut observé à Paris par Cassendi le 7 novembre, huit jours avant la mort de Kepler.

Le passage de Mercure, en 1832, fut observé ici à l'observatoire de l'Académie par M. l'Académicien Wisniewsky et moi. L'entrée de cette planète sur le disque du soleil devait avoir lieu à environ 11 heures du matin, mais le soleil étant alors couvert de nuages on ne put l'observer. Le tems devint clair à 2 heures après midi, alors Mercure fut visible sur le disque du soleil comme une tache noire, ronde et bien déterminée jusqu'à la sortie, qui arriva d'après les observations de M. Wisniewsky

| | | |
|---|---|---|
| du bord occidental de ☿ à . . . . . . . . . . . | tems moyen solaire | 5^h, 47′, 0″, 30 |
| du bord oriental de ☿ . . . . . . . . . . . . | | 5^h, 50′, 27″, 21 |
| d'après mes observations. | | |
| du bord occidental de ☿ à . . . . . . . . . . . | | 5^h, 47′, 7″, 51 |
| du bord oriental . . . . . . . . . . . . . . . | | 5^h, 50′, 19″, 01 |

*Calcul de la sortie du bord occidental.*

| | |
|---|---|
| tems moyen solaire de la sortie . . . . . . . . . . . | 5^h, 47′, 7″, 51 |
| longitude du soleil sans avoir égard à l'aberration . . . | 45°, 6′, 28″, 56 |
| latitude du soleil . . . . . . . . . . . . . . . . | — 0″, 39 |
| rayon vecteur du ☉ . . . . . . . . . . . . . . . | 0,0040836 |
| demi-diamètre du ☉ . . . . . . . . . . . . . . . | 15′, 53″, 05 |
| longitude héliocentrique de Mercure . . . . . . . . | 225°, 25′, 7″, 04 |
| latitude héliocentrique de ☿ . . . . . . . . . . . | + 0°, 6′, 41″, 56 |
| rayon vecteur de ☿ . . . . . . . . . . . . . . . | 0,4516200 |
| demi-diamètre de Mercure à la distance moyenne de la terre au ☉ | 3″, 3 |

| | |
|---|---|
| demi-diamètre de la terre à la même distance . . . . | 8″, 6 |
| aplatissement de la terre . . . . . . . . . . . . . | $\frac{1}{300}$ |
| latitude corrigée du lieu d'observation . . . . . . . . | 59°, 46′, 34″, 96 |
| longitude géocentrique de ☿ . . . . . . . . . . . | 44°, 51′, 23″, 03 |
| latitude géocentrique de ☿ . . . . . . . . . . . | + 5′, 25″ 43 |
| parallaxe horizontale du ☉ à St.-Pétersbourg . . . . | 8″, 498 |
| parallaxe horizontale de ☿ . . . . . . . . . . . | 15″, 38 |
| ascension droite du milieu du ciel . . . . . . . . . | 130°, 17′, 25″, 705 |
| longitude du Nonagésime . . . . . . . . . . . . . | 115°, 3′, 30″, 6 |
| hauteur . . . . . . . . . . . . . . . . . . | 50°, 13′, 26″, 4 |
| parallaxe de la longitude du ☉ . . . . . . . . . | — 6″, 135 |
| parallaxe de la latitude du ☉ . . . . . . . . . . | — 5″, 437 |
| parallaxe de la longitude de ☿ . . . . . . . . . . | — 11″, 12 |
| parallaxe de la latitude de ☿ . . . . . . . . . . | — 9″, 841 |
| hauteur du soleil . . . . . . . . . . . . . . . | 15°, 17′, 12″, 0 |
| inclinaison du rayon du ☉ vers l'horizon . . . . . | 28′, 23′, 0″ |
| diminution du rayon du ☉ par la réfraction . . . . | — 0″, 91 |
| irradiation . . . . . . . . . . . . . . . . . . | — 3″, 5 |
| distance apparente des centres du ☉ et de ☿ . . . . | 15′, 42″, 7 |
| différence apparente de leurs latitudes . . . . . . . | + 5′ 21″, 43 |
| différence apparente des longitudes . . . . . . . . | 886″, 4 |
| tems moyen de la conjonction . . . . . . . . . . | 1ʰ, 59′, 40″, 61 |
| tems moyen de la conjonction d'après les observations de M. Wisniewsky . . . . | 1ʰ, 59′, 33″, 41 |
| Milieu . . . . | 1ʰ, 59′, 37″, 01 |

*Calcul de la sortie du bord oriental.*

| | |
|---|---|
| tems moyen de l'observation . . . . . . . . . . . | 5ʰ, 50′, 19″, 01 |
| longitude du ☉ . . . . . . . . . . . . . . . . | 45°, 6′, 36″, 86 |
| rayon vecteur du ☉ . . . . . . . . . . . . . . | 0,0040838 |
| latitude du ☉ . . . . . . . . . . . . . . . . | — 0″, 37 |
| longitude héliocentrique de ☿ . . . . . . . . . . | 225°, 25′, 30″, 13 |
| latitude héliocentrique de ☿ . . . . . . . . . . | + 6′, 36″, 86 |
| rayon vecteur de ☿ . . . . . . . . . . . . . . | 0,4516260 |
| longitude géocentrique de ☿ . . . . . . . . . . . | 44°, 51′, 18″, 81 |
| latitude géocentrique . . . . . . . . . . . . . | 5′, 21″, 29 |
| demi-diamètre de ☿ géocentrique . . . . . . . . | 5″, 915 |
| parallaxe horizontale de ☿ . . . . . . . . . . . | 15″, 41 |
| logarithme de la distance de ☿ à la terre . . . . . | 9,7465200 |

| | |
|---|---|
| ascension droite du milieu du ciel . . . . . . . . . . | 13°, 2′, 55″, 53 |
| longitude du Nonagésime . . . . . . . . . . . . . . . | 115°, 31′, 34″, 9 |
| hauteur . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . | 50°, 5′, 42″, 0 |
| parallaxe de la longitude du ☉ . . . . . . . . . . . | — 6″, 135 |
| parallaxe de la latitude du ☉ . . . . . . . . . . . | — 5″, 446 |
| parallaxe de la longitude de ☿ . . . . . . . . . . . | — 11″, 131 |
| parallaxe de la latitude de ☿ . . . . . . . . . . . | — 9″, 859 |
| diminution du rayon du soleil par la réfraction . . . . | — 1″, 19 |
| distance apparente des centres du ☉ et de ☿ . . . . . | 15′, 53″, 655 |
| différence apparente de leurs latitudes . . . . . . . . | 5′, 11″, 43 |
| différence apparente des longitudes du ☉ et de ☿ . . . | 899″, 340 |
| différence géocentrique des longitudes . . . . . . . . | 894″, 344 |
| tems moyen de la conjonction géocentrique . . . . . . | 1h, 59′, 29″, 00 |
| tems moyen de la conjonction d'après les observations de M. Wisniewsky . . . . . . . . | 1h, 59′, 37″, 20 |
| Milieu de toutes les quatre observations . . . . | 1h, 59′, 35″, 11 |

Après avoir refait tout le calcul pour ce tems-là, j'ai trouvé, par les tables, la longitude héliocentrique vraie de la terre 224°, 57′, 18″, 95, celle de Mercure 224°, 57′, 21″, 68. L'erreur des tables de Mercure est donc en longitude héliocentrique = 2″, 73.

---

Bericht an die Kaiserliche Akademie der Wissenschaften über eine Abhandlung: *Versuch einer Anatomie und Physiologie des medizinischen Blutegels, (Sanguisuga medicinalis); von* Dr. *Brandt.*

(Gelesen den 20. Februar 1833.)

Ich erlaube mir beifolgend der Akademie eine Abhandlung unter dem Titel:

*Versuch einer Anatomie und Physiologie des medizinischen Blutegels, (Sanguisuga medicinalis)*

ganz ergebenst zu überreichen. Sie war ursprünglich für den IIten Band der getreuen Darstellung und Beschreibung der in der Arzneimittellehre in Betracht kommenden Thiere bestimmt. Da sie indessen einen für den ursprünglichen Zweck zu grossen Umfang erhielt und überdies viele theils neue, wohl nicht ganz uninteressante, theils zahlreiche berichtigende Untersuchungen enthält, so

schien es mir besser sie der Akademie für ihre Denkschriften zu überreichen, indem ich wohl hoffen darf, dass dieselbe nichts dagegen haben möchte, wenn daraus ein Auszug nebst den nöthigen Figuren dem Werke über Arzneithiere einverleibt wird, mit dem Bemerken, dass die anatomischen und physiologischen Beobachtungen über den Blutegel nur Mittheilungen aus der umfassendern Arbeit sind, welche ich am heutigen Tage vorzulegen die Ehre habe.

Ganz neu sind in der vorliegenden Abhandlung folgende Punkte in Bezug auf Anatomie.

1) Die Auffindung mehrerer Muskelparthien, die bisher übersehen wurden.
2) Die Nachweisung eigenthümlicher in den Schlund mündender Drüsen, wahrscheinlich Speicheldrüsen.
3) Die Entdeckung eines eigenthümlichen, kleinen Nervensystems für die Mundtheile und den Magen; analog den Eingeweidenerven der Insecten und den von mir entdeckten Eingeweidenerven in den Gasteropoden und Tintenfischen.
4) Die Wahrnehmung eigenthümlicher Gefässstämmchen, die vom Rücken nach dem Bauch verlaufen.
5, 6) Die Beobachtung einer eigenthümlichen, den Grund der Ruthenscheide umgebenden, der Prostata vergleichbaren Drüsenmasse und einer drüsenreichen Schleimhaut im Fruchthalter.

Zu den berichtigenden Beobachtungen gehören:

1) Die auf mikroskopische Beobachtungen gestützte Nachweisung von drei wahren Lebermassen, deren Existenz nur von wenigen Naturforschern, aber ohne gehörige Beweise angenommen wurde.
2) Die genauere Analyse der Beschaffenheit der Kiefer und Zähne des Blutegels mit ihren eigenen Muskeln und Scheiden.
3) Die genauere und feinere Anatomie des Verdauungskanals und Magens, worüber zeither die Beobachter in ihren Darstellungen nicht übereinstimmten.
4, 5, 6) Die umfassendere Darlegung des merkwürdigen Schleim-absondernden Apparates, so wie der feinern Verzweigungen der Bauchnervenkette und der Gefässsysteme. Besondere Beachtung dürfte hierbei auch noch verdienen, dass ich durch mikroskopische Untersuchungen die venöse Natur des Rücken- und Bauchgefässes, und die arterielle Function der Seitengefässe erwiesen zu haben glaube.
7) Die Widerlegung der fast allgemein herrschenden Angabe, dass der Egel eigenthümliche Respirationsorgane besitze, durch meist neue Gegengründe.

Alle diese Facta sind durch Zeichnungen erläutert, welche ich eigenhändig nach der Natur anfertigte und ebenfalls vorzustellen die Ehre habe.

Dass aber durch so vielseitige Structurbeobachtungen die bisherigen Ansichten über die Lebensverrichtungen des Egels wesentliche Veränderungen erleiden

müssen, ergiebt sich von selbst, und es tritt daher der Abschnitt von den Bewegungen, der Aufnahme der Nahrungsstoffe, von der Verdauung und vom Kreislauf in einer eigenthümlichen Gestalt auf.

Hinsichtlich des literarischen Apparates, dessen ich mich bediente, erlaube ich mir nur noch zu bemerken, dass nicht weniger als 13 monographische Werke verschiedener Nationen und 16 einzelne Abhandlungen über den Egel benutzt wurden und dass über dies noch mehrere Abhandlungen, von denen das Original nicht zu Gebote stand, zu Rathe gezogen sind, wodurch gleichzeitig die Möglichkeit entstand, über jedes einzelne Organ eine kurze Geschichte von seiner mehr oder weniger genauen Kenntniss bei den verschiedenen Schriftstellern zu liefern.

# NOTE

*sur la relation que peuvent avoir entr'elles les intégrales des fonctions algébriques, par M. Ostrogradsky.*

(Lu le 5. juillet 1833.)

Désignons par $y$ une fonction algébrique de la variable $x$, et, en admettant que l'intégrale $z = \int y\,dx$ puisse être exprimée par une fonction algébrique de la variable $x$ et des quantités transcendantes $t_1, t_2 \cdots\cdots t_i$, examinons de quelle forme cette intégrale est susceptible.

Nous supposons que les quantités $t_1, t_2 \cdots\cdots t_i$ soient des fonctions transcendantes, irréductibles entr'elles, de la variable $x$, et que les différentielles $\frac{dt_1}{dx}, \frac{dt_2}{dx} \cdots\cdots \frac{dt_i}{dx}$ soient des fonctions algébriques de la même variable.

Par *fonctions transcendantes irréductibles* nous entendons celles des fonctions transcendantes qui ne peuvent être liées entr'elles par aucune équation algébrique; ainsi, $\varphi$ désignant une fonction algébrique quelconque, une équation telle que

$$\varphi(t_1, t_2, \cdots\cdots t_i, x) = o$$

est impossible.

L'intégrale $z = \int y\,dx$ étant une fonction algébrique de $t_1, t_2 \cdots\cdots t_i$ et de $x$, on peut admettre qu'elle dépend d'une équation telle que

$$o = Kz^n + K_1 z^{n-1} + K_2 z^{n-2} + \cdots\cdots + K_{n-1} z + K_n \cdots\cdots (a)$$

dans laquelle $n$ est un nombre entier, et les quantités $K, K_1, K_2 \cdots K_{n-1}, K_n$ représentent des fonctions entières de $t_1, t_2, t_3 \cdots t_i$ et de $x$. La quantité $z$ ainsi définie, peut représenter une fonction algébrique quelconque de $t_1, t_2 \cdots t_i, x$. Il est évident que l'équation $(a)$ peut être considérée comme indécomposable en facteurs rationels, car si elle était décomposable, on prendrait un de ces facteurs pour équation qui servirait à définir l'intégrale $z$.

En différentiant l'équation $(a)$, et mettant $y$ pour $\frac{dz}{dx}$, on trouve

$$o = \frac{dK}{dx} z^n + \left(\frac{dK_1}{dx} + nKy\right) z^{n-1}$$
$$+ \left(\frac{dK_2}{dx} + (n-1) K_1 y\right) z^{n-2} + \cdots\cdots + \frac{dK_n}{dx} + K_{n-1} y \cdots (b)$$

les différentielles $\frac{dK}{dx}, \frac{dK_1}{dx} \cdots\cdots \frac{dK_n}{dx}$ sont prises en faisant varier les fonctions $t_1, t_2 \cdots\cdots t_i$.

Les équations $(a)$ et $(b)$ sont ou tout-à-fait différentes l'une de l'autre, ou ne font qu'une même équation; elles ne peuvent pas avoir des facteurs communs, car l'équation $(a)$ n'a pas de facteurs rationels.

Si ces équations ne font qu'une même équation, on aura alors

$$\frac{\frac{dK}{dx}}{K} = \frac{\frac{dK_1}{dx} + nKy}{K_1} = \frac{\frac{dK_2}{dx} + (n-1) K_1 y}{K_2} = \cdots\cdots = \frac{\frac{dK_n}{dx} + K_{n-1} y}{K_n},$$

ou bien

$$ny = -\frac{d\left(\frac{K_1}{K}\right)}{dx}$$

$$\frac{nd\left(\frac{K_2}{K}\right)}{dx} = (n-1) \frac{K_1}{T} \cdot \frac{d\left(\frac{K_1}{K}\right)}{dx}$$

$$\frac{nd\left(\frac{K_3}{K}\right)}{dx} = (n-2) \frac{K_2}{K} \cdot \frac{d\left(\frac{K_1}{K}\right)}{dx}$$

. . . . . . . . . . . . . . . . . .

$$\frac{nd\left(\frac{K_n}{K}\right)}{dx} = \frac{K_{n-1}}{K} \cdot \frac{d\left(\frac{K_1}{K}\right)}{dx}$$

d'où

$$z + \frac{K_1}{nK} = c$$

$$\frac{K_2}{K} = \frac{n(n-1)}{2} \cdot \frac{1}{n^2} \left(\frac{K_1}{K}\right)^2 + c_1$$

$$\frac{K_3}{K} = \frac{n(n-1)(n-2)}{2 \cdot 3} \cdot \frac{1}{n^3} \left(\frac{K_1}{K}\right)^3 + \frac{n-2}{n} c_1 \frac{K_1}{K} + c_2$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$c, c_1, c_2 \cdots\cdots$ sont des constantes arbitraires.

La première des équations précédentes fait voir que $z$ est une fonction rationelle de $t_1, t_2 \cdots\cdots t_i$ et de $x$; les autres équations donnent les valeurs des quantités $\frac{K_2}{K}, \frac{K_3}{K}, \cdots\cdots$ lesquelles étant mises dans l'équation $(a)$, celle-ci deviendra

$$o = \left(z + \frac{K_1}{nK}\right)^n + c_1 \left(z + \frac{K_1}{nK}\right)^{n-2} + c_2 \left(z + \frac{K_1}{nK}\right)^{n-3} + \cdots\cdots$$

et elle nous apprendra ce que nous savions déjà, savoir que $z + \frac{K_1}{nK} = c$. Ainsi l'hypothèse que les deux équations $(a)$ et $(b)$ n'en font qu'une, conduit à regarder l'intégrale $z$ comme une fonction rationelle de $t_1, t_2, \cdots\cdots t_i$ et de $x$.

Supposons maintenant que les équations $(a)$ et $(b)$ soient différentes, alors on peut regarder, d'après la théorie des équations algébriques, l'intégrale $z$ comme une fonction rationelle des coëfficiens de ces deux équations, c'est-à-dire comme une fonction rationelle de $t_1, t_2 \cdots\cdots t_i, \frac{dt_1}{dx}, \frac{dt_2}{dx} \cdots\cdots \frac{dt_i}{dx}, y$ et de $x$. Cette dernière hypothèse renferme l'hypothèse précédente comme cas particulier; nous l'adopterons dans ce qui suit; ainsi $z$ est une fonction rationelle de $t_1, t_2 \cdots\cdots t_i, \frac{dt_1}{dx}, \frac{dt_2}{dx} \cdots\cdots \frac{dt_i}{dx}, y$ et de $x$.

Différentions l'équation

$$z = \int y dx$$

en y faisant tout varier; nous aurons

$$\frac{dz}{dx} = y.$$

Le premier membre de cette équation ne doit renfermer aucune des quantités $t_1, t_2 \cdots\cdots t_i$, autrement ces quantités seraient liées entr'elles par une équation algébrique; il faut donc que la différentielle de $\frac{dz}{dx}$ par rapport à chaque quantité $t_1, t_2 \cdots\cdots t_i$, considérée comme variable indépendante, soit zéro; or, comme

$$\frac{d \cdot \frac{dz}{dx}}{dt_1} = \frac{d \cdot \frac{dz}{dt_1}}{dx}, \quad \frac{d \cdot \frac{dz}{dx}}{dt_2} = \frac{d \cdot \frac{dz}{dt_2}}{dx} \cdots\cdots \frac{d \cdot \frac{dz}{dx}}{dt_i} = \frac{d \cdot \frac{dz}{dt_i}}{dx},$$

nous aurons

$$d \cdot \frac{dz}{dt_1} = o, \quad d \cdot \frac{dz}{dt_2} = o \cdots\cdots d \cdot \frac{dz}{dt_i} = o,$$

ce qui donne

$$\frac{dz}{dt_1} = c_1, \quad \frac{dz}{dt_2} = c_2 \cdots\cdots \frac{dz}{dt_i} = c_i,$$

et par suite

$$z = c_1 t_1 + c_2 t_2 + \cdots + c_i t_i + \text{une fonction rationelle de } \frac{dt_1}{dx}, \frac{dt_2}{dx} \cdots \frac{dt_i}{dx}, y \text{ et } x;$$

les quantités $c_1, c_2 \cdots\cdots c_i$ sont des constantes arbitraires.

Il résulte de ce qui précède qu'en désignant par $y_1, y_2 \cdots\cdots y_n$ des fonctions algébriques, les intégrales

$$z_1 = \int y_1 dx, \quad z_2 = \int y_2 dx, \quad z_3 = \int y_3 dx, \cdots\cdots z_n = \int y_n dx$$

supposées toutes fonctions transcendantes de $x$, ne peuvent avoir entr'elles d'autre relation algébrique que la suivante

$$c_1 z_1 + c_2 z_2 + c_3 z_3 + \cdots\cdots + c_n z_n = \text{fonc. ration.}\,(y_1, y_2, y_3 \cdots y_n, x),$$

$c_1, c_2, c_3 \cdots c_n$ sont des quantités indépendantes de $x$. En mettant à la place de $z_1, z_2, z_3 \cdots\cdots z_n$ respectivement leurs valeurs $\int y_1 dx, \int y_2 dx, \int y_3 dx \cdots\cdots \int y_n dx$ on trouve

$$\int (c_1 y_1 + c_2 y_2 + c_3 y_3 + \cdots + c_n y_n)\, dx = \text{fonc. ration.}\,(y_1, y_2, y_3 \cdots y_n, x).$$

Fig. 1.

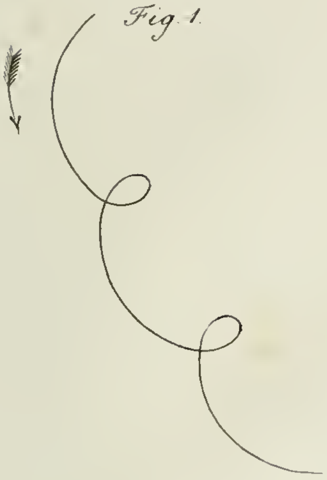


Fig. 2.

Fig. 3.

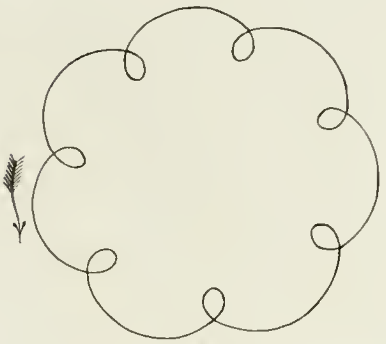


Fig. 4

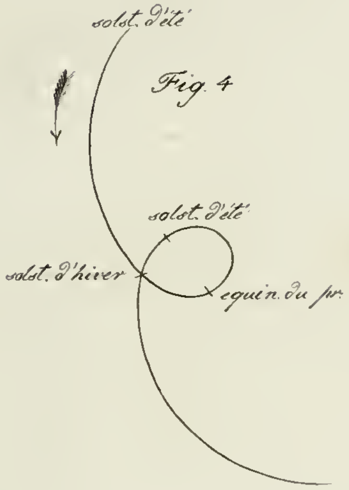



Fig. 5.

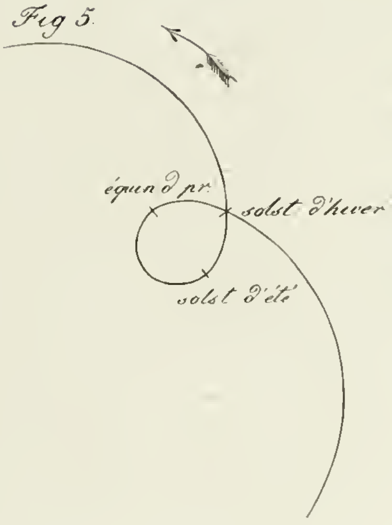



Fig. 7

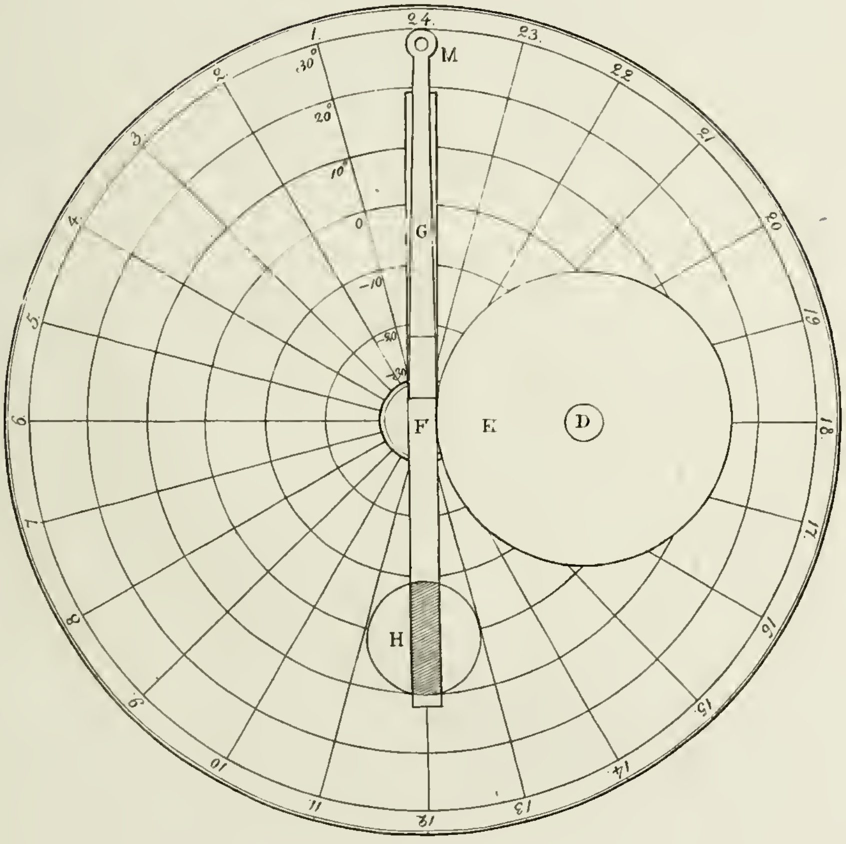
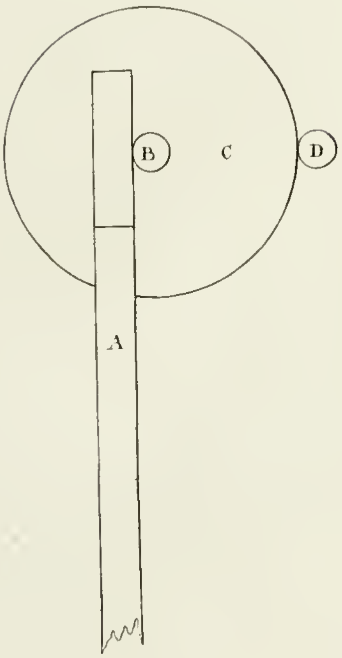


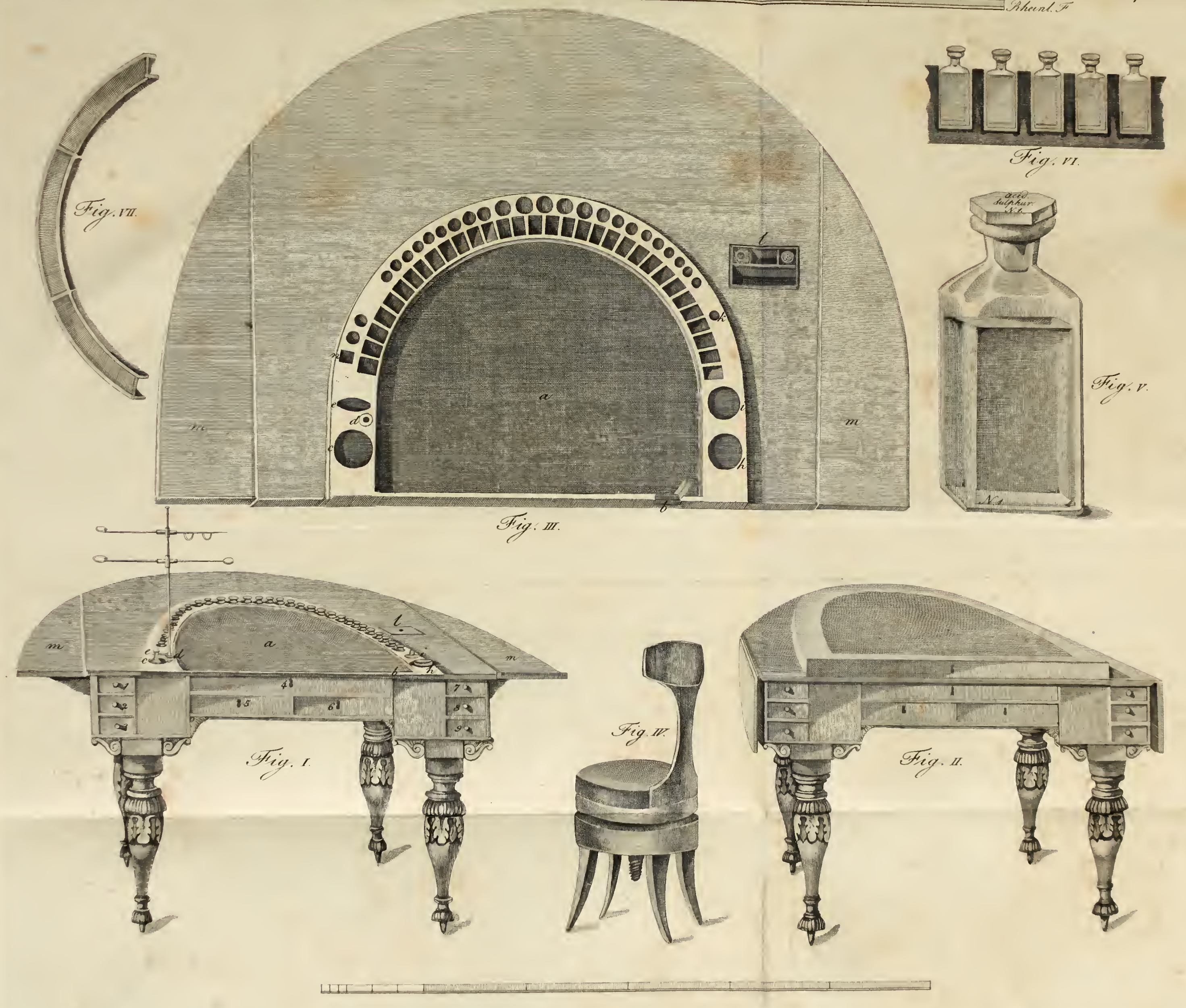

Fig. 6



THE LIBRARY
OF THE
UNIVERSITY OF ILLINOIS

Goebel's Experimentirt

Fig. VII.


Rheinl. F.
Fig. VII.
Fig. VI.
Acid. sulphur. N. 1.
Fig. V.
N. 1.
Fig. III.
Fig. I.
Fig. IV.
Fig. II.

UNIVERSITY OF ILLINOIS-URBANA
3 0112 060768576